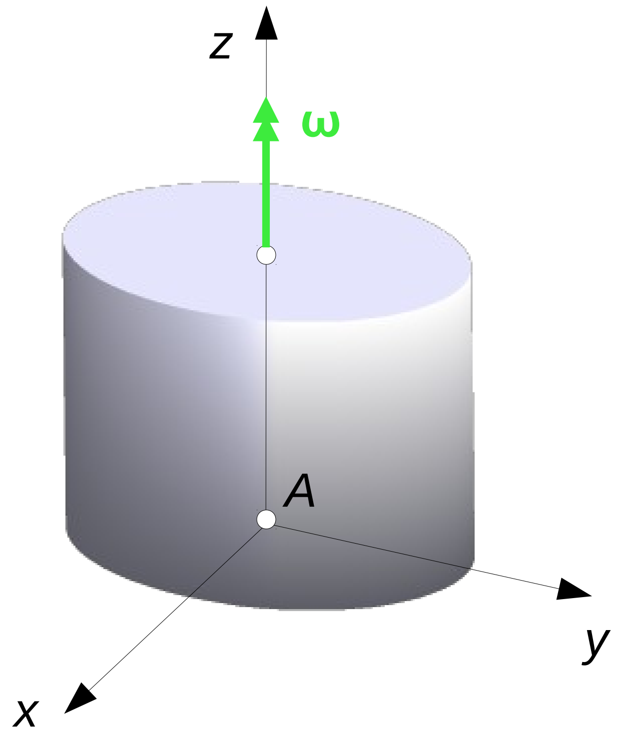
1. Rotation um eine feste Achse

- Betrachtet wird ein starrer Körper, der sich um eine raumfeste Achse dreht.
- Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Drehachse mit der *z*-Achse zusammenfällt.
- Der Ursprung des Koordinatensystems wird mit *A* bezeichnet.



1. Rotation um eine feste Achse

1.1 Schwerpunktsatz

1.2 Drallsatz

1.3 Massenträgheitsmoment

1.4 Zentrifugalmomente

1.5 Zusammengesetzte Körper

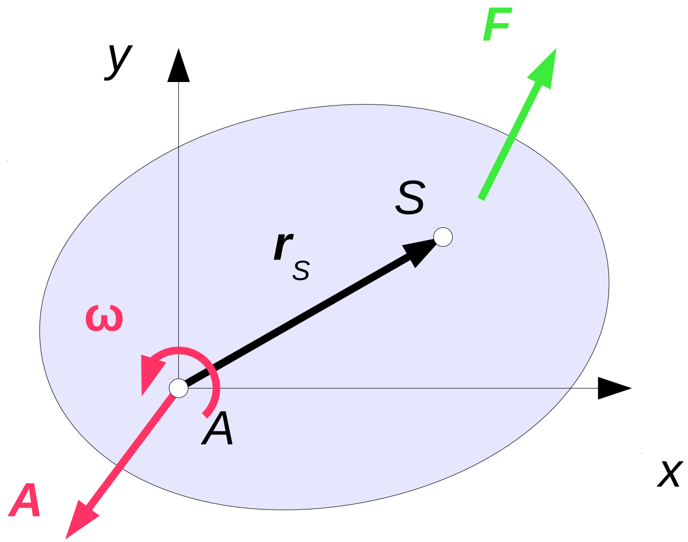
1.6 Arbeit und Energie

1.7 Massenpunkt und starrer Körper

1.1 Schwerpunktsatz

- Schwerpunktsatz:
  - Am freigeschnittenen Körper greift die resultierende äußere Kraft $\boldsymbol{F}$ und die resultierende Lagerkraft $\boldsymbol{A}$ an.
  - Wie bei einem System von Massenpunkten gilt:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_S=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{A}$$



1.1 Schwerpunktsatz

- Dynamisches Gleichgewicht:
  - Aus dem Schwerpunktsatz folgt: $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{A}-m\ddot{\boldsymbol{r}}_S=\boldsymbol{0}$
  - Mit $\ddot{\boldsymbol{r}}_S=\boldsymbol{a}_S=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_S+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_S\right)$ folgt daraus:

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{A}-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_S-m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_S\right)=\boldsymbol{0}$$

  - Die Trägheitskraft $\boldsymbol{T}=-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_S$ wird durch die Bahnbeschleunigung verursacht.
  - Die Trägheitskraft $\boldsymbol{Z}=-m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_S\right)$ wird durch die Zentripetalbeschleunigung verursacht. Sie wird als *Zentrifugalkraft* bezeichnet.
  - Das dynamische Gleichgewicht lautet: $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{T}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{0}$

1.1 Schwerpunktsatz

- Statische Unwucht:
  - Wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht, sind wegen $\boldsymbol{r}_S = \mathbf{0}$ die Trägheitskräfte null. Die Lagerkräfte sind im Gleichgewicht mit den äußeren Kräften.
  - Bei Körpern, die sich mit großer Winkelgeschwindigkeit drehen, sollte daher der Schwerpunkt auf der Drehachse liegen.
  - Liegt der Schwerpunkt nicht auf der Drehachse, so spricht man von *statischer Unwucht*.
  - Ist ein Rad statisch ausgewuchtet, so ist es in jeder Lage im statischen Gleichgewicht.

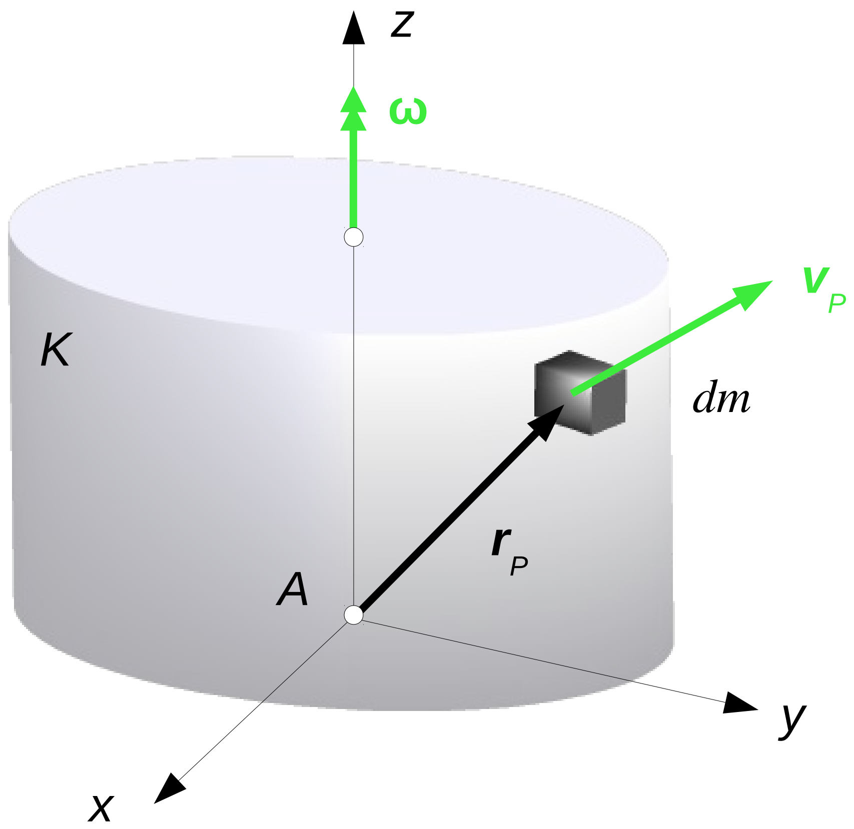
1.2 Drallsatz

- Drall:
  - Aus dem Grenzübergang zu infinitesimalen Massenelementen folgt für den Drall:

$$\boldsymbol{L}^A = \int_K \left(\boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{v}_P \right) dm$$

  - Für die Vektoren gilt:

$$\boldsymbol{r}_P = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{v}_P = v_{Px}\,\boldsymbol{e}_x + v_{Py}\,\boldsymbol{e}_y$$



1.2 Drallsatz

- Das Vektorprodukt berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{P}} \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} &= \left(x\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} + y\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} + z\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}} \right) \times \left(v_{Px}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} + v_{Py}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} \right) \\ &= \left(x\,v_{Py} - y\,v_{Px} \right) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}} + z\,v_{Px}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} - z\,v_{Py}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

- Jeder Massenpunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn um die *z*-Achse. Daher gilt für seine Geschwindigkeit:

$$v_{Px} = -\omega\,y, \quad v_{Py} = \omega\,x$$

- Damit berechnet sich der Integrand zu

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{P}} \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} = \omega \left(\left(x^2 + y^2 \right) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}} - y\,z\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} - x\,z\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \right)$$

1.2 Drallsatz

- Integration über den Körper ergibt:

$$\boldsymbol{L}^A = \omega\left(\int_K \left(x^2 + y^2\right) dm\, \boldsymbol{e}_z - \int_K x\, z\, dm\, \boldsymbol{e}_x - \int_K y\, z\, dm\, \boldsymbol{e}_y\right)$$

- Definitionen:
  - Massenträgheitsmoment: $J_z^A = \int_K \left(x^2 + y^2\right) dm = \int_K r^2\, dm$
  - Deviationsmomente: $J_{xz}^A = -\int_K x\, z\, dm\,,\quad J_{yz}^A = -\int_K y\, z\, dm$
  - Die Deviationsmomente werden auch als *Zentrifugalmomente* bezeichnet.

1.2 Drallsatz

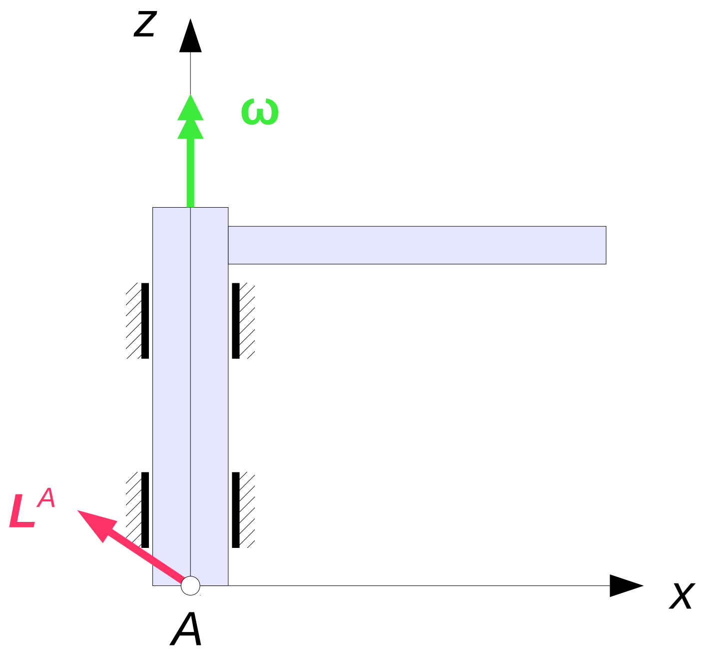
- Ergebnis:
  - Bei einer Drehung um die *z*-Achse gilt für die Komponenten des Dralls:

$$\boxed{\begin{aligned} L_x^A &= \omega J_{xz}^A \\ L_y^A &= \omega J_{yz}^A \\ L_z^A &= \omega J_z^A \end{aligned}}$$

  - Nur wenn die Deviationsmomente null sind, stimmt die Richtung des Drallvektors mit der Richtung der Drehachse überein.
  - In einem körperfesten System ändern sich J^A_{xz}, J^A_{yz} und J^A_z nicht. Der Drallvektor dreht sich mit dem Körper.

