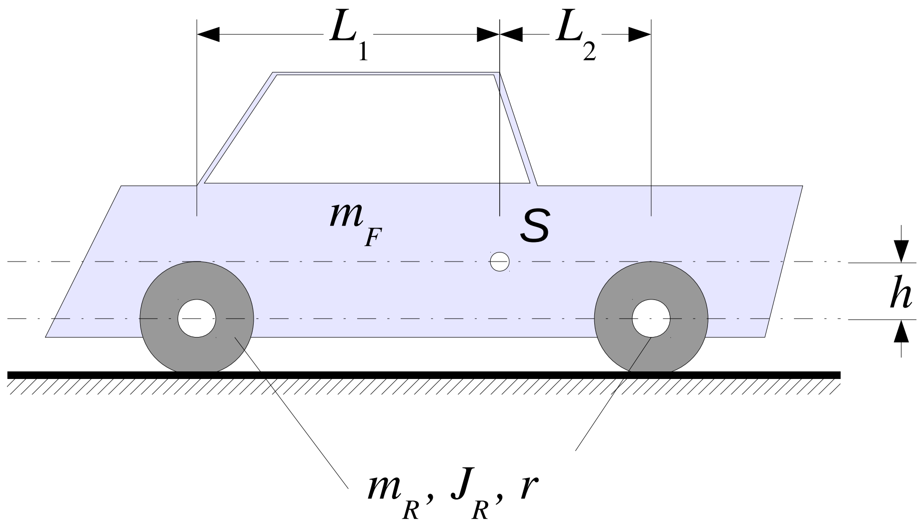
3. Systeme von starren Körpern

- Systeme von starren Körpern lassen sich folgendermaßen berechnen:
  - Die einzelnen starren Körper werden freigeschnitten.
  - Für jeden einzelnen Körper werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt.
  - Die kinematischen und physikalischen Bindungsgleichungen werden aufgestellt.
  - Die Gleichungen werden nach den gesuchten Größen aufgelöst.

3. Systeme von starren Körpern

- Beispiel 1: Beschleunigendes Fahrzeug
  - Es wird berücksichtigt, dass die Räder eine Masse haben und sich drehen.

