2. Allgemeine ebene Bewegung

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Schwerpunktsatz:
  - Aus dem Schwerpunktsatz für Massenpunktsysteme folgt unmittelbar der Schwerpunktsatz für den starren Körper:

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \boldsymbol{F}}$$

  - Der Schwerpunkt eines starren Körpers bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angriffen.
  - Für die Bewegung in der *xy*-Ebene gilt:

$$m\ddot{x}_S = \sum F_x$$
$$m\ddot{y}_S = \sum F_y$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

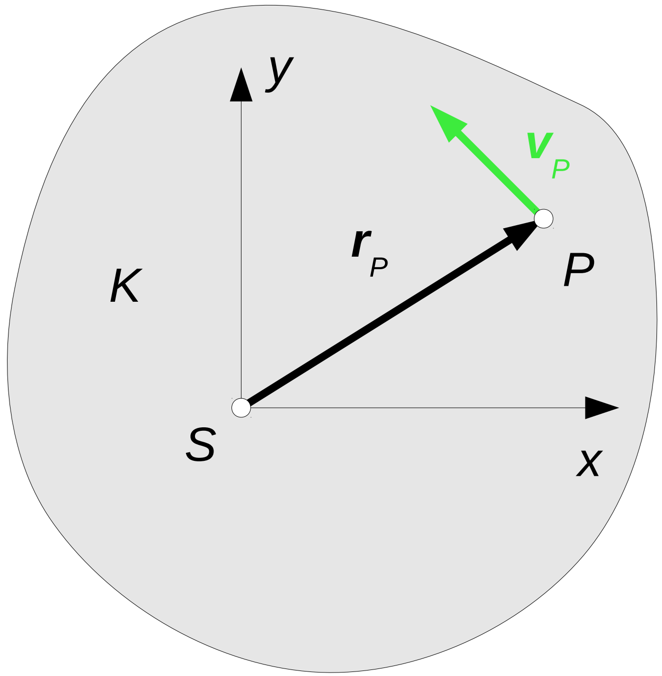
- Drallsatz:
  - Bei einer allgemeinen Bewegung des starren Körpers ist es vorteilhaft, als Bezugspunkt nicht einen ortsfesten Punkt, sondern den bewegten Schwerpunkt zu wählen.
  - Da der starre Körper als ein System von unendlich vielen starr verbundenen Massenelementen betrachtet werden kann, lautet der Drallsatz bezüglich des bewegten Schwerpunkts wie bei einem System von Massenpunkten:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}^S = \boldsymbol{M}^S}$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Berechnung des Dralls:
  - Zur Berechnung des Dralls wird ein <u>körperfestes</u> Koordinatensystem gewählt, das seinen Ursprung im Schwerpunkt hat.
  - Der Drall bezüglich des Schwerpunkts ist definiert durch

$$\boldsymbol{L}^S = \int_K \left(\boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{v}_P \right) dm$$



2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Mit $\boldsymbol{r_P} = x\,\boldsymbol{e_x} + y\,\boldsymbol{e_y} + z\,\boldsymbol{e_z}$ und $\boldsymbol{v_P} = v_{Px}\,\boldsymbol{e_x} + v_{Py}\,\boldsymbol{e_y}$ berechnet sich der Integrand wie im Falle der Rotation um eine feste Achse zu

$$\boldsymbol{r_P} \times \boldsymbol{v_P} = \left(x\,v_{Py} - y\,v_{Px} \right) \boldsymbol{e_z} + z\,v_{Px}\,\boldsymbol{e_y} - z\,v_{Py}\,\boldsymbol{e_x}$$

- Für die Geschwindigkeiten gilt: $v_{Px} = v_{Sx} - \omega\,y\,,\quad v_{Py} = v_{Sy} + \omega\,x$
- Damit folgt: $$\boldsymbol{r_P} \times \boldsymbol{v_P} = \left(x\,v_{Sy} + \omega\,x^2 - y\,v_{Sx} + \omega\,y^2 \right) \boldsymbol{e_z} + \left(z\,v_{Sx} - \omega\,z\,y \right) \boldsymbol{e_y} - \left(z\,v_{Sy} + \omega\,z\,x \right) \boldsymbol{e_x}$$

- Da der Ursprung des gewählten Koordinatensystems im Schwerpunkt liegt, gilt:

$$\int_K x\,dm = \int_K y\,dm = \int_K z\,dm = 0$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Damit führt die Integration auf

$$\boldsymbol{L}^S = \omega \left(\int_K \left(x^2 + y^2 \right) dm\, \boldsymbol{e}_z - \int_K x\, z\, dm\, \boldsymbol{e}_x - \int_K y\, z\, dm\, \boldsymbol{e}_y \right)$$
$$= \omega \left(J_z^S \boldsymbol{e}_z + J_{xz}^S \boldsymbol{e}_x + J_{yz}^S \boldsymbol{e}_y \right)$$

- Die zeitliche Änderung des Dralls berechnet sich wie im Falle der Rotation um eine feste Achse:

$$\left[\dot{\boldsymbol{L}}^S \right] = \begin{bmatrix} \dot{L}_x^S \\ \dot{L}_y^S \\ \dot{L}_z^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xz}^S \\ J_{yz}^S \\ J_z^S \end{bmatrix} \dot{\omega} + \begin{bmatrix} -J_{yz}^S \\ J_{xz}^S \\ 0 \end{bmatrix} \omega^2$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

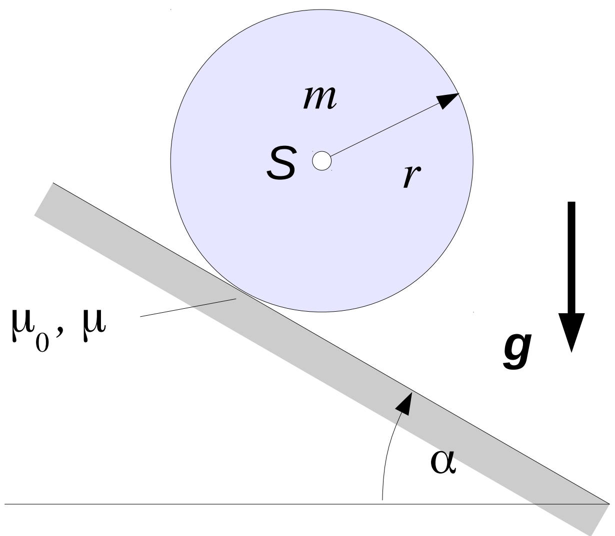
- Gleichungen für die ebene Bewegung des starren Körpers:

$$
\begin{aligned}
m\,\ddot{x}_S &= \sum F_x \\
m\,\ddot{y}_S &= \sum F_y \\
J_z^S\,\ddot{\phi} &= \sum M_z^S
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
M_x^S &= J_{xz}^S\,\ddot{\phi} - J_{yz}^S\,\dot{\phi}^2 \\
M_y^S &= J_{yz}^S\,\ddot{\phi} + J_{xz}^S\,\dot{\phi}^2
\end{aligned}
$$

  - Aus den drei Gleichungen auf der linken Seite kann die Bewegung ($x_S(t)$, $y_S(t)$, $\phi(t)$) ermittelt werden.
  - Mit den beiden Gleichungen auf der rechten Seite lassen sich die nötigen Führungsmomente berechnen.

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

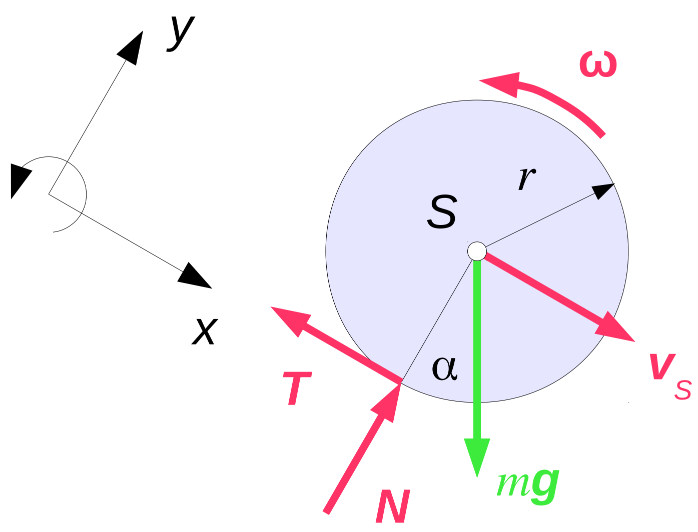
- Beispiel: Kugel auf schiefer Ebene



- Gegeben:
  - Homogene Kugel mit Masse m und Radius r
  - Winkel α
  - Haftungskoeffizient μ_0 und Gleitreibungskoeffizient μ
- Gesucht:
  - Beschleunigung des Schwerpunkts und Winkelbeschleunigung

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Kräfte an der freigeschnittenen Kugel:



- Massenträgheitsmoment:

$$J^S = \frac{2}{5} m r^2$$

- Schwerpunktsatz:

$$\sum F_x = m\, a_{Sx} \quad : \quad -T + m\, g \sin(\alpha) = m\, \dot{v}_S$$

$$\sum F_y = m\, a_{Sy} \quad : \quad N - m\, g \cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \quad N = m\, g \cos(\alpha)$$