1.2 Drallsatz

- Beispiel: Schwenkarm



- Der Schwenkarm dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1\ \mathrm{s}^{-1}$ um die *z*-Achse.
- Massenträgheitsmoment:

$$J_z^A = 5\,\mathrm{kgm}^2$$

- Deviationsmomente:

$$J_{xz}^A = -7{,}5\,\mathrm{kgm}^2,\ J_{yz}^A = 0$$

- Komponenten des Drallvektors:

$$L_x^A = -7{,}5\,\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s},\quad L_y^A = 0\,\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}$$

$$L_z^A = 5\,\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}$$

1.2 Drallsatz

- Drallsatz:
  - Für ein System von Massenpunkten lautet der Drallsatz:

$$\dot{\boldsymbol{L}}^A = \boldsymbol{M}^A$$

  - Der Drallsatz behält seine Gültigkeit beim Grenzübergang auf ein System aus unendlich vielen unendlich kleinen Massenelementen.
  - Die zeitliche Änderung des Dralls muss in einem Inertialsystem, d. h. für einen ortsfesten Beobachter berechnet werden.

1.2 Drallsatz

- Da sich jeder Punkt des starren Körpers auf einer Kreisbahn um die *z*-Achse bewegt, gilt:
  - Die *z*-Koordinate z ist zeitlich konstant.
  - Der Abstand r von der *z*-Achse ist zeitlich konstant.
- Für die *z*-Komponente des Dralls gilt daher:

$$\boxed{\dot{L}_z^A = J_z^A \dot{\omega} = M_z^A}$$

- Dabei ist M_z^A das Moment der äußeren Kräfte um die *z*-Achse.
- Wenn das Moment der äußeren Kräfte um die *z*-Achse null ist, gilt der *Drallerhaltungssatz*: $J_z^A \omega_2 = J_z^A \omega_1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1$

1.2 Drallsatz

- Die x- und y- Koordinaten der Punkte des starren Körpers ändern sich bei einer Drehung um die z-Achse.
- Daher ändern sich die Deviationsmomente.
- Für die Momente um die x- und y-Achse folgt aus dem Drallsatz:

$$M_x^A = \dot{L}_x^A = \dot{\omega} J_{xz}^A + \omega \dot{J}_{xz}^A$$
$$M_y^A = \dot{L}_y^A = \dot{\omega} J_{yz}^A + \omega \dot{J}_{yz}^A$$

- Da sich die Punkte auf einer Kreisbahn um die z-Achse bewegen, gilt:

$$\dot{x} = v_{Px} = -\omega y, \quad \dot{y} = v_{Py} = \omega x$$

1.2 Drallsatz

- Damit folgt für die zeitliche Änderung der Deviationsmomente:

$$\dot{J}_{xz}^A = -\int_K \dot{x}\, z\, dm = \omega \int_K y\, z\, dm = -\omega J_{yz}^A$$

$$\dot{J}_{yz}^A = -\int_K \dot{y}\, z\, dm = -\omega \int_K x\, z\, dm = \omega J_{xz}^A$$

- Ergebnis:

$$\boxed{\begin{aligned} M_x^A &= \dot{\omega} J_{xz}^A - \omega^2 J_{yz}^A \\ M_y^A &= \dot{\omega} J_{yz}^A + \omega^2 J_{xz}^A \\ M_z^A &= \dot{\omega} J_z^A \end{aligned}}$$

1.2 Drallsatz

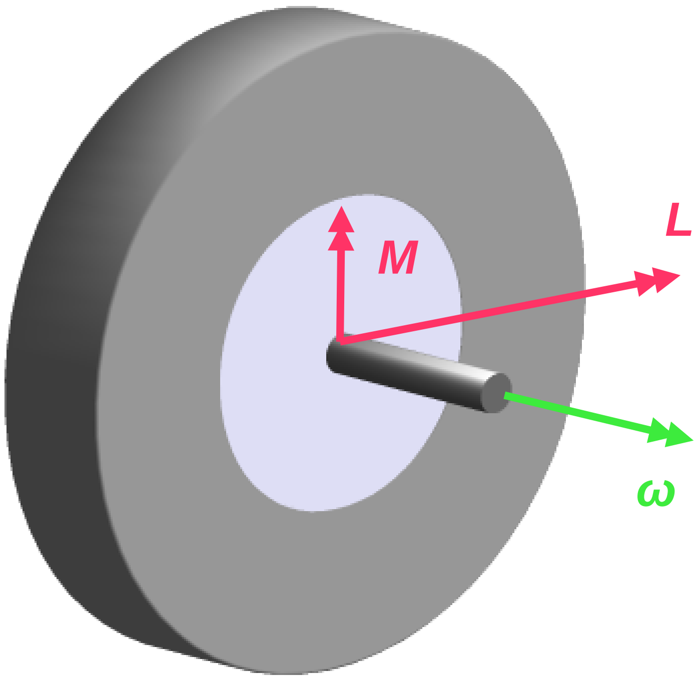
- Der Drallsatz stellt eine Beziehung zwischen den am Körper angreifenden Momenten und der Winkelgeschwindigkeit her. Er wird daher auch als *Momentensatz* bezeichnet.
- Das Moment M^A_z um die Drehachse verursacht eine Winkelbeschleunigung.
- Wenn die Deviationsmomente nicht null sind, sind die Momente M^A_x und M^A_y auch bei konstanter Winkelgeschwindigkeit von null verschieden. Sie sind notwendig, um die Drehachse in ihrer Richtung zu halten.
- Dieser Effekt wird als *dynamische Unwucht* bezeichnet.

1.2 Drallsatz

- In einem ortsfesten Koordinatensystem sind die Deviationsmomente zeitlich veränderlich.
- In einem Koordinatensystem, das sich mit dem Körper dreht, sind die Deviationsmomente zeitlich konstant. Die Komponenten des berechneten Moments beziehen sich dann ebenfalls auf das körperfeste Koordinatensystem.

1.2 Drallsatz

- Beispiel: Dynamische Unwucht
  - Betrachtet wird ein Rad, das sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht.
  - Bei dynamischer Unwucht ist der Drallvektor nicht parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit.
  - Im radfesten Koordinatensystem ist der Drallvektor konstant.

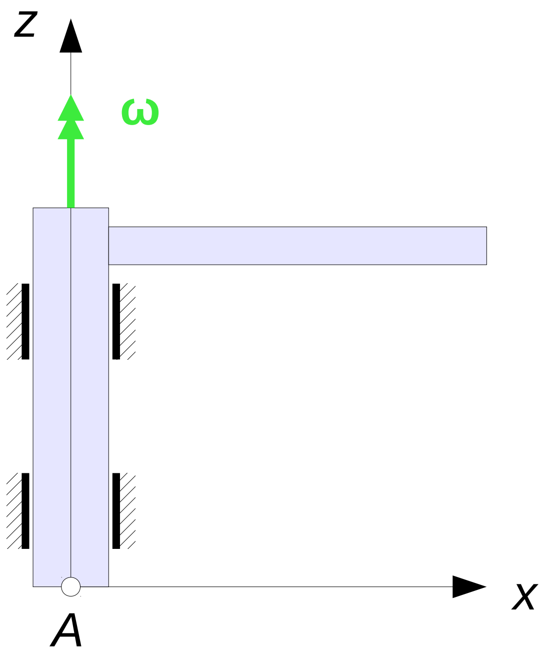


1.2 Drallsatz

- Im ortsfesten Koordinatensystem dreht sich der Drallvektor mit dem Rad. Dabei ändert sich seine Richtung.
- Für die Änderung des Dralls wird ein Moment benötigt, das vom Radlager auf das Rad ausgeübt werden muss.
- Der Momentenvektor ist im radfesten Koordinatensystem konstant und dreht sich im ortsfesten Koordinatensystem mit dem Rad.
- Wegen der Elastizität des Radlagers schlackert das Rad.

1.2 Drallsatz

- Beispiel: Schwenkarm



- Der Schwenkarm wird um 90° um die z-Achse gedreht.
- Für $0 \leq t \leq T$ gilt für den Winkel:

$$\phi(t) = \frac{\pi}{4}\left(1 - \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)\right)$$

- Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \dot{\phi}(t) = \frac{\pi^2}{4T}\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

- Winkelbeschleunigung:

$$\dot{\omega}(t) = \frac{\pi^3}{4T^2}\cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

1.2 Drallsatz

- Im mitrotierenden Koordinatensystem gilt mit $J^A_{yz} = 0$ für die Momente:

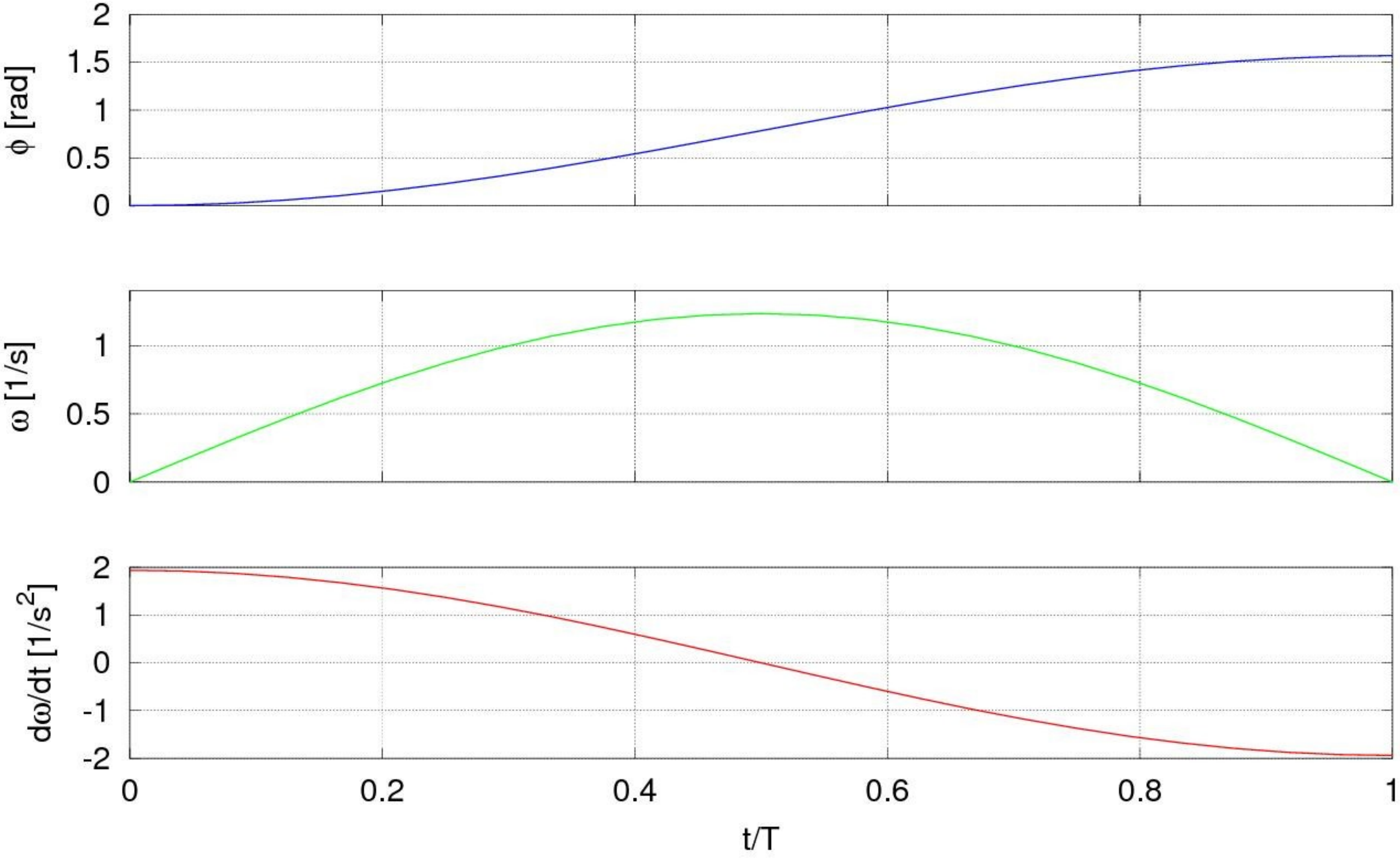
$$M_x^A(t) = \dot{\omega}(t) J_{xz}^A = \frac{\pi^3}{4} \frac{J_{xz}^A}{T^2} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

$$M_y^A(t) = \omega^2(t) J_{xz}^A = \frac{\pi^4}{16} \frac{J_{xz}^A}{T^2} \sin^2\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

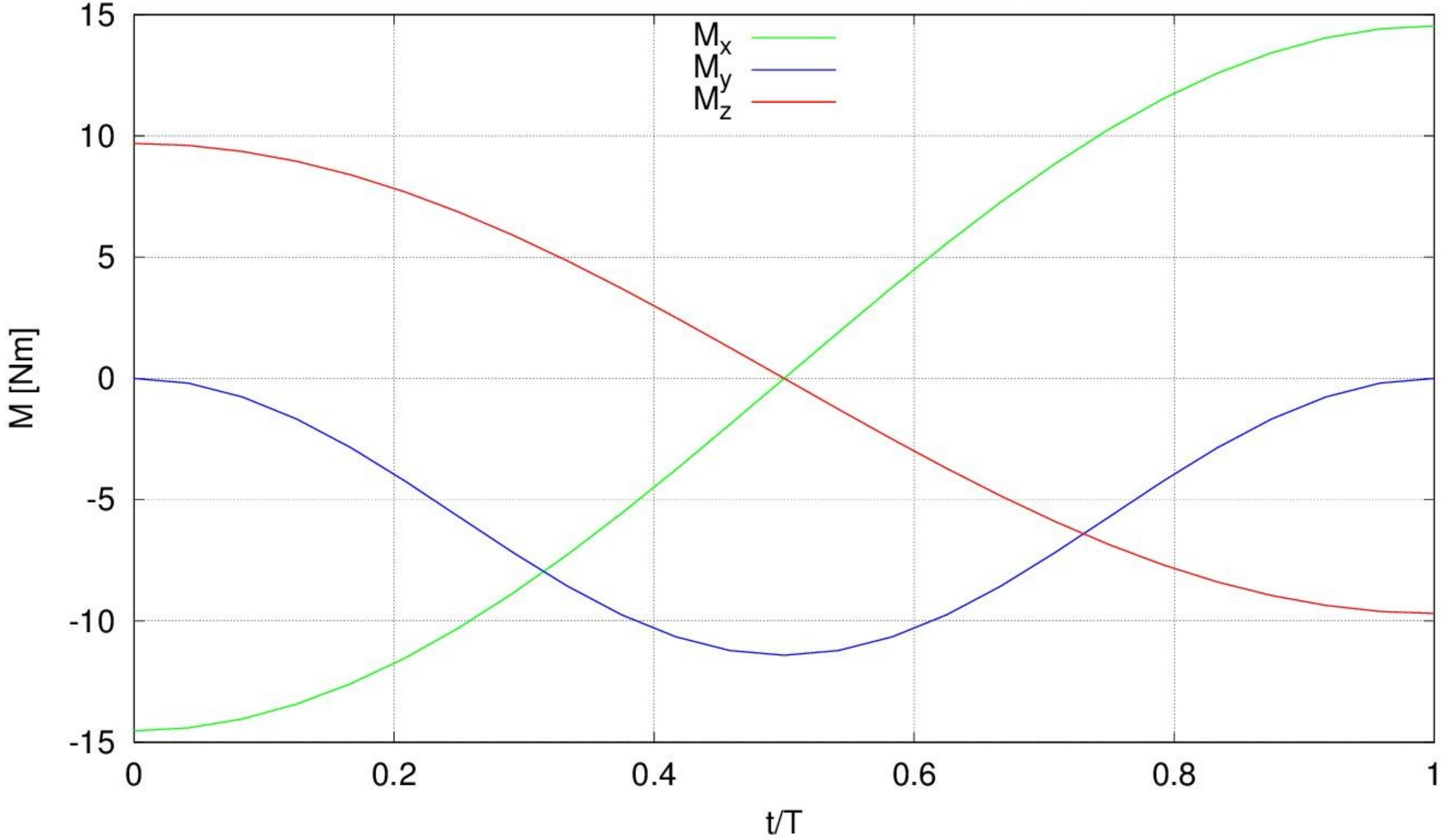
$$M_z^A(t) = \dot{\omega}(t) J_z^A = \frac{\pi^3}{4} \frac{J_z^A}{T^2} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

- Zahlenwerte: $T = 2\,\mathrm{s}, \quad J_z^A = 5\,\mathrm{kgm}^2, \quad J_{xz}^A = -7{,}5\,\mathrm{kgm}^2$

1.2 Drallsatz



1.2 Drallsatz



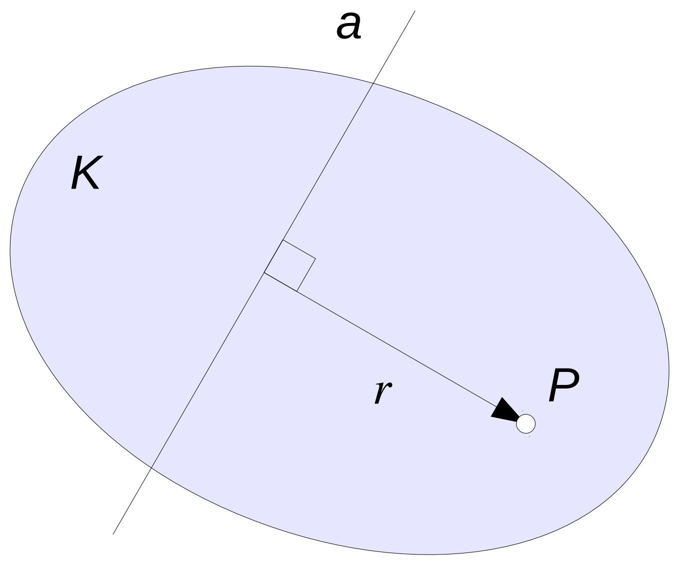
1.3 Massenträgheitsmoment

- Definition:
  - Das Massenträgheitsmoment um die Achse *a* ist definiert durch

$$J_a = \int_K r^2 \, dm$$

  - Dabei ist r der senkrechte Abstand zur Drehachse.
  - Für das Massenträgheitsmoment um die *z*-Achse gilt:

$$J_z = \int_K r^2 \, dm = \int_K \left(x^2 + y^2 \right) dm$$



1.3 Massenträgheitsmoment

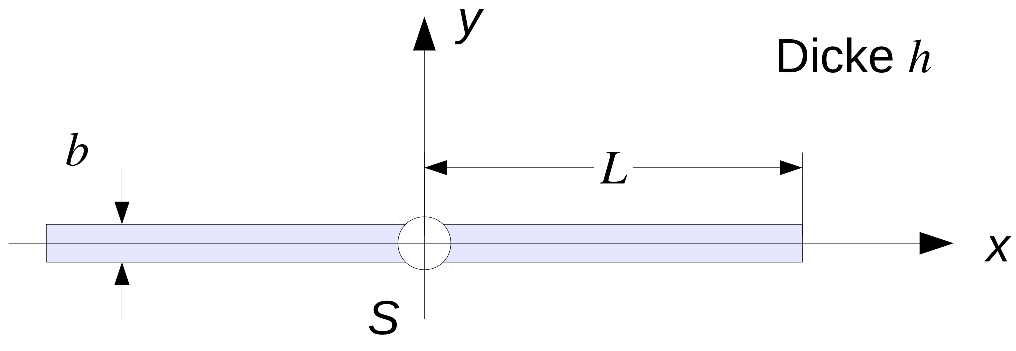
- Homogener Körper:
  - Bei einem homogenen Körper ist die Dichte ρ konstant.
  - Mit $dm = \rho\, dV$ folgt: $J_z = \int_K r^2\, dm = \rho \int_V r^2\, dV$
  - Wenn die Dicke h des homogenen Körpers konstant ist, folgt mit $dV = h\, dA$:

$$J_z = \rho\, h \int_A r^2\, dA = \rho\, h\, I_p$$

  - Dabei ist $I_p = \int_A r^2\, dA$ das polare Flächenträgheitsmoment.