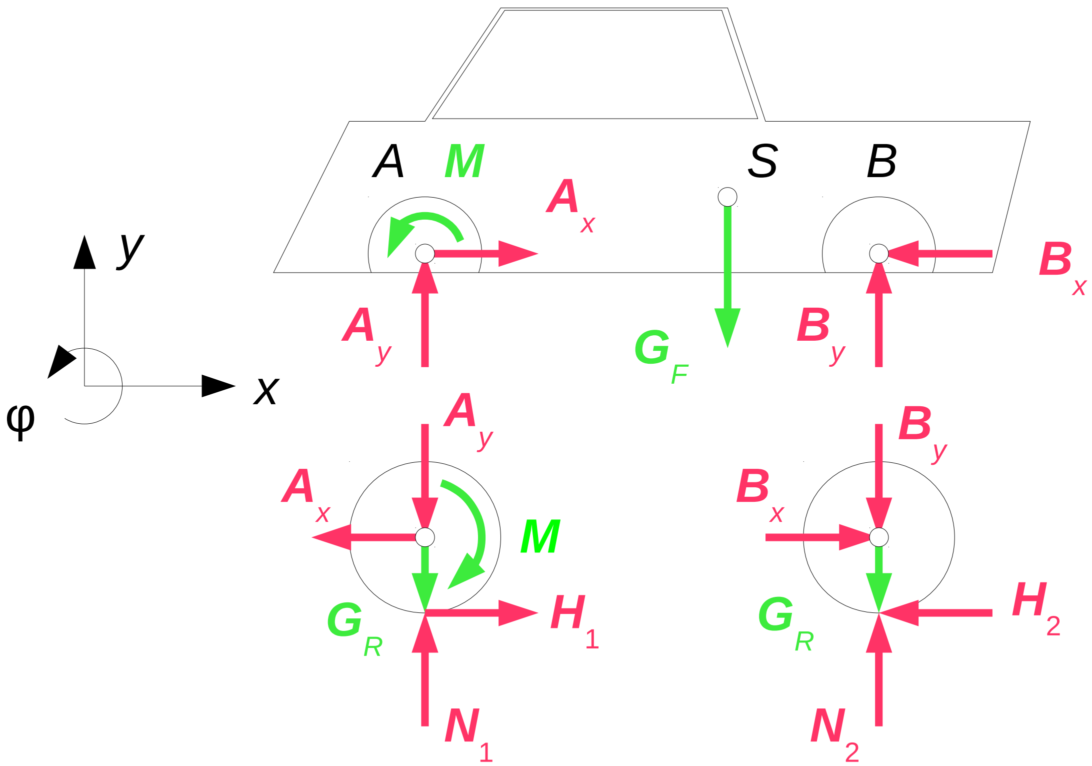


3. Systeme von starren Körpern

- Gegeben:
  - Das Fahrzeug ist ein starrer Körper der Masse m_F (ohne Räder).
  - Die Räder sind starre Körper mit der Masse m_R, dem Radius r und dem Massenträgheitsmoment J_R bezüglich dem Schwerpunkt.
  - An jedem der beiden Hinterräder greift ein Antriebsmoment M an.
- Gesucht:
  - Beschleunigung a des Fahrzeugs, wenn vorausgesetzt wird, dass die Räder rollen

3. Systeme von starren Körpern

- Freigeschnittenes System:



3. Systeme von starren Körpern

- Schwerpunktsatz und Drallsatz für das Fahrzeug:

$$\sum F_x = m\,a_x \;:\quad 2\left(A_x - B_x\right) = m_F\,a \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \;:\quad 2\left(A_y + B_y\right) - G_F = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M^S = 0 \;:\quad 2\,M + 2\,h\left(A_x - B_x\right) - 2\,L_1\,A_y + 2\,L_2\,B_y = 0 \qquad (3)$$

- Schwerpunktsatz und Drallsatz für das Hinterrad:

$$\sum F_x = m\,a_x \;:\quad -A_x + H_1 = m_R\,a \qquad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \;:\quad -A_y - G_R + N_1 = 0 \qquad (5)$$

$$\sum M^A = J^A\,\dot{\omega} \;:\quad -M + r\,H_1 = J_R\,\dot{\omega} \qquad (6)$$

3. Systeme von starren Körpern

- Schwerpunktsatz und Drallsatz für das Vorderrad:

$$\sum F_x = m a_x \;:\quad B_x - H_2 = m_R a \qquad (7)$$

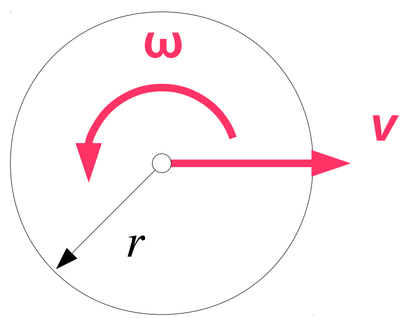
$$\sum F_y = 0 \;:\quad -B_y - G_R + N_2 = 0 \qquad (8)$$

$$\sum M^B = J^B \dot{\omega} \;:\quad -r H_2 = J_R \dot{\omega} \qquad (9)$$

- Kinematik: Rollbedingung für die Räder

$$v + \omega r = 0 \;\rightarrow\; \omega = -\frac{v}{r}$$

$$\rightarrow\; \dot{\omega} = -\frac{a}{r} \qquad (10)$$



3. Systeme von starren Körpern

- Auflösen nach der Beschleunigung:

(1) + 2 (4) + 2 (7) ➔ $2\left(H_1 - H_2\right) = \left(m_F + 4\, m_R\right) a$ (11)

(6) ➔ $r\, H_1 = M + J_R \dot{\omega} = M - J_R \dfrac{a}{r}$ ➔ $H_1 = \dfrac{M}{r} - J_R \dfrac{a}{r^2}$ (6')

(9) ➔ $r\, H_2 = -J_R \dot{\omega} = J_R \dfrac{a}{r}$ ➔ $H_2 = J_R \dfrac{a}{r^2}$ (9')

(6') und (9') in (11) ➔ $2\dfrac{M}{r} - 4\dfrac{J_R}{r^2} a = \left(m_F + 4\, m_R\right) a$