- Drallsatz:

$$\sum M^S = J^S \dot{\omega} \quad : \quad -r\, T = J^S \dot{\omega}$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Für das Weitere muss unterschieden werden, ob die Kugel rollt oder gleitet.
- Rollen:
  - Mit der Rollbedingung $v_S = -r\omega$ → $\dot{\omega} = -\dfrac{\dot{v}_S}{r}$

    folgt aus dem Drallsatz: $T = -\dfrac{J^S}{r}\dot{\omega} = \dfrac{J^S}{r^2}\dot{v}_S$
  - Einsetzen in den Schwerpunktsatz in *x*-Richtung ergibt

$$m\dot{v}_S = -\frac{J^S}{r^2}\dot{v}_S + m g \sin(\alpha)$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Daraus folgt für die Beschleunigung des Schwerpunkts:

$$\dot{v}_S = \frac{m\, g \sin(\alpha)}{m + \frac{J^S}{r^2}} = \frac{g \sin(\alpha)}{1 + \frac{J^S}{m\, r^2}} = \frac{g \sin(\alpha)}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7}\, g \sin(\alpha)$$

- Für die benötigte Tangentialkraft folgt aus dem Drallsatz:

$$T = \frac{J^S}{r^2}\, \dot{v}_S = \frac{2}{5}\, m \cdot \frac{5}{7}\, g \sin(\alpha) = \frac{2}{7}\, m\, g \sin(\alpha)$$

- Die Haftbedingung lautet:

$$T = \frac{2}{7}\, m\, g \sin(\alpha) < \mu_0 N = \mu_0\, m\, g \cos(\alpha) \quad \rightarrow \quad \tan(\alpha) < \frac{7}{2}\, \mu_0$$

- Die Kugel rollt, wenn die Haftbedingung erfüllt ist.

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Gleiten:
  - Für $\tan(\alpha) > 7\mu_0/2$ gleitet die Kugel.
  - Das Gleitreibungsgesetz lautet: $T = R = \mu N = \mu m g \cos(\alpha)$
  - Einsetzen in den Schwerpunktsatz in *x*-Richtung ergibt:

$$m \dot{v}_S = m g \left(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)\right) \rightarrow \dot{v}_S = g \left(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)\right)$$

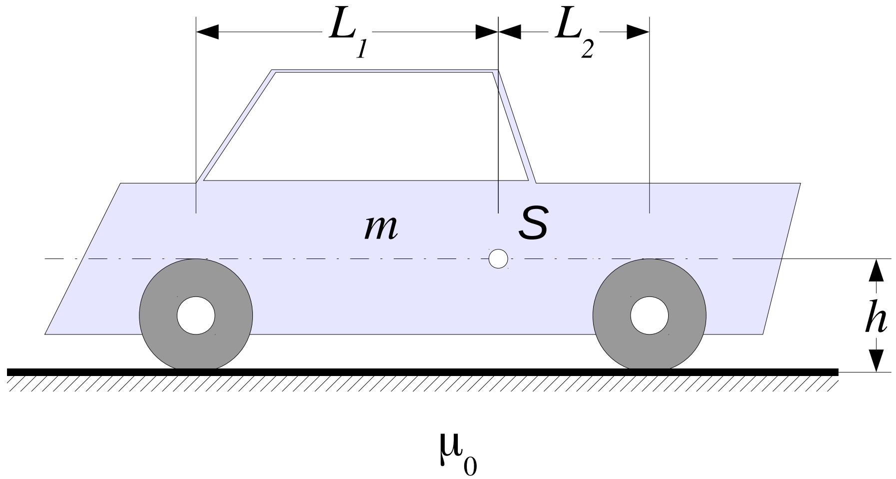
  - Der Drallsatz lautet:

$$\frac{2}{5} m r^2 \dot{\omega} = -r \mu m g \cos(\alpha) \rightarrow \dot{\omega} = -\frac{5}{2} \frac{\mu g}{r} \cos(\alpha)$$

  - Beim Gleiten sind Schwerpunktbeschleunigung und Winkelbeschleunigung nicht durch die Rollbedingung gekoppelt.

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

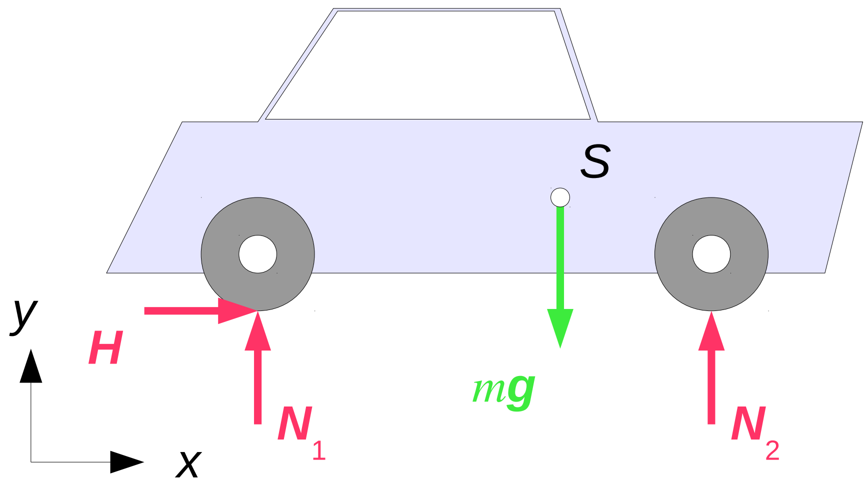
- Beispiel: Beschleunigendes Fahrzeug
  - Das Fahrzeug wird als starrer Körper der Masse m angesehen. Die Rotation der Räder wird vernachlässigt.
  - Gegeben:
    - $m,\ L_1$, L_2 und h
    - Haftungskoeffizient μ_0 zwischen Fahrbahn und Reifen



  - Gesucht
    - maximal mögliche Beschleunigung a bei Hinterradantrieb

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Schwerpunktsatz und Drallsatz:



$$\sum F_x = m\, a_{Sx} \quad : \quad H = m\, a \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad : \quad N_1 + N_2 - m\, g = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M^S = 0 \quad : \quad -L_1 N_1 + L_2 N_2 + h\, H = 0 \qquad (3)$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Aus den Gleichungen (2) und (3) lassen sich die Normalkräfte berechnen:

$$L_1 \cdot (2) + (3) \;\rightarrow\; \left(L_1 + L_2\right) N_2 = L_1 m g - h H \;\rightarrow\; N_2 = \frac{L_1 m g - h H}{L_1 + L_2}$$

$$L_2 \cdot (2) - (3) \;\rightarrow\; \left(L_1 + L_2\right) N_1 = L_2 m g + h H \;\rightarrow\; N_1 = \frac{L_2 m g + h H}{L_1 + L_2}$$

- Die Haftbedingung lautet: $H < \mu_0 N_1 = \mu_0 \dfrac{L_2 m g + h H}{L_1 + L_2}$

- Daraus folgt: $\left(L_1 + L_2 - \mu_0 h\right) H < \mu_0 L_2 m g \;\rightarrow\; H < \dfrac{\mu_0 L_2 m g}{L_1 + L_2 - \mu_0 h}$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

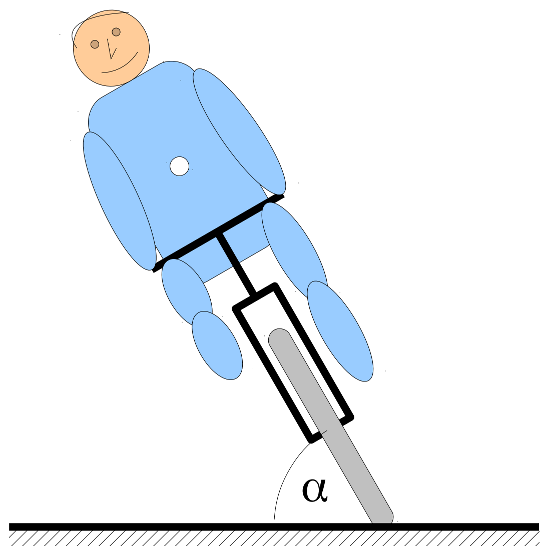
- Aus (1) folgt für die Beschleunigung:

$$a = \frac{H}{m} < \frac{\mu_0 L_2 g}{L_1 + L_2 - \mu_0 h}$$

- Dieses Ergebnis ist richtig, solange das Vorderrad nicht ab-hebt.
- Das Vorderrad hebt ab für $N_2 < 0$.

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

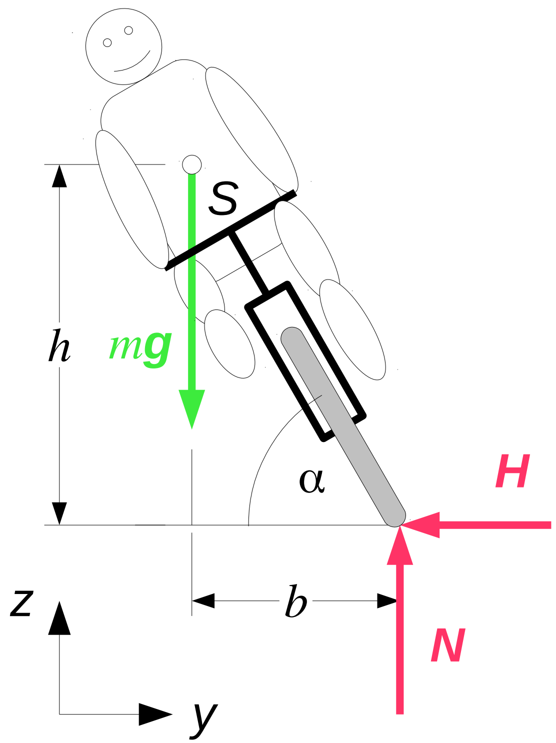
- Beispiel: Radfahrer in Kurve
  - Ein Radfahrer fährt durch eine Kurve.
  - Gegeben:
    - Geschwindigkeit v
    - Kurvenradius r
  - Gesucht:
    - Haftungskoeffizient μ_0
    - Neigungswinkel α
  - Der Drall der Räder wird vernachlässigt.