1.3 Massenträgheitsmoment

- Beispiel: Propeller



- Der Koordinatenursprung wird in den Schwerpunkt gelegt.
- Der Propeller dreht sich um die z-Achse.

1.3 Massenträgheitsmoment

- Massenträgheitsmoment:

$$J_z^S = \rho h \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = \rho h \int_{-L}^{L} \left[\int_{-b/2}^{b/2} \left(x^2 + y^2\right) dy \right] dx$$

$$= \rho h \int_{-L}^{L} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=-b/2}^{y=b/2} dx = \rho h \int_{-L}^{L} \left(b x^2 + \frac{b^3}{12} \right) dx$$

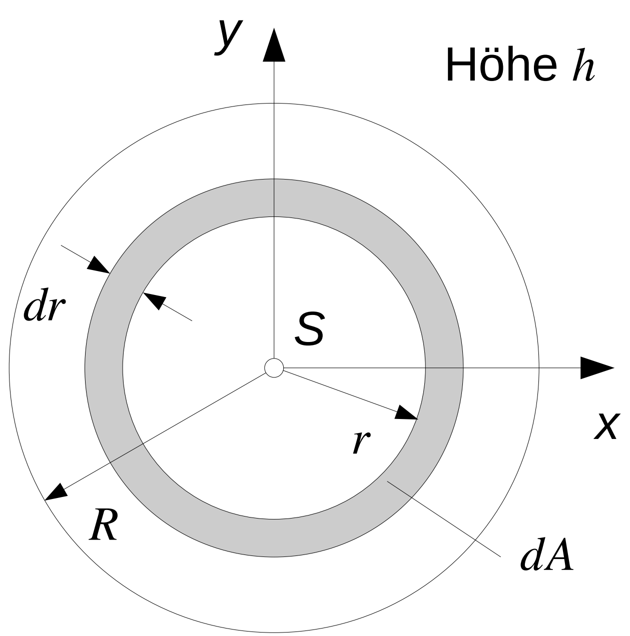
$$= \rho h b \left[\frac{x^3}{3} + \frac{b^2}{12} x \right]_{x=-L}^{x=L} = \rho h b \left(\frac{2}{3} L^3 + \frac{2}{12} b^2 L \right) = \frac{2}{3} \rho h b L \left(L^2 + \frac{b^2}{4} \right)$$

- Mit der Masse $m = 2 \rho h b L$ folgt:

$$J_z^S = \frac{1}{3} m L^2 \left[1 + \left(\frac{b}{2L} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{3} m L^2 \quad \text{für} \quad b \ll L$$

1.3 Massenträgheitsmoment

- Beispiel: Zylinder



$$dA = 2\pi\, r\, dr$$

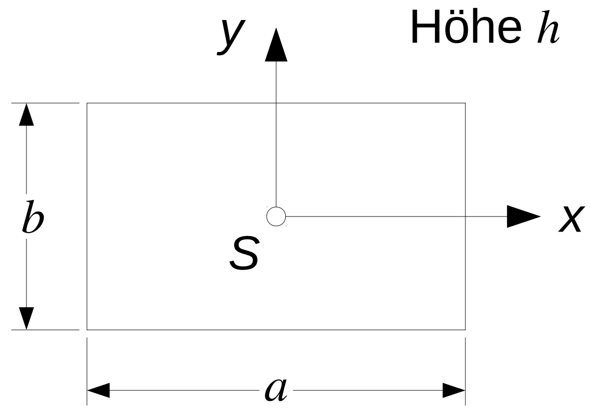
$$J_z^S = \rho\, h \int_A r^2\, dA = 2\pi\rho\, h \int_0^R r^3\, dr$$

$$= 2\pi\rho\, h \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{1}{2}\pi\rho\, h\, R^4$$

$$= \frac{1}{2} m\, R^2$$

1.3 Massenträgheitsmoment

- Beispiel: Quader



$$J_z^S = \rho h \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA$$

$$= \rho h \int_{-a/2}^{a/2} \left[\int_{-b/2}^{b/2} \left(x^2 + y^2\right) dy \right] dx$$

$$= \rho h \int_{-a/2}^{a/2} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=-b/2}^{y=b/2} dx = \rho h \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 b + \frac{b^3}{12} \right) dx$$

$$= \rho h b \left[\frac{x^3}{3} + \frac{b^2}{12} x \right]_{x=-a/2}^{x=a/2} = \rho h b \left(\frac{a^3}{12} + \frac{b^2}{12} a \right) = \frac{1}{12} m \left(a^2 + b^2\right)$$

1.4 Zentrifugalmomente

- Betrachtet wird ein Körper, der sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die *z*-Achse dreht.
- Dynamisches Gleichgewicht:
  - Die Beschleunigung eines Massenpunktes ist

$$a_{Px} = -\omega^2 x \,, \quad a_{Py} = -\omega^2 y$$

  - Für die Zentrifugalkraft gilt:

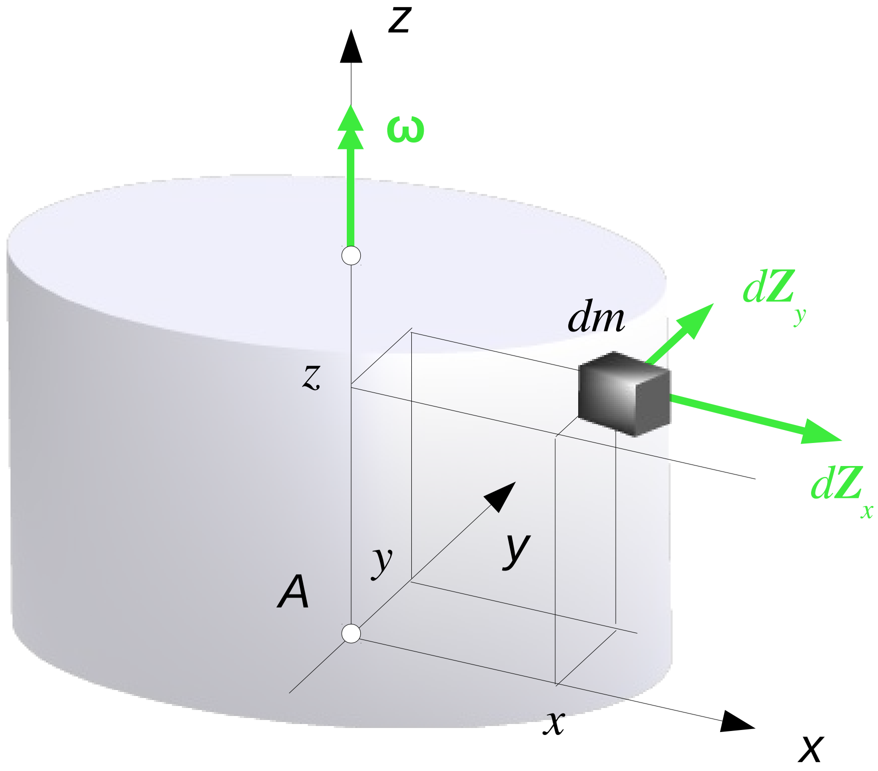
$$dZ_x = -a_{Px}\, dm = \omega^2 x \, dm \,, \quad dZ_y = -a_{Py}\, dm = \omega^2 y \, dm$$

1.4 Zentrifugalmomente

- Resultierende Momente:

$$M_{Tx}^A = -\int_K z\,dZ_y = -\omega^2 \int_K z\,y\,dm = \omega^2 J_{yz}^A$$

$$M_{Ty}^A = \int_K z\,dZ_x = \omega^2 \int_K z\,x\,dm = -\omega^2 J_{xz}^A$$



- Dynamisches Gleichgewicht:

$$M_x^A + M_{Tx}^A = 0 \;:\; -\omega^2 J_{yz}^A + \omega^2 J_{yz}^A = 0 \quad ✔$$

$$M_y^A + M_{Ty}^A = 0 \;:\; \omega^2 J_{xz}^A - \omega^2 J_{xz}^A = 0 \quad ✔$$

1.4 Zentrifugalmomente

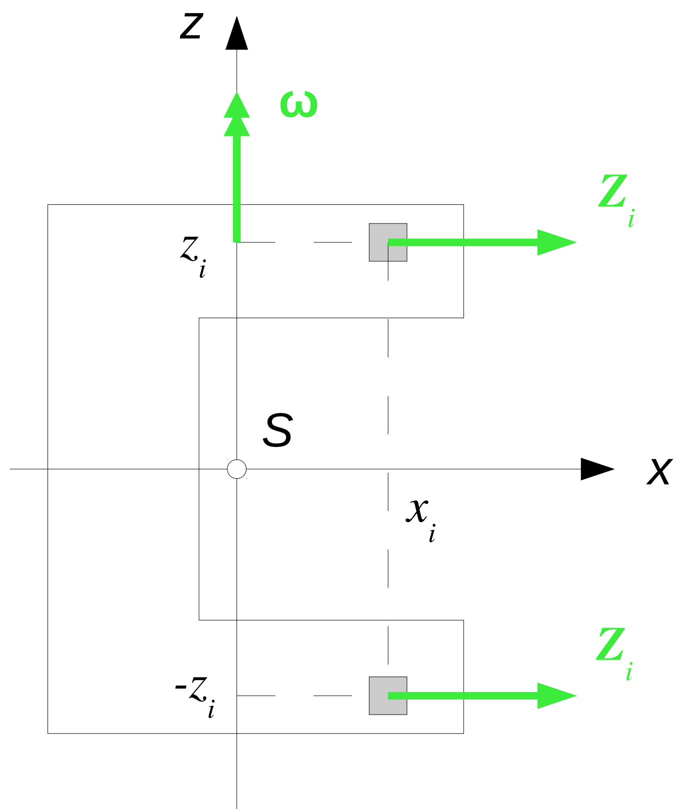
- Die Fliehkraftmomente versuchen, die Drehachse zu kippen.
- Um die Drehachse festzuhalten, sind die äußeren Momente

$$M_x^A = -M_{Tx}^A , \quad M_y^A = -M_{Ty}^A$$

  nötig.
- Im ortsfesten Koordinatensystem hängen diese Momente von der Zeit ab, da die Deviationsmomente von der Zeit abhängen.
- In einem mitrotierenden körperfesten Koordinatensystem sind die Deviationsmomente zeitlich konstant.