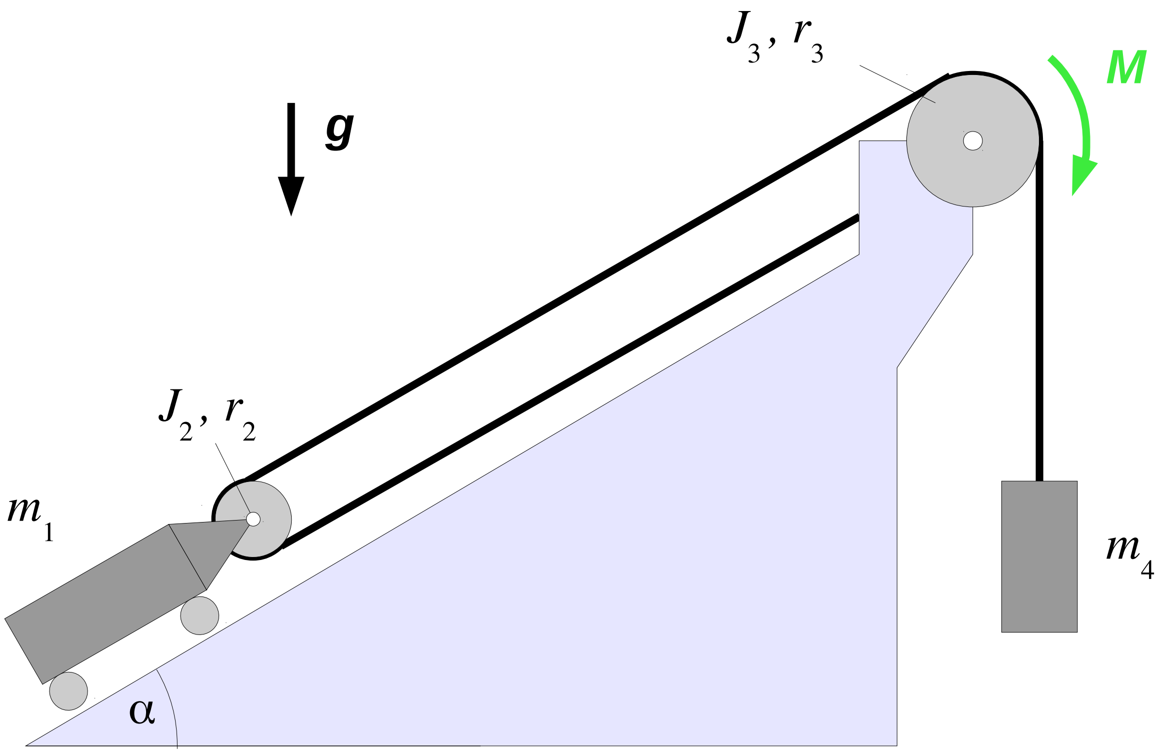
➔ $\left(m_F + 4\, m_R + 4\dfrac{J_R}{r^2}\right) a = 2\dfrac{M}{r}$ ➔ $a = \dfrac{2\, M / r}{m_F + 4\left(m_R + J_R / r^2\right)}$

3. Systeme von starren Körpern

- Wenn das System nach Berücksichtigung der kinematischen Bindungen nur noch einen Freiheitsgrad hat, kann die Bewegungsgleichung auch aus dem Arbeitssatz gewonnen werden.
- Lösungsweg:
  - Definition der kinematischen Größen
  - Aufstellen der kinematischen Bindungsgleichungen
  - Ermittlung der Ausdrücke für die Energien und Arbeiten
  - Ansetzen des Arbeitssatzes
  - Auflösen nach der gesuchten Größe

3. Systeme von starren Körpern

- Beispiel 2: Schrägaufzug



3. Systeme von starren Körpern

– Gegeben:

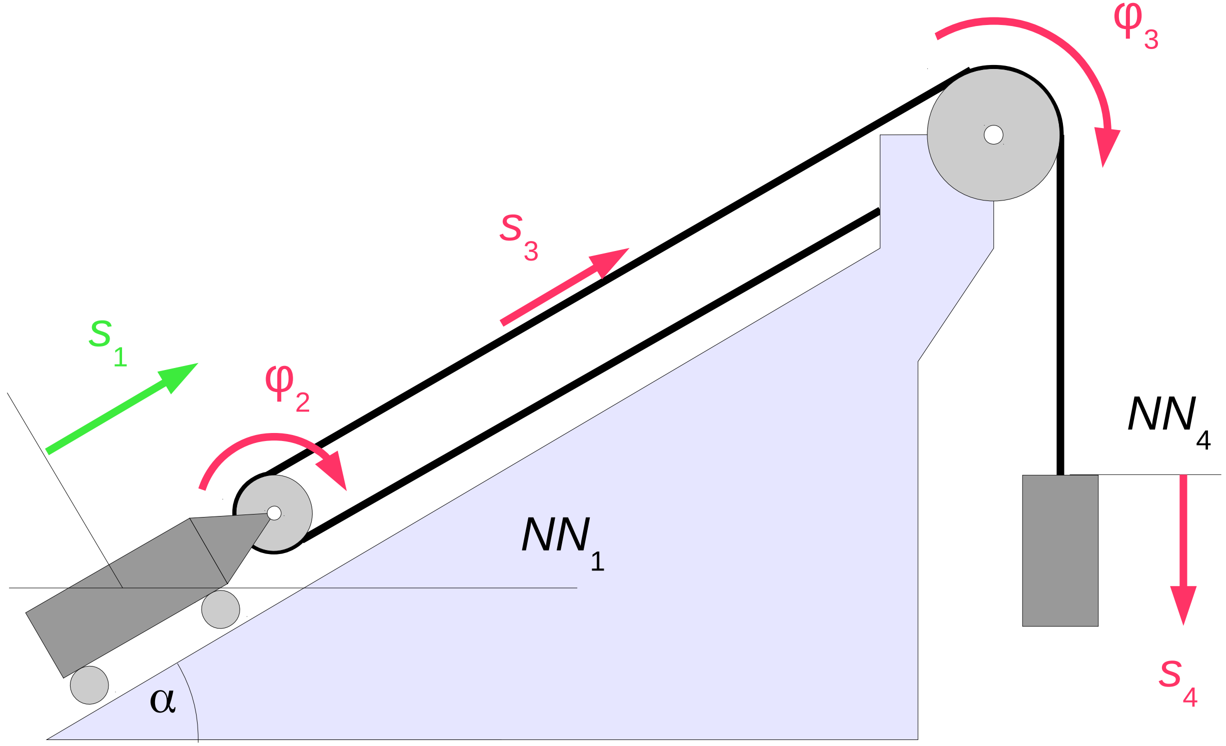
- Der Schrägaufzug mit der Gesamtmasse m_1 wird über eine Antriebstrommel mit dem Radius r_3 und dem Massenträgheitsmoment J_3 mit dem konstanten Moment M angetrieben.
- Die Massenträgheitsmomente der Laufräder können vernachlässigt werden.
- Die Umlenkrolle hat den Radius r_2 und das Massenträgheitsmoment J_2.
- Das Gegengewicht hat die Masse m_4.

3. Systeme von starren Körpern

- Gesucht:
  - Beschleunigung, mit der sich der Aufzug nach oben bewegt
- Lösungsweg:
  - Zunächst wird mit dem Arbeitssatz die wegabhängige Geschwindigkeit des Schrägaufzugs ermittelt.
  - Daraus kann dann die gesuchte Beschleunigung berechnet werden.

3. Systeme von starren Körpern

- Freiheitsgrade und Nullniveaus:



3. Systeme von starren Körpern

- Kinematische Bindungen:
  - Die Umlenkrolle rollt auf dem feststehenden unteren Seil:

$$\dot{s}_1 = v_1 = r_2 \omega_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{r_2} \qquad v_4 = v_3 = 2 v_1 \rightarrow s_4 = 2 s_1$$

$$\dot{s}_3 = v_3 = 2 r_2 \omega_2 = 2 v_1$$

  - Für die Antriebstrommel gilt:

$$v_4 = r_3 \omega_3 \rightarrow \omega_3 = \frac{v_4}{r_3} = 2 \frac{v_1}{r_3}, \quad \phi_3 = 2 \frac{s_1}{r_3}$$

- Energien:
  - Zustand *A*: Ruhelage: $s_1 = 0, v_1 = 0$
  - Zustand *B*: beliebige ausgelenkte Lage

3. Systeme von starren Körpern

		Zustand *A*	Zustand *B*
E^G	Aufzug	$E^G_{1A}=0$	$E^G_{1B}=m_1 g s_1 \sin(\alpha)$
	Gewicht	$E^G_{4A}=0$	$E^G_{4B}=-m_4 g s_4$
E^K	Aufzug	$E^K_{1A}=0$	$E^K_{1B}=\frac{1}{2} m_1 v_1^2$
	Umlenkrolle	$E^K_{2A}=0$	$E^K_{2B}=\frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$
	Trommel	$E^K_{3A}=0$	$E^K_{3B}=\frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$
	Gewicht	$E^K_{4A}=0$	$E^K_{4B}=\frac{1}{2} m_4 v_4^2$