2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Die Beschleunigung des Schwerpunkts ist gleich der Zentripetalbeschleunigung:

$$a_{Sy} = -\frac{v^2}{r}$$



- Der Schwerpunktsatz lautet:

$$\sum F_y = m\,a_{Sy} \; : \; -H = -m\frac{v^2}{r}$$

$$\rightarrow \quad H = m\frac{v^2}{r}$$

$$\sum F_z = 0 \; : \; -m\,g + N = 0 \;\rightarrow\; N = m\,g$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Der mindestens nötige Haftungskoeffizient folgt aus der Haftbedingung:

$$H = m\frac{v^2}{r} < \mu_0 N = \mu_0 m g \;\rightarrow\; \mu_0 > \frac{v^2}{g r}$$

- Die Winkelgeschwindigkeit ist konstant: $\omega = \frac{v}{r}$
- Der Drallsatz lautet:

$$\sum M_x^S = -J_{yz}^S \omega^2 \;:\; b N - h H = -\frac{J_{yz}^S}{r^2} v^2$$

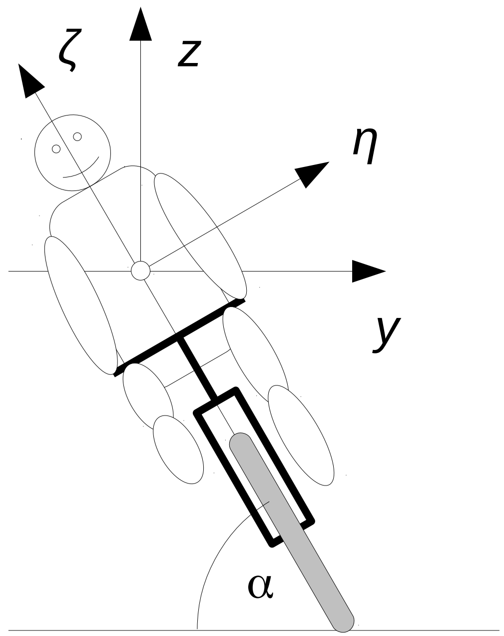
$$\rightarrow\; b m g + \frac{J_{yz}^S}{r^2} v^2 = h m \frac{v^2}{r}$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Zentrifugalmoment:
  - Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Radfahrer symmetrisch bezüglich der $\xi\zeta$-Ebene ist.
  - Dann gilt im gedrehten Koordinatensystem:

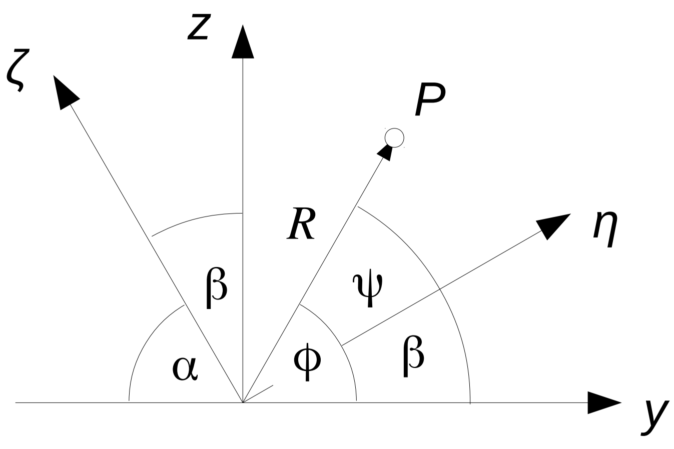
$$J^S_{\eta\zeta} = 0$$

  - Die Massenträgheitsmomente J^S_η und J^S_ζ für Drehungen um die η- bzw. ζ-Achse werden als bekannt vorausgesetzt.



2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Umrechnung der Koordinaten:



$$\beta = 90° - \alpha , \quad \phi = \psi + \beta$$

$$\eta = R\cos(\psi), \quad \zeta = R\sin(\psi)$$

$$y = R\cos(\phi), \quad z = R\sin(\phi)$$

$$y = R\cos(\psi+\beta) = R\left(\cos(\psi)\cos(\beta) - \sin(\psi)\sin(\beta)\right)$$
$$= \eta\cos(\beta) - \zeta\sin(\beta) = \eta\sin(\alpha) - \zeta\cos(\alpha)$$

$$z = R\sin(\psi+\beta) = R\left(\sin(\psi)\cos(\beta) + \cos(\psi)\sin(\beta)\right)$$
$$= \zeta\cos(\beta) + \eta\sin(\beta) = \zeta\sin(\alpha) + \eta\cos(\alpha)$$

$$yz = \left(\eta\sin(\alpha) - \zeta\cos(\alpha)\right)\left(\zeta\sin(\alpha) + \eta\cos(\alpha)\right)$$
$$= \left(\eta^2 - \zeta^2\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \eta\zeta\left(\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)\right)$$

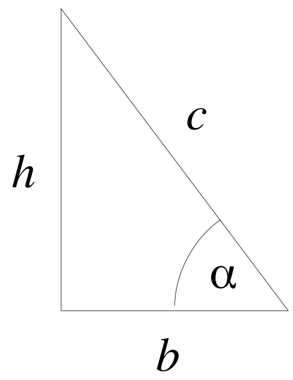
2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Mit $J^S_{\eta\zeta} = 0$ folgt für das Zentrifugalmoment:

$$J^S_{yz} = -\int_K y\,z\,dm = -\int_K \left(\eta^2 - \zeta^2\right) dm \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$= -\int_K \left[\left(\xi^2 + \eta^2\right) - \left(\xi^2 + \zeta^2\right)\right] dm \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$= -\left(J^S_\zeta - J^S_\eta\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

- Geometrie:

$$h = c\sin(\alpha)$$
$$b = c\cos(\alpha)$$



2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Neigungswinkel:
  - Aus dem Drallsatz folgt:

$$m\,g\,c\cos(\alpha)+\left(\frac{v}{r}\right)^2\left(J_\eta^S-J_\zeta^S\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha)=m\frac{v^2}{r}c\sin(\alpha)$$

$$\rightarrow\quad \frac{g\,r}{v^2}+\frac{J_\eta^S-J_\zeta^S}{r\,c\,m}\sin(\alpha)=\tan(\alpha)$$

  - Diese Gleichung kann nur iterativ gelöst werden.
  - Für $\dfrac{J_{S\eta}-J_{S\zeta}}{r\,c\,m}\ll\dfrac{g\,r}{v^2}$

ergibt sich die Näherung: $\dfrac{g\,r}{v^2}\approx\tan(\alpha)$

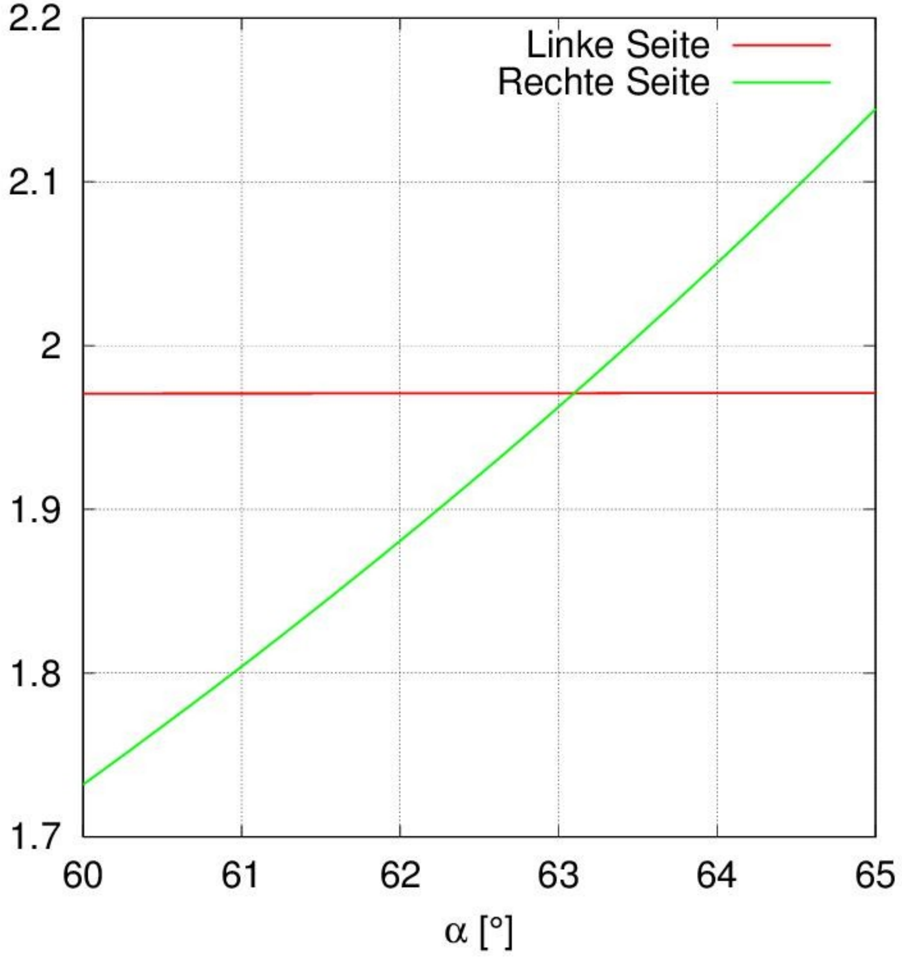
2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Zahlenwerte:
  - Mit $v = 10$ m/s, $r = 20$ m, $c = 1{,}2$ m, $m = 75$ kg, $J^S_\eta = 20$ kgm², $J^S_\zeta = 2$ kgm² berechnen sich die einzelnen Terme zu

$$\frac{g\,r}{v^2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 20\,\mathrm{m}}{10^2\,\mathrm{m^2/s^2}} = 1{,}962\,, \quad \frac{J^S_\eta - J^S_\zeta}{r\,c\,m} = \frac{(20-2)\,\mathrm{kgm^2}}{20\,\mathrm{m}\cdot 1{,}2\,\mathrm{m}\cdot 75\,\mathrm{kg}} = 0{,}01$$