1.4 Zentrifugalmomente

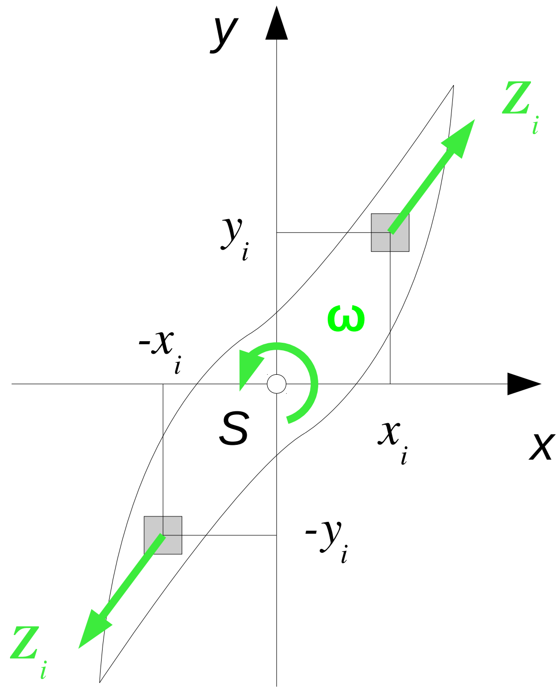
- Symmetrische Körper:
  - Spiegelsymmetrie bezüglich der *xy*-Ebene:
    - Zu jedem Massenelement an der Stelle (x_i , y_i , z_i) gibt es ein entsprechendes Massenelement an der Stelle (x_i , y_i , -z_i).
    - Die Momente der Fliehkraft um die *x*- und *y*-Achse heben sich jeweils gegenseitig auf.
    - Daher sind die resultierenden Zentrifugalmomente null.



$$J_{xz}^{S} = J_{yz}^{S} = 0$$

1.4 Zentrifugalmomente

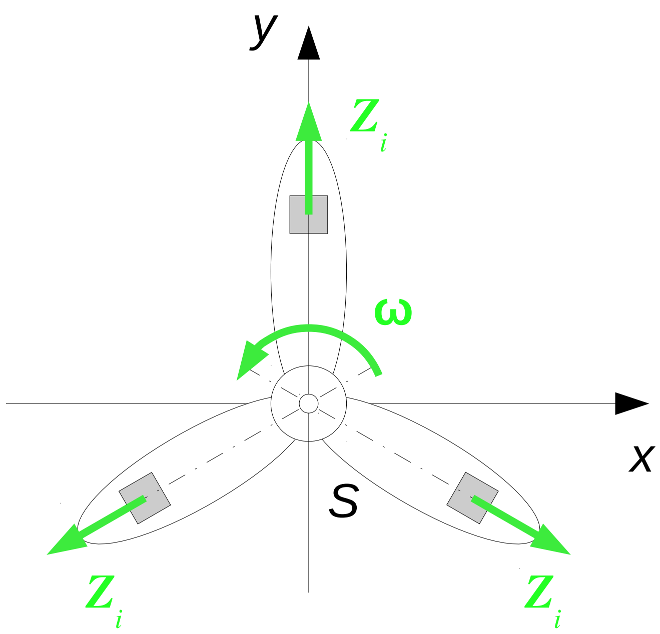
- Achsensymmetrie bezüglich der *z*-Achse:
  - Bei einer Drehung um 180° um die *z*-Achse wird der Körper auf sich selbst abgebildet.
  - Zu jedem Massenelement an der Stelle (x_i , y_i , z_i) gibt es ein entsprechendes Massenelement an der Stelle ($-x_i$, $-y_i$, z_i).
  - Die zugehörigen Zentrifugalkräfte heben sich gegenseitig auf.
  - Daher sind die resultierenden Zentrifugalmomente null.



$$J_{xz}^S = J_{yz}^S = 0$$

1.4 Zentrifugalmomente

- Zyklische Symmetrie bezüglich der *z*-Achse:
  - Bei einer Drehung um den Winkel ϕ um die *z*-Achse wird der Körper auf sich selbst abgebildet.
  - Die Zentrifugalkräfte an entsprechenden Massenelementen bilden ein zentrales Kraftsystem, das im Gleichgewicht ist.
  - Die Zentrifugalmomente sind null.



$$J_{xz}^S = J_{yz}^S = 0$$

1.4 Zentrifugalmomente

- Für einen Winkel von 180° ergibt sich die Achsensymmetrie.

– Rotationssymmetrie bezüglich der z-Achse:

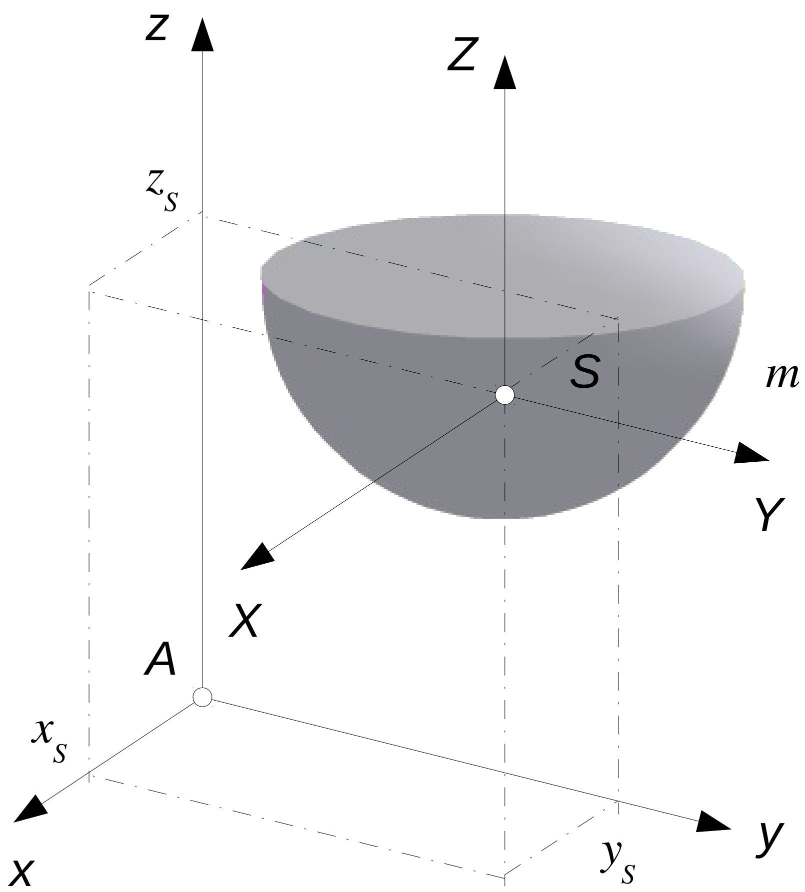
- Bei einer Drehung um einen beliebigen Winkel um die z-Achse wird der Körper auf sich selbst abgebildet.
- Die Rotationssymmetrie ist ein Spezialfall der zyklischen Symmetrie.
- Daher sind die Zentrifugalmomente null.

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Das Massenträgheitsmoment und die Deviationsmomente eines aus elementaren Körpern zusammengesetzten Körpers lassen sich durch Addition der Massenträgheitsmomente und der Deviationsmomente der einzelnen Körper ermitteln.
- Dabei können auch Körper subtrahiert werden.
- Für viele elementare Körper sind die Massenträgheitsmomente und die Deviationsmomente tabelliert.
- Die tabellierten Werte beziehen sich in der Regel auf Achsen durch den Schwerpunkt.

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Satz von Steiner:
  - Gegeben:
    - Massenträgheits- und Deviationsmomente bezüglich des Koordinatensystems *SXYZ*
  - Gesucht:
    - Massenträgheits- und Deviationsmomente bezüglich des parallel verschobenen Koordinatensystems *Axyz*



1.5 Zusammengesetzte Körper

- Für die Koordinaten gilt: $x = X + x_S, \quad y = Y + y_S, \quad z = Z + z_S$
- Daraus folgt:

$$x^2 + y^2 = \left(X + x_s\right)^2 + \left(Y + y_s\right)^2 = X^2 + 2\,x_S\,X + x_S^2 + Y^2 + 2\,y_S\,Y + y_s^2$$

$$x\,z = \left(X + x_S\right)\left(Z + z_S\right) = X\,Z + x_S\,Z + z_S\,X + x_S\,z_S$$

$$y\,z = \left(Y + y_S\right)\left(Z + z_S\right) = Y\,Z + y_S\,Z + z_S\,Y + y_S\,z_S$$

- Aus der Definition des Schwerpunkts folgt:

$$\int_K X\,dm = \int_K Y\,dm = \int_K Z\,dm = 0$$

- Damit liefert die Integration über den Körper:

$$J_z^A = \int_K \left(x^2 + y^2\right) dm = \int_K \left(X^2 + Y^2\right) dm + \left(x_S^2 + y_S^2\right) m = J_Z^S + r_S^2\,m$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Entsprechend folgt für die Deviationsmomente:

$$J_{xz}^{A}=-\int_{K} x\,z\,dm=-\int_{K} X\,Z\,dm-x_S\,z_S\,m=J_{XZ}^{S}-x_S\,z_S\,m$$

$$J_{yz}^{A}=-\int_{K} y\,z\,dm=-\int_{K} Y\,Z\,dm-y_S\,z_S\,m=J_{YZ}^{S}-y_S\,z_S\,m$$

- Ergebnis: (Satz von Steiner)

$$\boxed{\begin{array}{cccc} J_z^A & = & J_Z^S & + & \left(x_S^2+y_S^2\right)m \\ J_{xz}^A & = & J_{XZ}^S & - & x_S\,z_S\,m \\ J_{yz}^A & = & J_{YZ}^S & - & y_S\,z_S\,m \end{array}}$$

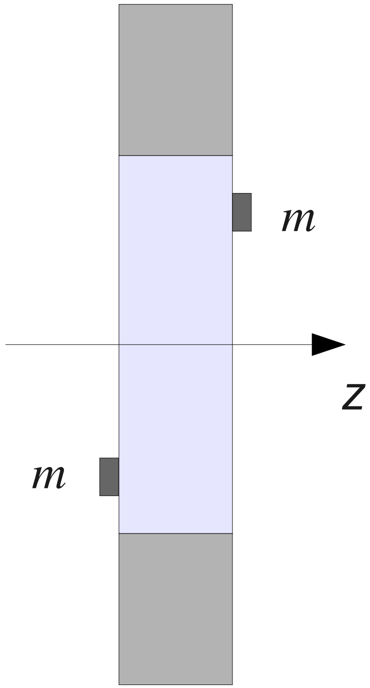
1.5 Zusammengesetzte Körper

- Massenpunkte:
  - Da ein Massenpunkt keine Ausdehnung hat, sind sein Massenträgheitsmoment und seine Deviationsmomente bezüglich dem Punkt, an dem er sich befindet, null.
  - Befindet sich der Massenpunkt am Punkt *P*, so folgt aus dem Satz von Steiner für das Massenträgheitsmoment und die Deviationsmomente bezüglich Punkt *A*:

$$
\begin{aligned}
J_z^A &= \left(x_P^2 + y_P^2 \right) m \\
J_{xz}^A &= -x_P z_P m \\
J_{yz}^A &= -y_P z_P m
\end{aligned}
$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Beispiel: Auswuchten
  - Durch Anbringen von zwei Ausgleichsmassen wird erreicht, dass das Rad statisch und dynamisch ausgewuchtet ist.
  - Die *x*- und *y*-Koordinaten der beiden Massen werden so bestimmt, dass der Schwerpunkt auf der Drehachse liegt und die beiden Zentrifugalmomente verschwinden.