  - Haftungskoeffizient: $\mu_0 > \dfrac{v^2}{g\,r} = \dfrac{1}{1{,}962} = 0{,}5097$
  - Neigungswinkel aus Näherung: $\tan(\tilde{\alpha}) = 1{,}962 \;\rightarrow\; \tilde{\alpha} = 62{,}99\,°$
  - Exakter Neigungswinkel: $\alpha = 63{,}10\,°$

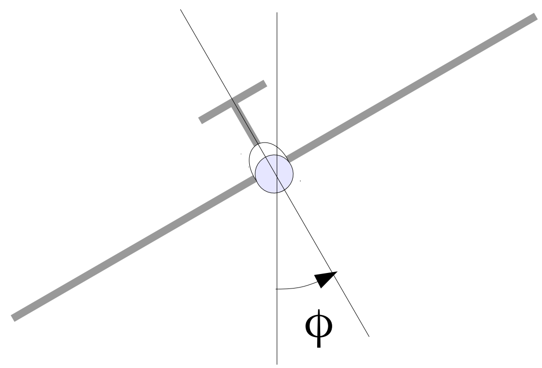
2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz



$$\frac{g\,r}{v^2}+\frac{J_\eta^S-J_\zeta^S}{r\,c\,m}\sin(\alpha)=\tan(\alpha)$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Beispiel: Segelflugzeug im Kreisflug
  - Ein Segelflugzeug fliegt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn.
  - Gegeben:
    - Bahngeschwindigkeit v
    - Kurvenradius r
  - Gesucht:
    - Neigungswinkel ϕ
    - Aerodynamische Kräfte und Momente

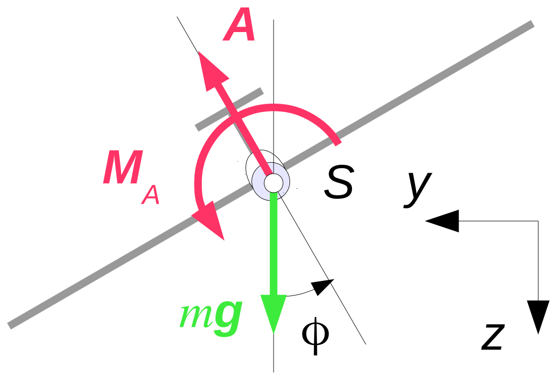


2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Schwerpunktsatz:

$$\sum F_y = m\, a_{Sy} \quad : \quad A \sin(\phi) = m\, a_{Sy} \qquad (1)$$

$$\sum F_z = 0 \quad : \quad m\, g - A \cos(\phi) = 0 \qquad (2)$$



- Drallsatz:

$$\sum M_x^S = -J_{yz}^S \omega^2 \quad : \quad M_A = -J_{yz}^S \omega^2 \qquad (3)$$

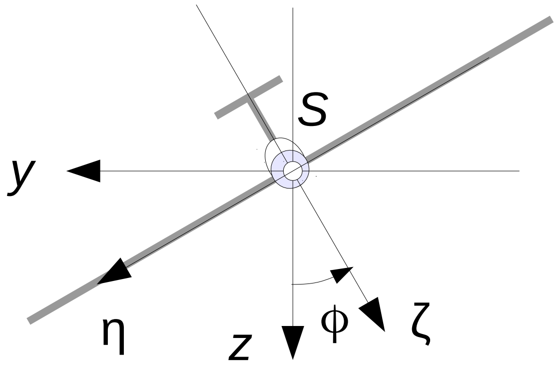
- Mit der Zentripetalbeschleunigung $a_{Sy} = \dfrac{v^2}{r}$

folgt: (1) → $A \sin(\phi) = m \dfrac{v^2}{r}$

(2) → $A \cos(\phi) = m\, g$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Auflösen nach ϕ und A ergibt: $\tan(\phi)=\dfrac{v^2}{r\,g}$, $A=m\sqrt{\dfrac{v^4}{r^2}+g^2}$
- Für die Winkelgeschwindigkeit gilt: $\omega=\dfrac{v}{r}$
- Zentrifugalmoment:
  - Gegeben sind die Massenträgheitsmomente J_η^S und J_ζ^S sowie das Zentrifugalmoment $J_{\eta\zeta}^S$.
  - Wegen der Symmetrie bezüglich der ξζ-Ebene gilt: $J_{\eta\zeta}^S=0$



2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Für die Koordinaten gilt (vgl. das Fahrrad-Beispiel):

$$y = \eta\cos(\phi) - \zeta\sin(\phi), \quad z = \eta\sin(\phi) + \zeta\cos(\phi)$$

- Mit $y\,z = \left(\eta\cos(\phi) - \zeta\sin(\phi)\right)\left(\eta\sin(\phi) + \zeta\cos(\phi)\right)$
  $= \left(\eta^2 - \zeta^2\right)\cos(\phi)\sin(\phi) + \eta\zeta\left(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)\right)$

  folgt für das gesuchte Zentrifugalmoment:

$$J_{yz}^S = -\int_K y\,z\,dm = \int_K \left(\zeta^2 - \eta^2\right) dm \sin(\phi)\cos(\phi)$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\phi)\int_K \left(\left(\zeta^2 + \xi^2\right) - \left(\xi^2 + \eta^2\right)\right) dm$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\phi)\left(J_\eta^S - J_\zeta^S\right)$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Einsetzen in den Drallsatz (3) ergibt:

$$M_A = \frac{1}{2}\sin(2\phi)\left(J_\zeta^S - J_\eta^S\right)\frac{v^2}{r^2}$$

- Typische Zahlenwerte:

$$v = 100\,\mathrm{km/h} = 27{,}78\,\mathrm{m/s}, \quad r = 100\,\mathrm{m}$$

$$m = 320\,\mathrm{kg}, \quad J_\eta^S = 600\,\mathrm{kgm}^2, \quad J_\zeta^S = 2100\,\mathrm{kgm}^2$$

$$\rightarrow \quad \tan(\phi) = \frac{27{,}78^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{100\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2} = 0{,}7867 \quad \rightarrow \quad \phi = 38{,}19\,°$$

$$A = 320\,\mathrm{kg}\cdot\sqrt{\frac{27{,}78^4\,\mathrm{m}^4/\mathrm{s}^4}{100^2\,\mathrm{m}^2} + 9{,}81^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^4} = 3994\,\mathrm{N}$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

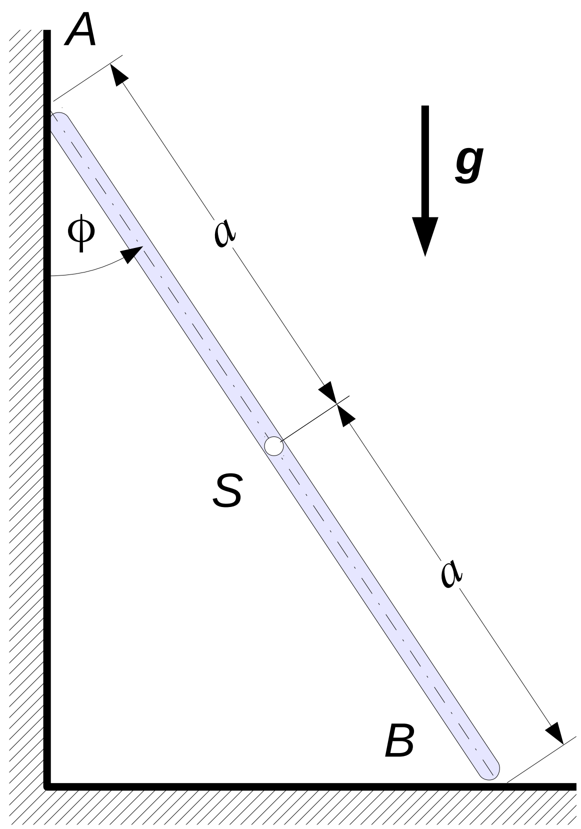
$$J_{yz}^{S}=\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot 38{,}19\,°\right)\left(600-2100\right)\text{kgm}^2=-728{,}9\,\text{kgm}^2$$