1.5 Zusammengesetzte Körper

- Trägheitsradius:
  - Ein Massenpunkt der Masse m im Abstand i_z von der Drehachse hat das gleiche Massenträgheitsmoment wie ein starrer Körper der Masse m, wenn gilt:

$$m\, i_z^2 = J_z \rightarrow i_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}}$$

  - Der Abstand i_z heißt Trägheitsradius.
  - Beispiele:
    - Kreisscheibe:

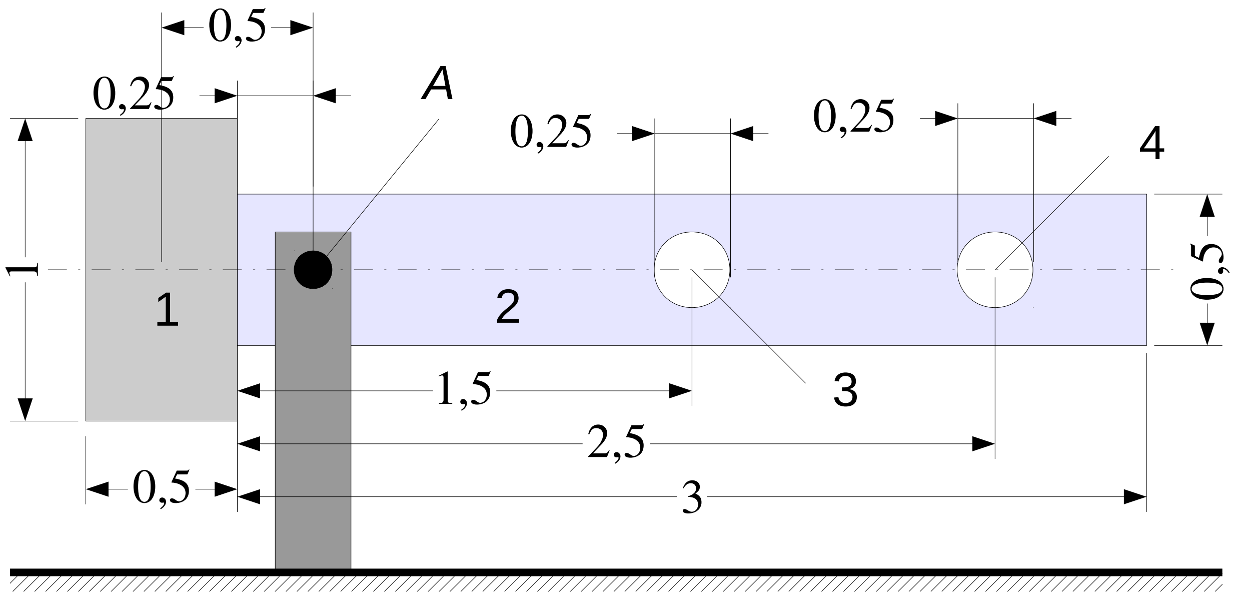
$$i_z = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

    - Rechteck:

$$i_z = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{3}}$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Beispiel: Schlagbaum



Dicke $h_1 = 0{,}2$

Alle Maße in m

Dicke $h_2 = 0{,}1$

Dichte $\rho = 2700\ \mathrm{kg/m^3}$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Zu berechnen ist das Massenträgheitsmoment des Schlagbaums um den Drehpunkt *A*.
- Der Schlagbaum besteht aus dem quaderförmigen Ausgleichsgewicht 1 und der quaderförmigen Schranke 2 mit den beiden kreisförmigen Löchern 3 und 4.
- Körper 1: Ausgleichsgewicht
  - Masse: $m_1 = 1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 2700\,\mathrm{kg/m^3} = \underline{270\,\mathrm{kg}}$
  - Massenträgheitsmoment bezogen auf Schwerpunkt:
    $$J_1^S = \frac{1}{12} \cdot 270\,\mathrm{kg} \cdot \left(1^2\,\mathrm{m}^2 + 0{,}5^2\,\mathrm{m}^2\right) = \underline{28{,}13\,\mathrm{kgm}^2}$$
  - Massenträgheitsmoment bezogen auf Drehpunkt:
    $$J_1^A = 28{,}13\,\mathrm{kgm}^2 + 0{,}5^2\,\mathrm{m}^2 \cdot 270\,\mathrm{kg} = \underline{95{,}63\,\mathrm{kgm}^2}$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Körper 2: Schranke ohne Löcher
  - Masse: $m_2 = 3\,\text{m} \cdot 0{,}5\,\text{m} \cdot 0{,}1\,\text{m} \cdot 2700\,\text{kg/m}^3 = \underline{405\,\text{kg}}$
  - Massenträgheitsmoment bezogen auf Schwerpunkt:

$$J_2^S = \frac{1}{12} \cdot 405\,\text{kg} \cdot \left(3^2\,\text{m}^2 + 0{,}5^2\,\text{m}^2 \right) = \underline{312{,}2\,\text{kgm}^2}$$

  - Massenträgheitsmoment bezogen auf Drehpunkt:

$$J_2^A = 312{,}2\,\text{kgm}^2 + \left(1{,}5 - 0{,}25 \right)^2\,\text{m}^2 \cdot 405\,\text{kg} = \underline{945\,\text{kgm}^2}$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Körper 3: Loch
  - Masse: $m_3 = \pi \cdot \left(\frac{0{,}25}{2}\right)^2 \mathrm{m}^2 \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 2700\,\mathrm{kg/m}^3 = \underline{13{,}25\,\mathrm{kg}}$
  - Massenträgheitsmoment bezogen auf Schwerpunkt:

$$J_3^S = \frac{1}{2} \cdot 13{,}25\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}125^2\,\mathrm{m}^2 = \underline{0{,}10\,\mathrm{kgm}^2}$$

  - Massenträgheitsmoment bezogen auf Drehpunkt:

$$J_3^A = 0{,}10\,\mathrm{kgm}^2 + (1{,}5 - 0{,}25)^2\,\mathrm{m}^2 \cdot 13{,}25\,\mathrm{kg} = \underline{20{,}81\,\mathrm{kgm}^2}$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Körper 4: Loch
  - Masse: $m_4 = m_3 = \underline{13{,}25\,\text{kg}}$
  - Massenträgheitsmoment bezogen auf Schwerpunkt:

$$J_4^S = J_3^S = \underline{0{,}10\,\text{kgm}^2}$$

  - Massenträgheitsmoment bezogen auf Drehpunkt:

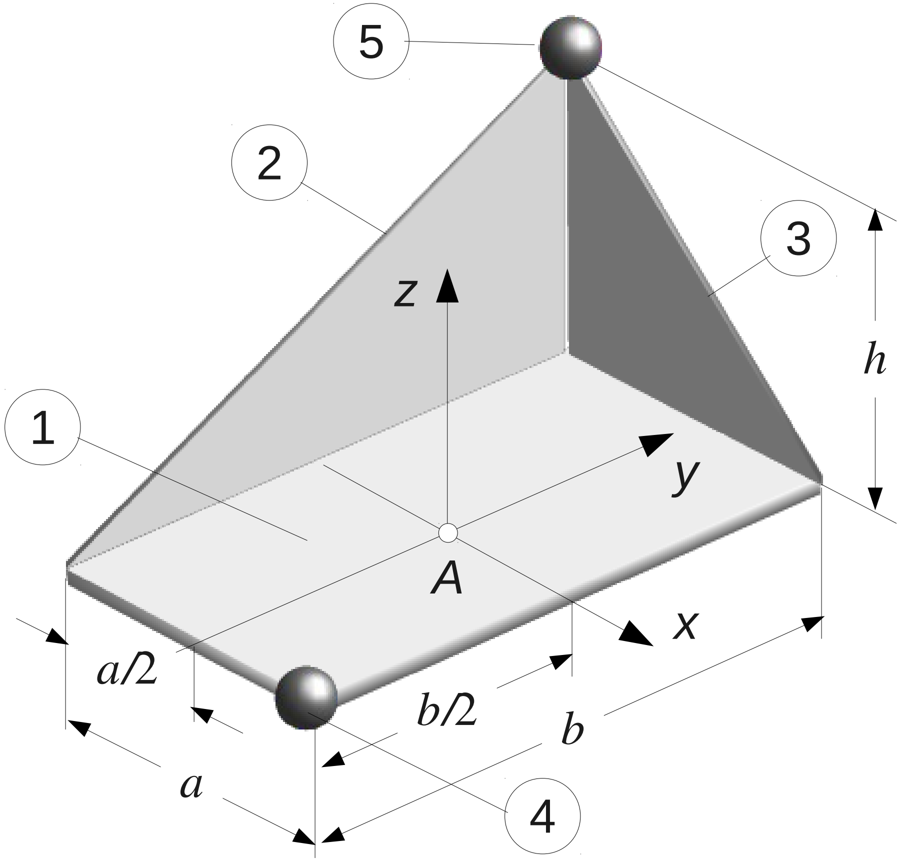
$$J_4^A = 0{,}10\,\text{kgm}^2 + (2{,}5 - 0{,}25)^2\,\text{m}^2 \cdot 13{,}25\,\text{kg} = \underline{67{,}20\,\text{kgm}^2}$$

- Gesamt: $J^A = J_1^A + J_2^A - J_3^A - J_4^A$

$$J^A = 95{,}63\,\text{kgm}^2 + 945\,\text{kgm}^2 - 20{,}81\,\text{kgm}^2 - 67{,}20\,\text{kgm}^2 = \underline{952{,}6\,\text{kgm}^2}$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Beispiel:
  - Der abgebildete Beschlag besteht aus den homogenen dünnen Platten konstanter Dicke 1 bis 3 und den beiden Massenpunkten 4 und 5.