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{28{,}78\,\text{m/s}}{100\,\text{m}}=0{,}2778\,\frac{1}{\text{s}}$$

$$M_A=728{,}9\,\text{kgm}^2\cdot 0{,}2778^2\,\frac{1}{\text{s}^2}=56{,}25\,\text{Nm}$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Beispiel: Abgleitende Leiter
  - Die abgebildete Leiter gleitet in den Punkten *A* und *B*.
  - Gegeben:
    - Abmessung a
    - Masse m, Massenträgheitsmoment $J^S = m i_S^2$
    - Reibungskoeffizient μ
  - Gesucht:
    - Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}(\phi, \dot{\phi})$



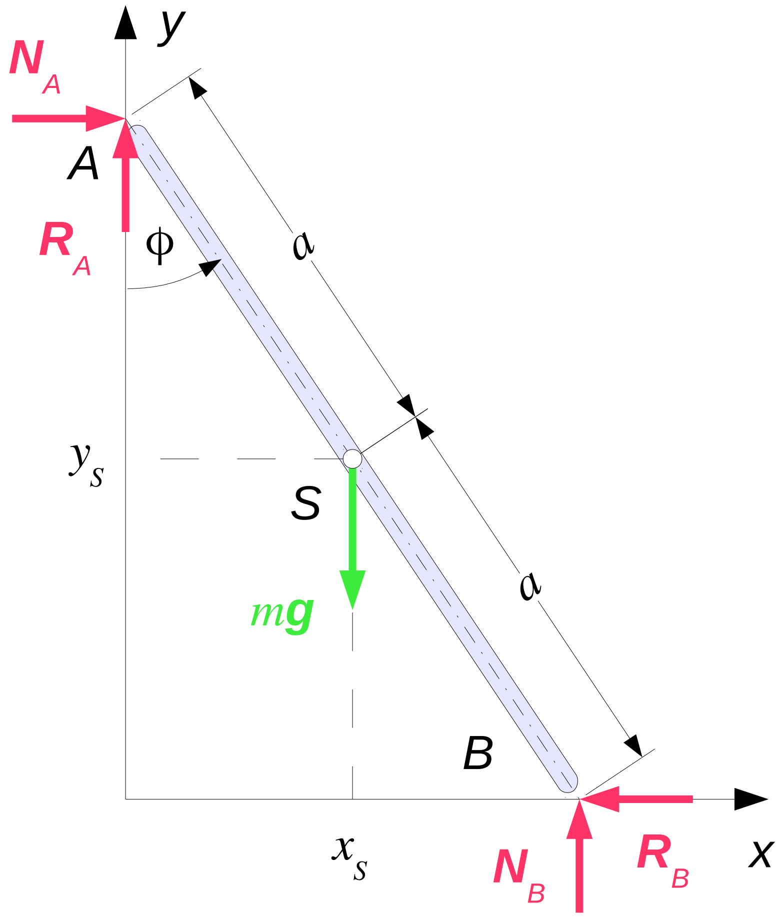
2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Kinematik:

$$x_S = a\sin(\phi)$$
$$y_S = a\cos(\phi)$$

$$\dot{x}_S = a\cos(\phi)\dot{\phi}$$
$$\dot{y}_S = -a\sin(\phi)\dot{\phi}$$

$$\ddot{x}_S = -a\left(\sin(\phi)\dot{\phi}^2 - \cos(\phi)\ddot{\phi}\right)$$
$$\ddot{y}_S = -a\left(\cos(\phi)\dot{\phi}^2 + \sin(\phi)\ddot{\phi}\right)$$



2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Kinetik:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_S \quad : \quad N_A - R_B = m\ddot{x}_S \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}_S \quad : \quad R_A - m g + N_B = m\ddot{y}_S \qquad (2)$$

$$\sum M^S = J^S\ddot{\phi} \quad : \quad -N_A a\cos(\phi) - R_A a\sin(\phi) + N_B a\sin(\phi) - R_B a\cos(\phi) = J^S\ddot{\phi} \qquad (3)$$

- Reibungsgesetze: $R_A = \mu N_A, \quad R_B = \mu N_B$
- Einsetzen der Reibungsgesetze in (1) und (2) ergibt:

$$\begin{array}{ccccc} N_A & - & \mu N_B & = & m\ddot{x}_S \\ \mu N_A & + & N_B & = & m(\ddot{y}_S + g) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} N_A = \dfrac{m}{1+\mu^2}\left(\ddot{x}_S + \mu\ddot{y}_S + \mu g\right) \\ N_B = \dfrac{m}{1+\mu^2}\left(\ddot{y}_S - \mu\ddot{x}_S + g\right) \end{array}$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Einsetzen der Kräfte in (3) führt auf:

$$-a\left(\ddot{x}_S+\mu\,\ddot{y}_S+\mu\,g\right)\left(\cos(\phi)+\mu\sin(\phi)\right)$$
$$+a\left(\ddot{y}_S-\mu\,\ddot{x}_S+g\right)\left(\sin(\phi)-\mu\cos(\phi)\right)=\left(1+\mu^2\right)\frac{J^S}{m}\ddot{\phi}$$

$$\rightarrow\ \left[\left(1-\mu^2\right)\sin(\phi)-2\mu\cos(\phi)\right]a\,g$$
$$=\left(1+\mu^2\right)i_S^2\,\ddot{\phi}+\left[\left(1-\mu^2\right)\cos(\phi)+2\mu\sin(\phi)\right]a\,\ddot{x}_S$$
$$-\left[\left(1-\mu^2\right)\sin(\phi)-2\mu\cos(\phi)\right]a\,\ddot{y}_S$$

- Mit den kinematischen Beziehungen folgt:

$$\left[\left(1-\mu^2\right)\sin(\phi)-2\mu\cos(\phi)\right]\frac{g}{a}=\left[\left(1+\mu^2\right)\frac{i_S^2}{a^2}+1-\mu^2\right]\ddot{\phi}-2\mu\,\dot{\phi}^2$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Auflösen nach $\ddot{\phi}$ ergibt:

$$\ddot{\phi}=\frac{\left[\left(1-\mu^2\right)\sin(\phi)-2\mu\cos(\phi)\right]\dfrac{g}{a}+2\mu\,\dot{\phi}^2}{\left(1+\mu^2\right)\left(\dfrac{i_S}{a}\right)^2+1-\mu^2}$$

- Diese Gleichung gilt, solange die Normalkräfte N_A und N_B positiv sind.
- Wird eine der Normalkräfte null, so löst sich der entsprechende Kontakt. Dann gelten andere kinematische und kinetische Beziehungen.

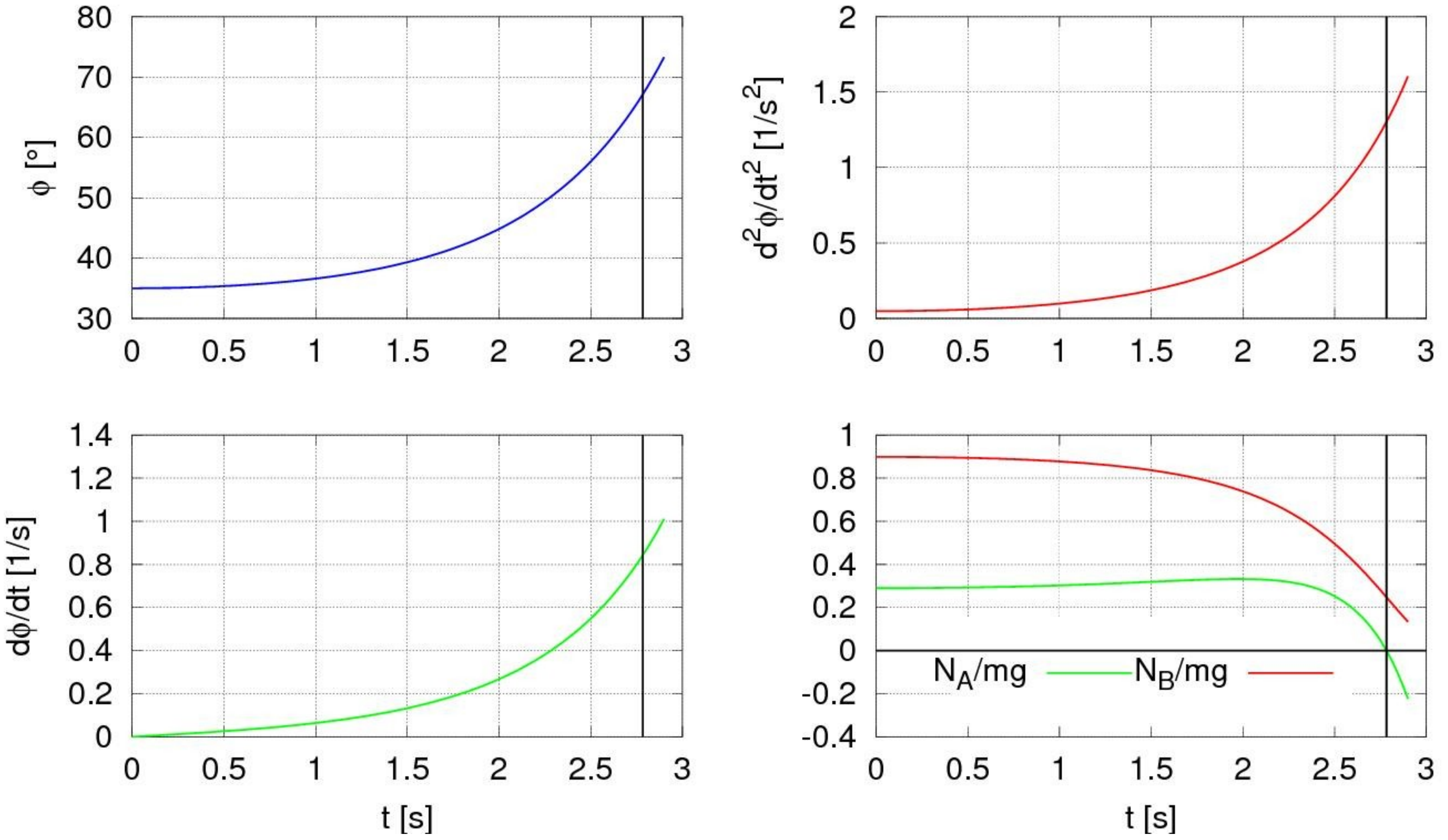
2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Die Leiter kann aus der Ruhelage zu gleiten beginnen, wenn gilt: $\ddot{\phi}(\phi_0, 0) > 0$
- Daraus folgt für den kritischen Winkel ϕ_0:

$$\left(1-\mu^2\right)\sin\left(\phi_0\right) > 2\mu\cos\left(\phi_0\right) \quad \rightarrow \quad \tan\left(\phi_0\right) > \frac{2\mu}{1-\mu^2}$$

- Zahlenwerte:
  - Die folgenden Diagramme zeigen die Ergebnisse für $a = 5$ m, $(i_S/a)^2 = 0{,}3$, $\mu = 0{,}3$ und $\phi_0 = 35°$.
  - Nach $2{,}78$ s löst sich der Kontakt im Punkt *A*. Ab diesem Zeitpunkt gelten die angegebenen Beziehungen nicht mehr.

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz



2.2 Arbeit und Energie

- Kinetische Energie:
  - Wie bei der Rotation um eine feste Achse gilt:

$$E^K = \frac{1}{2} \int_K v^2 \, dm$$

  - Das Quadrat der Geschwindigkeit berechnet sich jetzt zu

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ &= \left(v_{Sx} - \omega\, y \right)^2 + \left(v_{Sy} + \omega\, x \right)^2 \\ &= v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2 + \omega^2 \left(x^2 + y^2 \right) \\ &\quad - 2\, v_{Sx}\, \omega\, y + 2\, v_{Sy}\, \omega\, x \end{aligned}$$

  - Integration über den Körper ergibt:

$$E^K = \frac{1}{2} \left(v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2 \right) m + \frac{1}{2} \omega^2 \int_K \left(x^2 + y^2 \right) dm$$

  - Damit ist gezeigt:

$$\boxed{E^K = \frac{1}{2} m\, v_S^2 + \frac{1}{2} J_z^S \omega^2}$$

2.2 Arbeit und Energie

- Arbeitssatz:
  - Aus dem Arbeitssatz für Massenpunktsysteme mit starren Bindungen folgt unmittelbar der Arbeitssatz für den starren Körper:

$$\boxed{E_B^K - E_A^K = W_{AB}}$$

  - Die Differenz zwischen der kinetischen Energie zum Zeitpunkt *B* und der kinetischen Energie zum Zeitpunkt *A* ist gleich der in diesem Zeitraum von den äußeren Kräften verrichteten Arbeit.

2.2 Arbeit und Energie

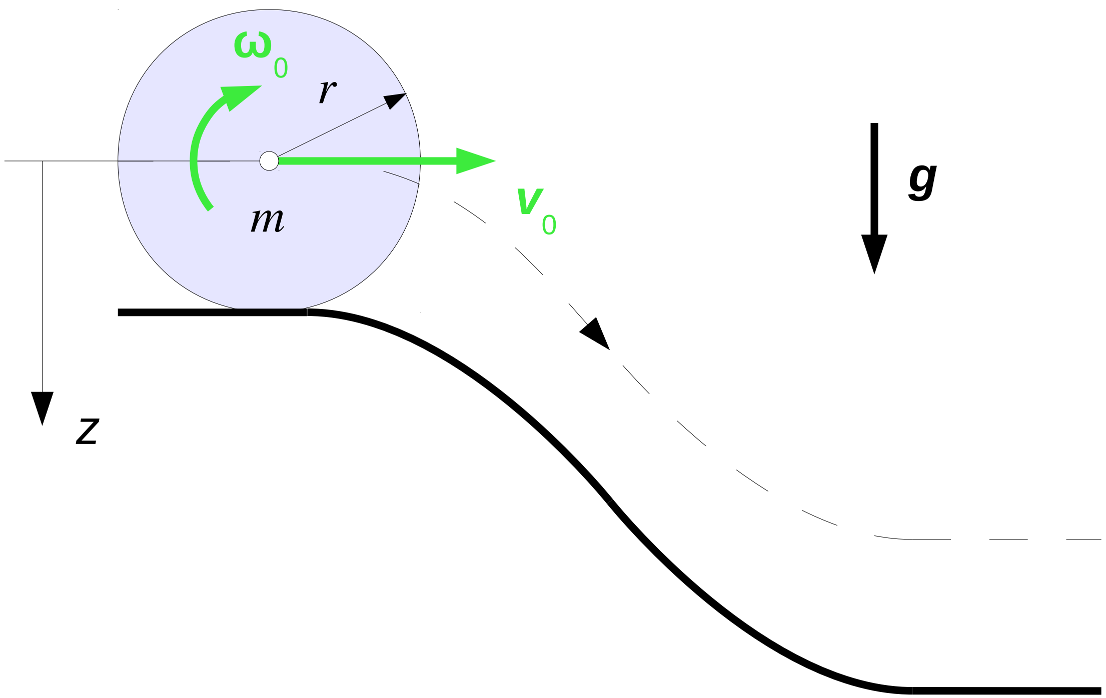
- Energieerhaltungssatz:
  - Wenn alle äußeren Kräfte konservative Kräfte sind, kann ihre Arbeit aus der potenziellen Energie berechnet werden.
  - Dann gilt:

$$\boxed{E_B^K + E_B^P = E_A^K + E_A^P}$$

  - Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist konstant.

2.2 Arbeit und Energie

- Beispiel: Rollende Kugel



– Aufgabenstellung:
  - Eine homogene Kugel mit Masse m und Radius r rollt einen Abhang hinunter.
  - Ihr Schwerpunkt hat die Anfangsgeschwindigkeit v_0.
  - Gesucht ist die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der vom Schwerpunkt zurückgelegten Höhendifferenz z.

2.2 Arbeit und Energie

- Massenträgheitsmoment der Kugel: $J^S = \frac{2}{5} m r^2$

- Rollbedingung: $\omega r = v \rightarrow \omega = \frac{v}{r}$

- Außer der Führungskraft wirkt nur die Gewichtskraft auf die Kugel. Die Gewichtskraft ist eine konservative Kraft. Daher kann der Energieerhaltungssatz angewendet werden.

- Kinetische Energie:

$$E_0^K = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{2}{5} r^2 \omega_0^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{2}{5} v_0^2 \right) = \frac{7}{10} m v_0^2$$

$$E^K(z) = \frac{7}{10} m v^2(z)$$

2.2 Arbeit und Energie

- Als Nullniveau für die Lageenergie wird der Ausgangspunkt gewählt.
- Dann gilt für die Lageenergie: $E_0^G = 0$, $E^G(z) = -mgz$
- Damit lautet der Energieerhaltungssatz:

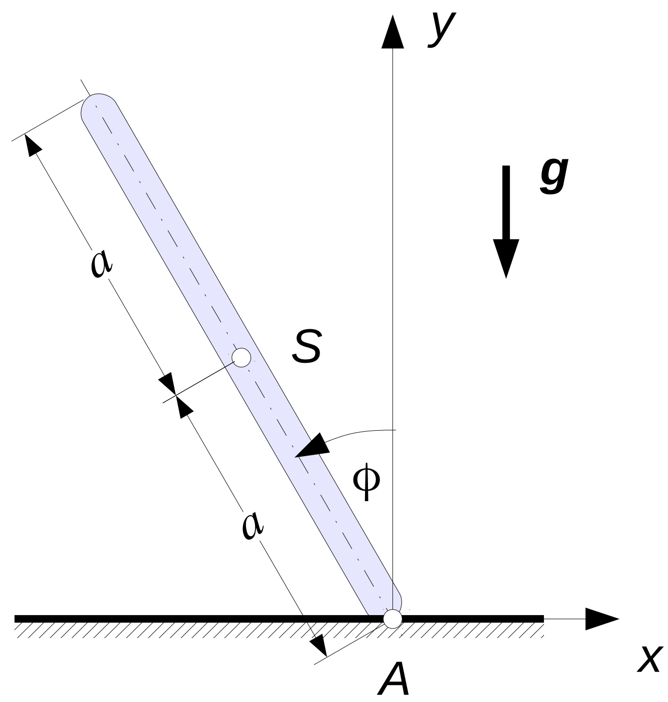
$$\frac{7}{10} m v^2(z) - mgz = \frac{7}{10} m v_0^2$$

- Daraus folgt für die Geschwindigkeit:

$$v^2(z) = v_0^2 + \frac{10}{7} g z \rightarrow v(z) = \sqrt{v_0^2 + \frac{10}{7} g z}$$