1.5 Zusammengesetzte Körper

- Gegeben:
  - $a = 30$ cm, $b = 40$ cm, $h = 20$ cm
  - $m_1 = 9$ kg, $m_2 = 3{,}6$ kg, $m_3 = 2{,}7$ kg, $m_4 = m_5 = 20$ kg
- Gesucht:
  - Massenträgheitsmoment J^A_z und Deviationsmomente J^A_{xz} , J^A_{yz}
- Platte 1:
  - Momente bezüglich dem Schwerpunkt S_1 der Platte:

$$J^S_{1z} = \frac{m_1}{12}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{9\,\text{kg}}{12}\left(30^2 + 40^2\right)\text{cm}^2 = 1875\,\text{kgcm}^2$$

$$J^S_{1xz} = J^S_{1yz} = 0\,\text{kgcm}^2$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Da der Schwerpunkt S_1 mit dem Bezugspunkt A identisch ist, gilt: $J_{1z}^{A}=J_{1z}^{S}=1875\,\text{kgcm}^2,\quad J_{1xz}^{A}=J_{1yz}^{A}=0\,\text{kgcm}^2$

– Platte 2:

- Momente bezüglich dem Schwerpunkt S_2 der Platte:

$$J_{2z}^{S}=\frac{m_2 b^2}{18}=\frac{3{,}6\,\text{kg}\cdot 40^2\,\text{cm}^2}{18}=320\,\text{kgcm}^2$$

$$J_{2xz}^{S}=0\,\text{kgcm}^2,\quad J_{2yz}^{S}=-\frac{m_2 h b}{36}=-\frac{3{,}6\,\text{kg}\cdot 20\,\text{cm}\cdot 40\,\text{cm}}{36}=-80\,\text{kgcm}^2$$

- Schwerpunktskoordinaten:

$$x_{S_2}=-\frac{a}{2}=-15\,\text{cm},\quad y_{S2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)b=\frac{b}{6}=6{,}667\,\text{cm},\quad z_{S_2}=\frac{h}{3}=6{,}667\,\text{cm}$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Momente bezüglich Punkt *A*:

$$J_{2z}^{A}=J_{2z}^{S}+\left(x_{S_2}^2+y_{S_2}^2\right)m_2=\left(320+\left(15^2+6{,}667^2\right)\cdot 3{,}6\right)\mathrm{kgcm}^2=1290\,\mathrm{kgcm}^2$$

$$J_{2xz}^{A}=J_{2xz}^{S}-x_{S_2}z_{S_2}m_2=15\,\mathrm{cm}\cdot 6{,}667\,\mathrm{cm}\cdot 3{,}6\,\mathrm{kg}=360\,\mathrm{kgcm}^2$$

$$J_{2yz}^{A}=J_{2yz}^{S}-y_{S_2}z_{S_2}m_2=\left(-80-6{,}667\cdot 6{,}667\cdot 3{,}6\right)\mathrm{kgcm}^2=-240\,\mathrm{kgcm}^2$$

– Platte 3:

- Momente bezüglich dem Schwerpunkt S_3 der Platte:

$$J_{3z}^{S}=\frac{m_3 a^2}{18}=\frac{2{,}7\,\mathrm{kg}\cdot 30^2\,\mathrm{cm}^2}{18}=135\,\mathrm{kgcm}^2$$

$$J_{3xz}^{S}=\frac{m_3 h\, a}{36}=\frac{2{,}7\,\mathrm{kg}\cdot 20\,\mathrm{cm}\cdot 30\,\mathrm{cm}}{36}=45\,\mathrm{kgcm}^2,\quad J_{3yz}^{S}=0\,\mathrm{kgcm}^2$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Schwerpunktskoordinaten:

$$x_{S_3} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) a = -\frac{a}{6} = -5\,\mathrm{cm}\,, \quad y_{S_3} = \frac{b}{2} = 20\,\mathrm{cm}\,, \quad z_{S_3} = \frac{h}{3} = 6{,}667\,\mathrm{cm}$$

- Momente bezüglich Punkt *A*:

$$J_{3z}^{A} = J_{3z}^{S} + \left(x_{S_3}^2 + y_{S_3}^2 \right) m_3 = \left(135 + \left(5^2 + 20^2 \right) \cdot 2{,}7 \right) \mathrm{kgcm}^2 = 1282{,}5\ \mathrm{kgcm}^2$$

$$J_{3xz}^{A} = J_{3xz}^{S} - x_{S_3} z_{S_3} m_3 = \left(45 + 5 \cdot 6{,}667 \cdot 2{,}7 \right) \mathrm{kgcm}^2 = 135\ \mathrm{kgcm}^2$$

$$J_{3yz}^{A} = J_{3yz}^{S} - y_{S_3} z_{S_3} m_3 = -20\,\mathrm{cm} \cdot 6{,}667\,\mathrm{cm} \cdot 2{,}7\,\mathrm{kg} = -360\ \mathrm{kgcm}^2$$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Massenpunkt 4:
  - Koordinaten: $x_4 = \frac{a}{2} = 15\,\text{cm}\,,\quad y_4 = -\frac{b}{2} = -20\,\text{cm}\,,\quad z_4 = 0\,\text{cm}$
  - Momente bezüglich Punkt *A*:

$$J_{4z}^{A} = \left(x_4^2 + y_4^2\right) m_4 = \left(15^2 + 20^2\right) \text{cm}^2 \cdot 20\,\text{kg} = 12500\,\text{kgcm}^2$$

$$J_{4xz}^{A} = -x_4 z_4 m_4 = 0\,,\quad J_{4yz}^{A} = -y_4 z_4 m_4 = 0$$

- Massenpunkt 5:
  - Koordinaten: $x_5 = -\frac{a}{2} = -15\,\text{cm}\,,\quad y_5 = \frac{b}{2} = 20\,\text{cm}\,,\quad z_5 = h = 20\,\text{cm}$

1.5 Zusammengesetzte Körper

- Momente bezüglich Punkt *A*:

$$J_{5z}^{A}=\left(x_5^2+y_5^2\right)m_5=\left(15^2+20^2\right)\text{cm}^2\cdot 20\,\text{kg}=12500\,\text{kgcm}^2$$

$$J_{5xz}^{A}=-x_5 z_5 m_5=15\cdot 20\cdot 20\,\text{kgcm}^2=6000\,\text{kgcm}^2$$

$$J_{5yz}^{A}=-y_5 z_5 m_5=-20\cdot 20\cdot 20\,\text{kgcm}^2=-8000\,\text{kgcm}^2$$

- Gesamtstruktur:

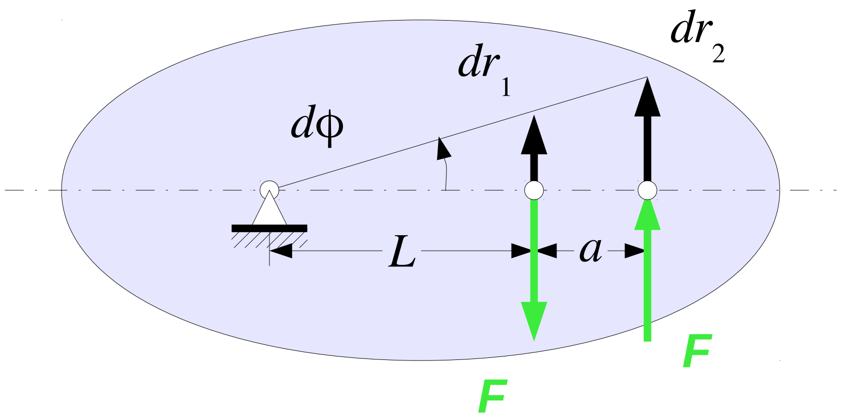
$$J_{z}^{A}=\left(1875+1290+1282{,}5+2\cdot 12500\right)\text{kgcm}^2=\underline{29450\,\text{kgcm}^2}$$

$$J_{xz}^{A}=\left(360+135+6000\right)\text{kgcm}^2=\underline{6495\,\text{kgcm}^2}$$

$$J_{yz}^{A}=\left(-240-360-8000\right)\text{kgcm}^2=\underline{-8600\,\text{kgcm}^2}$$

1.6 Arbeit und Energie

- Arbeit eines Kräftepaares:



$$dW = F\, dr_2 - F\, dr_1$$

$$dr_1 = L\, d\phi$$

$$dr_2 = (L + a)\, d\phi$$

$$dW = F\, a\, d\phi = M\, d\phi$$

$$\boxed{W_{AB} = \int_{\phi_A}^{\phi_B} M\, d\phi}$$

- Für die Leistung gilt:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M\, \omega}$$

1.6 Arbeit und Energie

- Kinetische Energie bei Rotation:
  - Kinetische Energie eines Massenelementes: $dE^K = \frac{1}{2} v^2 \, dm$
  - Mit $v^2 = \omega^2 \left(x^2 + y^2 \right)$ folgt: $dE^K = \frac{1}{2} \omega^2 \left(x^2 + y^2 \right) dm$
  - Integration über den Körper ergibt die gesamte kinetische Energie:

$$\boxed{E^K = \frac{1}{2} \int_K \left(x^2 + y^2 \right) dm \, \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2}$$

1.6 Arbeit und Energie

- Arbeitssatz:
  - Bei starren Bindungen verrichten die inneren Kräfte keine Arbeit.
  - Damit folgt aus dem Arbeitssatz für Massenpunktsysteme unmittelbar der Arbeitssatz für einen starren Körper, der um eine feste Achse rotiert:

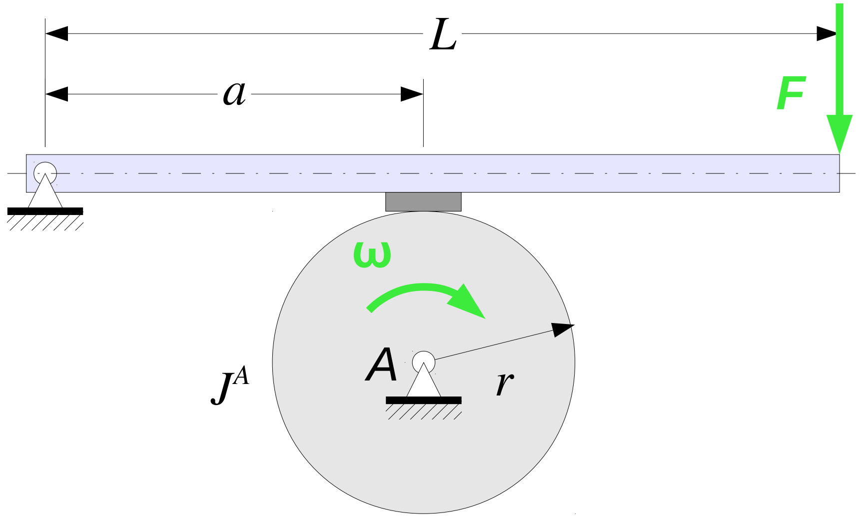
$$\boxed{E_B^K - E_A^K = W_{AB}}$$

1.6 Arbeit und Energie

- Die Differenz zwischen der kinetischen Energie zum Zeitpunkt *B* und der kinetischen Energie zum Zeitpunkt *A* ist gleich der während dieser Zeit vom resultierenden Moment der äußeren Kräfte verrichteten Arbeit.
- Der Arbeitssatz gilt auch für Systeme aus starren Körpern. Dabei ist über die kinetischen Energien aller Körper sowie über die an allen Körpern von den äußeren Kräften verrichteten Arbeiten zu summieren.