2.2 Arbeit und Energie

- Beispiel: Umfallender Stab
  - Ein homogener dünner Stab wird aus der Anfangslage (Winkel ϕ_0) aus der Ruhe losgelassen.
  - Zu untersuchen ist die sich einstellende Bewegung.
  - Gegeben:
    - $a = 0{,}5$ m, m, $J^S = ma^2/3$
    - $\mu = 0{,}4$, $\mu_0 = 0{,}8$, $\phi_0 = 30°$



2.2 Arbeit und Energie

- Der Vorgang besteht aus 2 Phasen:
  - Phase 1: Der Stab haftet im Punkt *A*.
  - Phase 2: Der Stab gleitet im Punkt *A*.
- Phase 1: Haften
  - Nur die Gewichtskraft verrichtet Arbeit. Diese Phase kann mit dem Energieerhaltungssatz untersucht werden. Das Nullniveau wird bei $y=0$ gewählt.
  - Zustand *A*: Ruhelage

$$E_A^K=0\,,\quad E_A^G=m\,g\,a\cos\left(\phi_0\right)$$

  - Zustand *B*: Ausgelenkte Lage

$$E_B^K=\frac{1}{2}m\,v_S^2+\frac{1}{2}J^S\dot{\phi}^2\,,\quad E_B^G=m\,g\,a\cos\left(\phi\right)$$

2.2 Arbeit und Energie

- Der Stab dreht sich um Punkt *A*: $v_S = a\dot{\phi}$
- Damit gilt für die kinetische Energie im Zustand *B*:

$$E_B^K = \frac{1}{2} m \left(a^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) \dot{\phi}^2 = \frac{2}{3} m a^2 \dot{\phi}^2$$

- Energieerhaltungssatz: $E_B^K + E_B^G = E_A^K + E_A^G$

$$\frac{2}{3} m a^2 \dot{\phi}^2 + m g a \cos(\phi) = m g a \cos(\phi_0)$$

$$\rightarrow \quad \dot{\phi}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{a} \left(\cos(\phi_0) - \cos(\phi) \right)$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} = \frac{3}{4} \frac{g}{a} \sin(\phi)$$

2.2 Arbeit und Energie

- Haftbedingung:
  - Schwerpunktsatz:

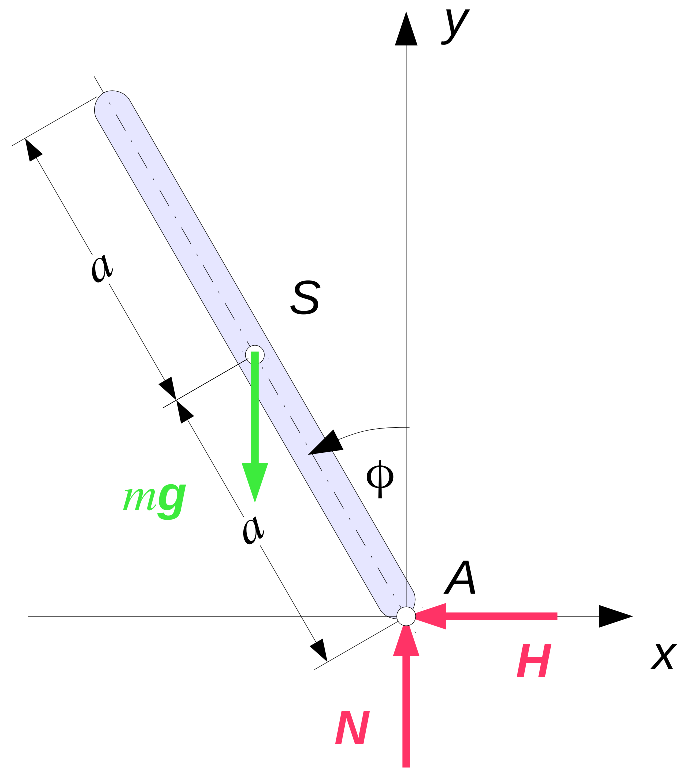
$$\sum F_x = m\ddot{x}_S \ : \ -H = m\ddot{x}_S$$
$$\rightarrow \ H = -m\ddot{x}_S$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}_S \ : \ N - mg = m\ddot{y}_S$$
$$\rightarrow \ N = m\left(\ddot{y}_S + g\right)$$

  - Kinematik:

$$x_S = -a\sin(\phi) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_S = -a\cos(\phi)\dot{\phi}$$
$$y_S = \ \ a\cos(\phi) \quad \quad \ \ \dot{y}_S = -a\sin(\phi)\dot{\phi}$$

$$\rightarrow \ \ddot{x}_S = a\left(\sin(\phi)\dot{\phi}^2 - \cos(\phi)\ddot{\phi}\right), \quad \ddot{y}_S = -a\left(\cos(\phi)\dot{\phi}^2 + \sin(\phi)\ddot{\phi}\right)$$



2.2 Arbeit und Energie

- Einsetzen für $\dot{\phi}^2$ und $\ddot{\phi}$ ergibt:

$$\ddot{x}_S = \frac{3}{4} g \left(2 \sin(\phi) \cos(\phi_0) - 2 \sin(\phi) \cos(\phi) - \cos(\phi) \sin(\phi)\right)$$

$$= \frac{3}{4} g \sin(\phi) \left(2 \cos(\phi_0) - 3 \cos(\phi)\right)$$

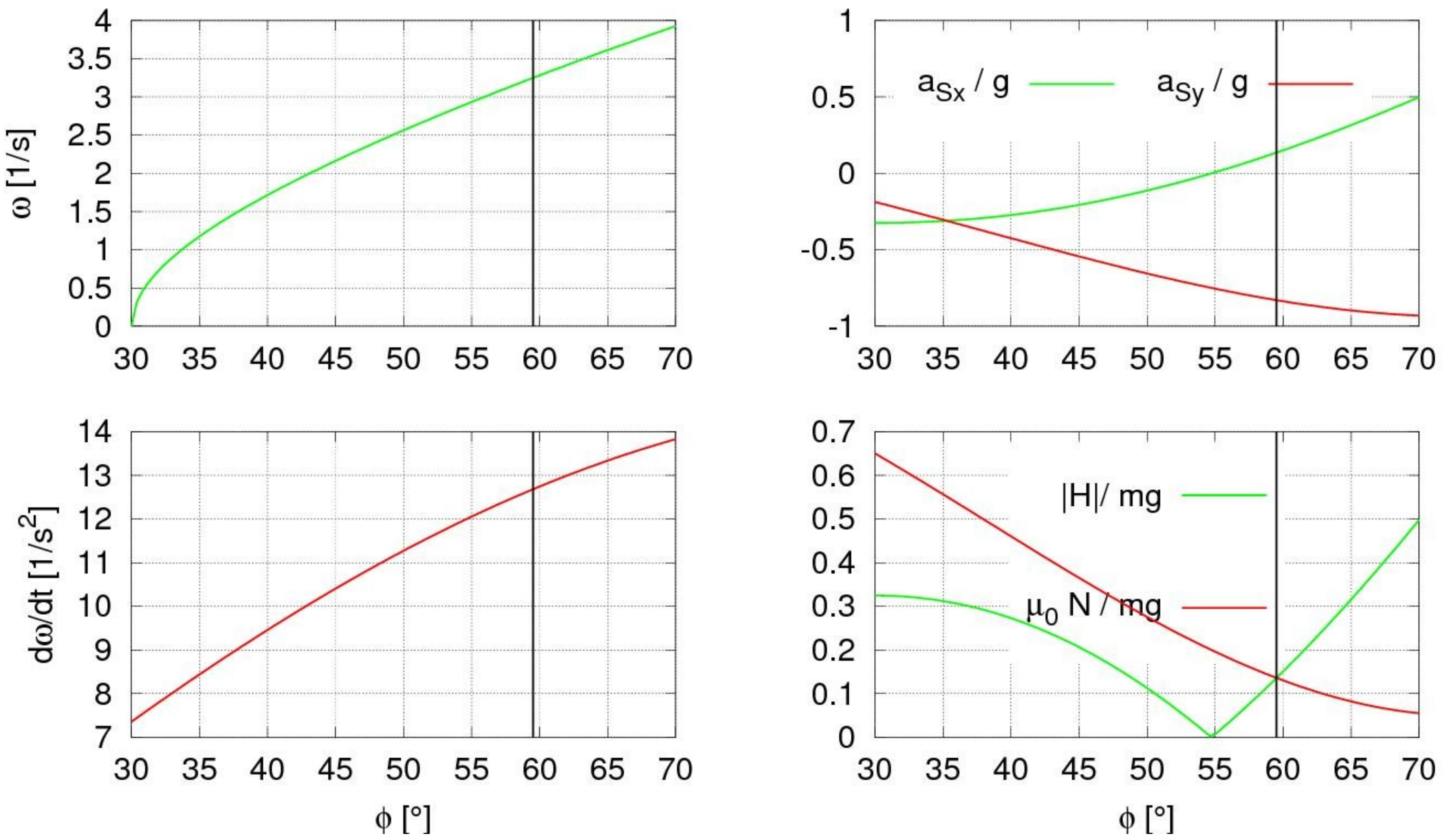
$$\ddot{y}_S = -\frac{3}{4} g \left(2 \cos(\phi) \cos(\phi_0) - 2 \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right)$$

- Damit folgt für die Haftkraft und die Normalkraft:

$$H = \frac{3}{4} m g \sin(\phi) \left(3 \cos(\phi) - 2 \cos(\phi_0)\right)$$

$$N = \frac{1}{4} m g \left(1 - 6 \cos(\phi) \cos(\phi_0) + 9 \cos^2(\phi)\right)$$

2.2 Arbeit und Energie



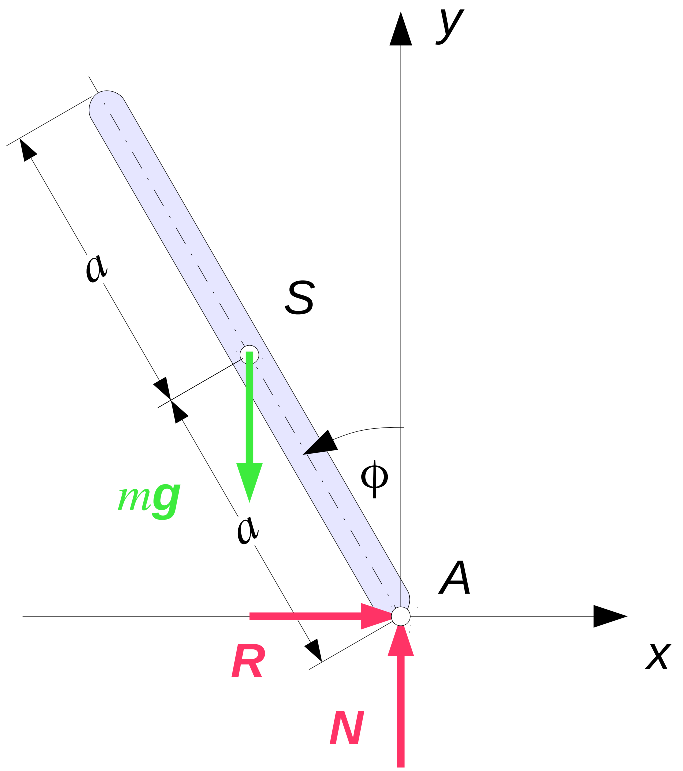
2.2 Arbeit und Energie

- Die Bahnbeschleunigung liefert einen positiven Beitrag zur Beschleunigung a_{Sx} und die Zentripetalbeschleunigung einen negativen. Ab einem Winkel von $54{,}7°$ wird die Beschleunigung positiv. Entsprechend ändert sich auch das Vorzeichen der Haftkraft.
- Gleiten beginnt für $|H| > \mu_0 N$.
- Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich für den Winkel, bei dem Gleiten einsetzt: $\phi_G = 59{,}5°$ (numerisch ermittelt)
- Bei diesem Winkel ist die Haftkraft negativ, d. h. sie ist nach rechts gerichtet.
- Es setzt also Gleiten nach links ein.

2.2 Arbeit und Energie

- Phase 2: Gleiten
  - Kinematik:

$$x_S = x_A - a\sin(\phi)$$
$$y_S = a\cos(\phi)$$
$$\dot{x}_S = \dot{x}_A - a\cos(\phi)\dot{\phi}$$
$$\dot{y}_S = -a\sin(\phi)\dot{\phi}$$
$$\ddot{x}_S = \ddot{x}_A + a\left(\sin(\phi)\dot{\phi}^2 - \cos(\phi)\ddot{\phi}\right)$$
$$\ddot{y}_S = -a\left(\cos(\phi)\dot{\phi}^2 + \sin(\phi)\ddot{\phi}\right)$$



  - Kinetik:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_S \;:\; R = m\ddot{x}_S$$
$$\sum F_y = m\ddot{y}_S \;:\; N - mg = m\ddot{y}_S$$

$$\sum M^S = J^S\ddot{\phi} \;:$$
$$\left(N\sin(\phi) + R\cos(\phi)\right)a = \frac{1}{3}ma^2\ddot{\phi}$$

2.2 Arbeit und Energie

- Reibungsgesetz: $R = \mu N$
- Einsetzen des Reibungsgesetzes in den Drallsatz ergibt:

$$\left(\sin(\phi) + \mu \cos(\phi)\right) N = \frac{1}{3} m a \ddot{\phi}$$

- Aus dem Schwerpunktsatz in *y*-Richtung folgt:

$$N = m\left(\ddot{y}_S + g\right)$$

- Einsetzen in den Drallsatz ergibt:

$$\left(\sin(\phi) + \mu \cos(\phi)\right)\left(\ddot{y}_S + g\right) = \frac{1}{3} a \ddot{\phi}$$

- Mit der kinematischen Beziehung folgt:

$$\left(\sin(\phi) + \mu \cos(\phi)\right)\left[g - a\left(\cos(\phi)\dot{\phi}^2 + \sin(\phi)\ddot{\phi}\right)\right] = \frac{1}{3} a \ddot{\phi}$$

2.2 Arbeit und Energie

- Auflösen nach der Winkelgeschwindigkeit ergibt:

$$\ddot{\phi}=\frac{3\left(g/a-\cos(\phi)\dot{\phi}^2\right)\left(\sin(\phi)+\mu\cos(\phi)\right)}{1+3\sin(\phi)\left(\sin(\phi)+\mu\cos(\phi)\right)}$$

- Damit kann auch die Normalkraft berechnet werden:

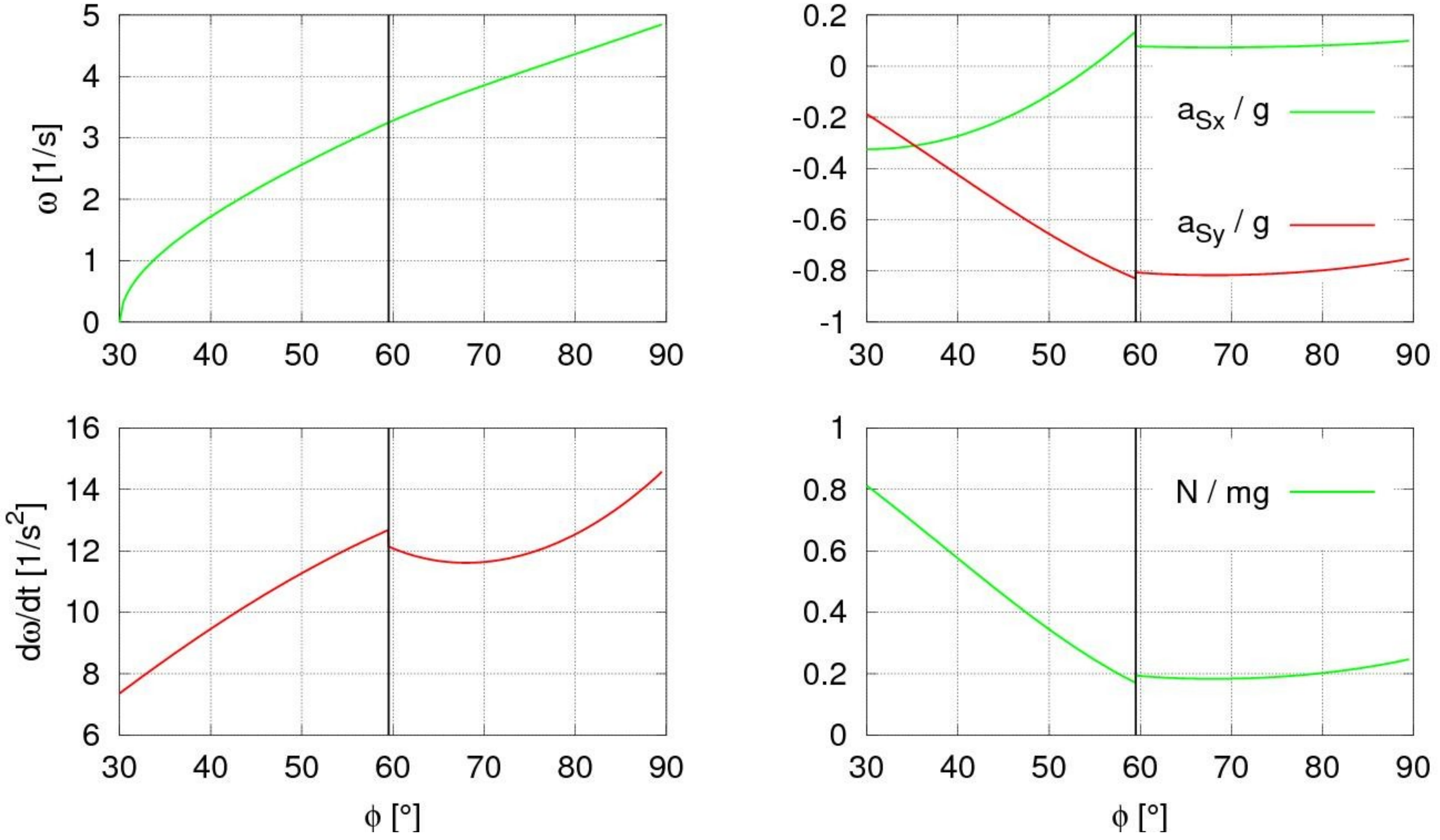
$$N=\frac{1}{3}\frac{m\,a\,\ddot{\phi}}{\sin(\phi)+\mu\cos(\phi)}$$

- Aus dem Schwerpunktsatz in *x*-Richtung folgt:

$$\ddot{x}_S=\mu\frac{N}{m}$$

$$\rightarrow\quad \ddot{x}_A=\mu\frac{N}{m}-a\left(\sin(\phi)\dot{\phi}^2-\cos(\phi)\ddot{\phi}\right)$$

2.2 Arbeit und Energie



2.2 Arbeit und Energie