1.6 Arbeit und Energie

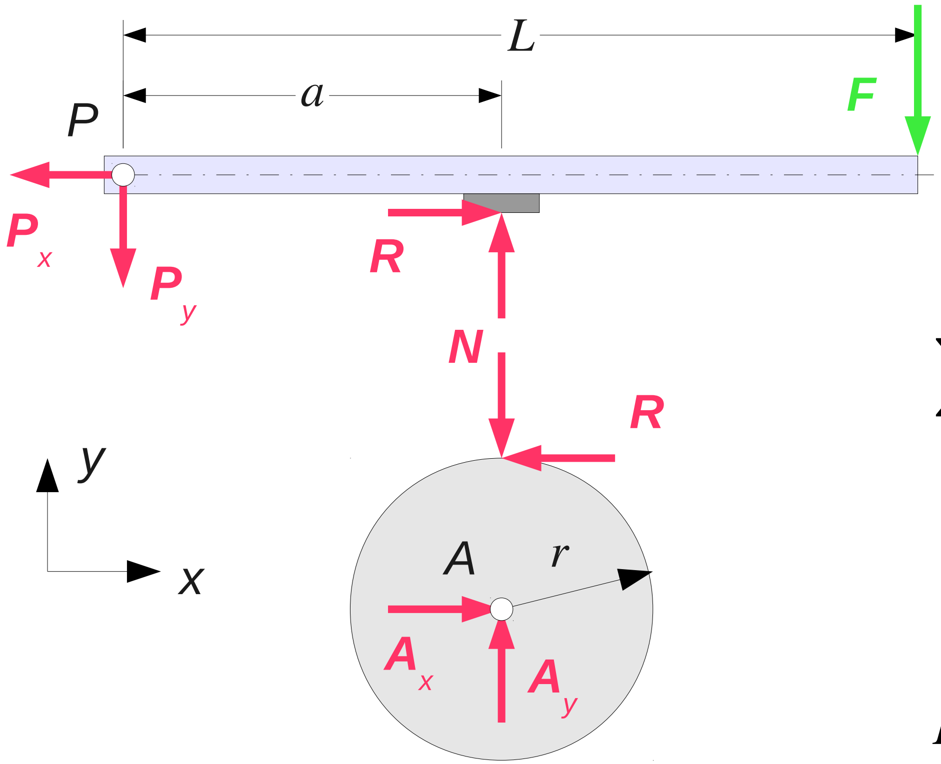
- Beispiel: Bremse
  - Die Trommel dreht sich zunächst mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 um den Punkt *A*.
  - Sie wird durch einen Bremshebel zum Stillstand gebracht.
  - Gegeben:
    - ω_0, F, J^A, a, L, r
    - Reibungskoeffizient μ



  - Gesucht:
    - Anzahl der Umdrehungen bis zum Stillstand

1.6 Arbeit und Energie

- Reibungskraft:



$$\sum M^P = 0: \quad a N - L F = 0$$

$$\rightarrow \quad N = \frac{L}{a} F$$

$$R = \mu N = \mu \frac{L}{a} F$$

1.6 Arbeit und Energie

- Kinetische Energie der Trommel:
  - Bei Bremsbeginn: $E_A^K = \frac{1}{2} J^A \omega_0^2$
  - Am Ende des Bremsvorgangs: $E_B^K = 0$
- Arbeit der äußeren Kräfte:
  - An der Trommel greift die konstante Reibkraft R an.
  - Zugehöriges Bremsmoment: $M = r\,R$
  - Arbeit des Bremsmoments: $W_{AB} = -M\,\phi_{AB}$
  - ϕ_{AB}: während des Bremsvorgangs überstrichener Winkel

1.6 Arbeit und Energie

- Arbeitssatz: $E_B^K - E_A^K = W_{AB}$

$$-\frac{1}{2} J^A \omega_0^2 = -M \phi_{AB} \rightarrow \phi_{AB} = \frac{J^A \omega_0^2}{2M} = \frac{J^A \omega_0^2 a}{2 r L \mu F}$$

- Während einer Umdrehung wird ein Winkel von 2π überstrichen.
- Daher gilt für die Anzahl der Umdrehungen bis zum Stillstand:

$$N_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{2\pi} = \frac{J^A \omega_0^2 a}{4\pi r L \mu F}$$

1.6 Arbeit und Energie

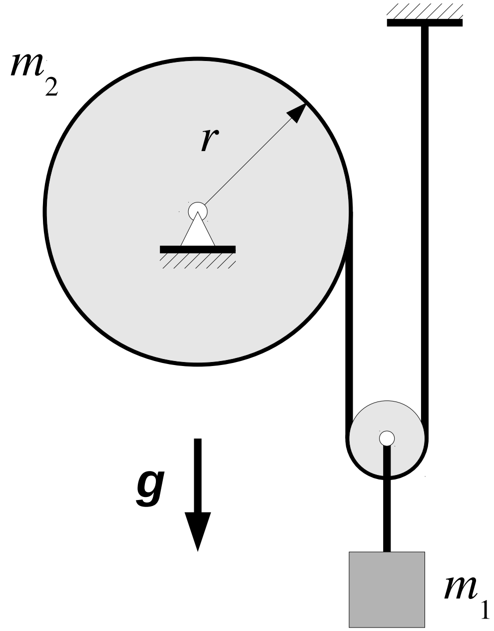
- Energieerhaltungssatz:
  - Wenn an einem starren Körper nur konservative Kräfte angreifen, dann gilt:

$$\boxed{E_B^K + E_B^P = E_A^K + E_A^P}$$

  - Der Satz gilt auch für ein System aus starren Körpern, zwischen denen starre Bindungen vorliegen.
  - Dabei ist über die kinetischen Energien aller Körper und die potenziellen Energien aller am System angreifenden konservativen Kräfte zu summieren.

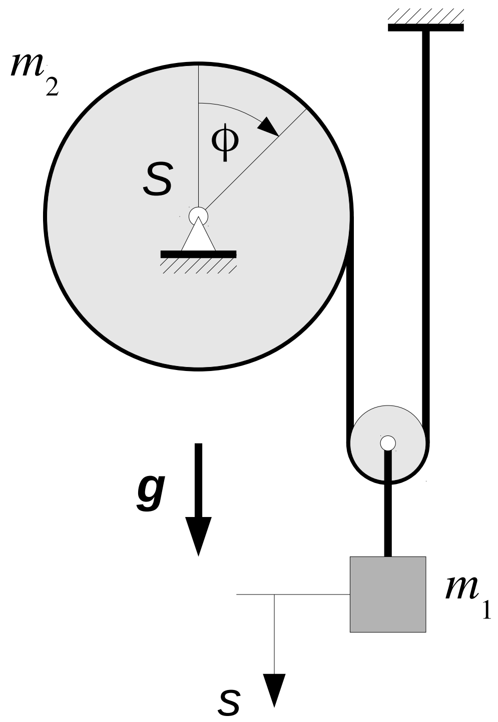
1.6 Arbeit und Energie

- Beispiel:
  - Auf einer homogenen Scheibe der Masse m_2 ist ein dehnstarres Seil aufgewickelt.
  - An dem Seil hängt über eine masselose Rolle die Masse m_1.
  - Das System ist anfangs in Ruhe.
  - Gesucht ist die Geschwindigkeit der Masse m_1 in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg.



1.6 Arbeit und Energie

- Zustand *A*: Ruhelage
- Zustand *B*: Ausgelenkte Lage
- Arbeit der äußeren Kräfte:
  - Die einzige äußere Kraft, die Arbeit verrichtet, ist die Gewichtskraft.
  - Als Bezugspunkt für die Lageenergie wird die Ruhelage gewählt.
- Koordinaten:
  - Der Weg s der Masse m_1 und der Winkel ϕ der Masse m_2 werden ab der Ruhelage gemessen.



1.6 Arbeit und Energie

- Energien:

		Zustand A	Zustand B
E^G	Masse 1	$E_{1A}^G = 0$	$E_{1B}^G = -m_1 g s$
E^K	Masse 1	$E_{1A}^K = 0$	$E_{1B}^K = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}^2$
	Scheibe 2	$E_{2A}^K = 0$	$E_{2B}^K = \frac{1}{2} J^S \dot{\phi}^2$

- Energieerhaltungssatz: $E_A^K + E_A^G = E_B^K + E_B^G$

$$0 = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{s}^2 + J^S \dot{\phi}^2\right) - m_1 g s$$

1.6 Arbeit und Energie

- Massenträgheitsmoment der Scheibe: $J^S = \frac{1}{2} m_2 r^2$
- Kinematik:
  - Die Änderung der freien Seillänge ist gleich der Länge des abgespulten Seils:

$$2s = r\phi \rightarrow \dot{\phi} = 2\frac{\dot{s}}{r}$$

- Einsetzen in den Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2}\left(m_1 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 \left(2\frac{\dot{s}}{r}\right)^2\right) - m_1 g s = 0$$

$$\rightarrow \left(m_1 + 2m_2\right)\dot{s}^2 = 2 m_1 g s \rightarrow v = \dot{s} = \sqrt{\frac{2 m_1 g s}{m_1 + 2 m_2}}$$

1.7 Massenpunkt und starrer Körper

Eindimensionale Bewegung des Massenpunkts		Rotierender starrer Körper	
Weg	s	Winkel	ϕ
Geschwindigkeit	$v=\dot{s}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega=\dot{\phi}$
Beschleunigung	$a=\dot{v}=\ddot{s}$	Winkelbeschleunigung	$\dot{\omega}=\ddot{\phi}$
Masse	m	Massenträgheitsmoment	J_z
Kraft	F	Moment	M_z

1.7 Massenpunkt und starrer Körper

Eindimensionale Bewegung des Massenpunkts		Rotierender starrer Körper	
Impuls	$p = m\,v$	Drall	$L_z = J_z\,\omega$
Impulssatz	$F = m\,\dot{v}$	Drallsatz	$M_z = J_z\,\dot{\omega}$
Kinetische Energie	$E^K = \frac{1}{2} m\,v^2$	Kinetische Energie	$E^K = \frac{1}{2} J_z\,\omega^2$
Arbeit	$dW = F\,ds$	Arbeit	$dW = M_z\,d\phi$
Leistung	$P = F\,v$	Leistung	$P = M_z\,\omega$