3. Systeme von starren Körpern

- Arbeit des Antriebsmoments: $W_{AB}^{M}=M\,\phi_3$

- Arbeitssatz: $\left(E_B^K+E_B^G\right)-\left(E_A^K+E_A^G\right)=W_{AB}^{M}$

$$\frac{1}{2}\left(m_1\,v_1^2+J_2\,\omega_2^2+J_3\,\omega_3^2+m_4\,v_4^2\right)+m_1\,g\,s_1\sin(\alpha)-m_4\,g\,s_4=M\,\phi_3$$

- Einsetzen der kinematischen Bindungen ergibt:

$$\frac{1}{2}\left(m_1+\frac{J_2}{r_2^2}+4\frac{J_3}{r_3^2}+4\,m_4\right)v_1^2=\left(2\frac{M}{r_3}+2\,m_4\,g-m_1\,g\sin(\alpha)\right)s_1$$

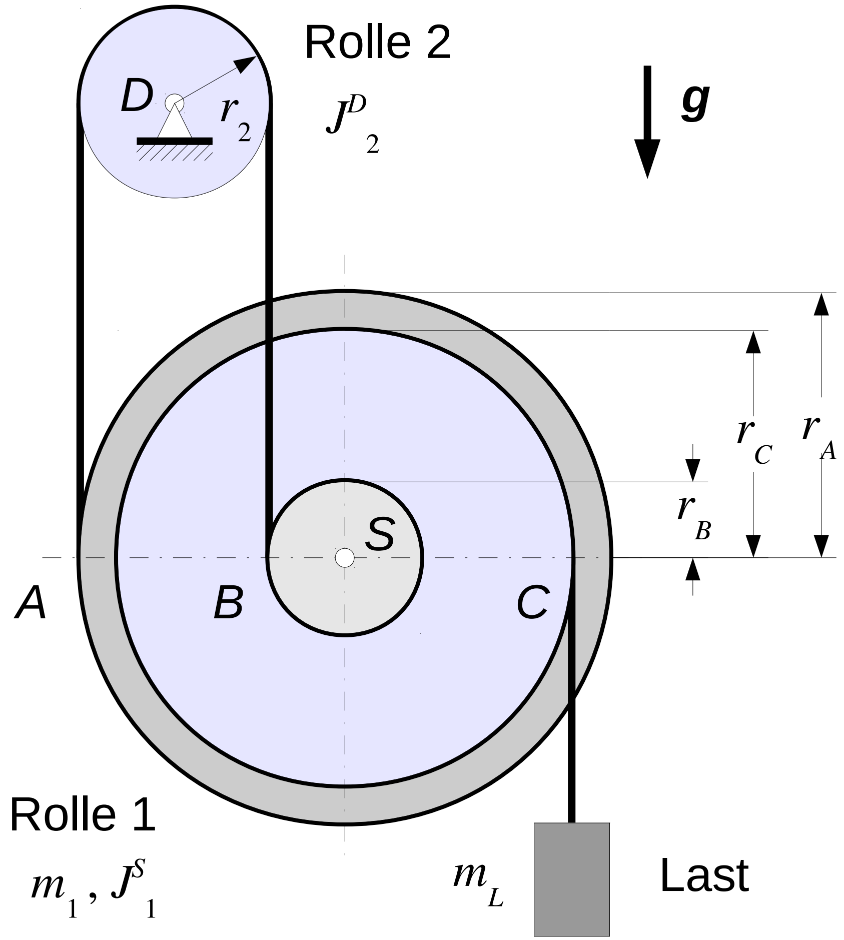
3. Systeme von starren Körpern

- Geschwindigkeit: $$v_1^2 = 2\,\frac{2\dfrac{M}{r_3} + 2\,m_4\,g - m_1\,g\sin(\alpha)}{m_1 + 4\,m_4 + \dfrac{J_2}{r_2^2} + 4\,\dfrac{J_3}{r_3^2}}\,s_1$$

- Beschleunigung: $$a_1 = \frac{1}{2}\,\frac{dv_1^2}{ds_1} = \frac{2\dfrac{M}{r_3} + 2\,m_4\,g - m_1\,g\sin(\alpha)}{m_1 + 4\,m_4 + \dfrac{J_2}{r_2^2} + 4\,\dfrac{J_3}{r_3^2}}$$

3. Systeme von starren Körpern

- Beispiel 3: Rollensystem
  - Die Rolle 1 ist von einem Seil umschlungen, das in den Punkten *A* und *B* abgespult wird und über die reibungsfrei gelenkig gelagerte Rolle 2 umgelenkt wird.
  - Eine Last der Masse m_L hängt an einem Seil, das im Punkt *C* von der Rolle 1 abgespult wird.

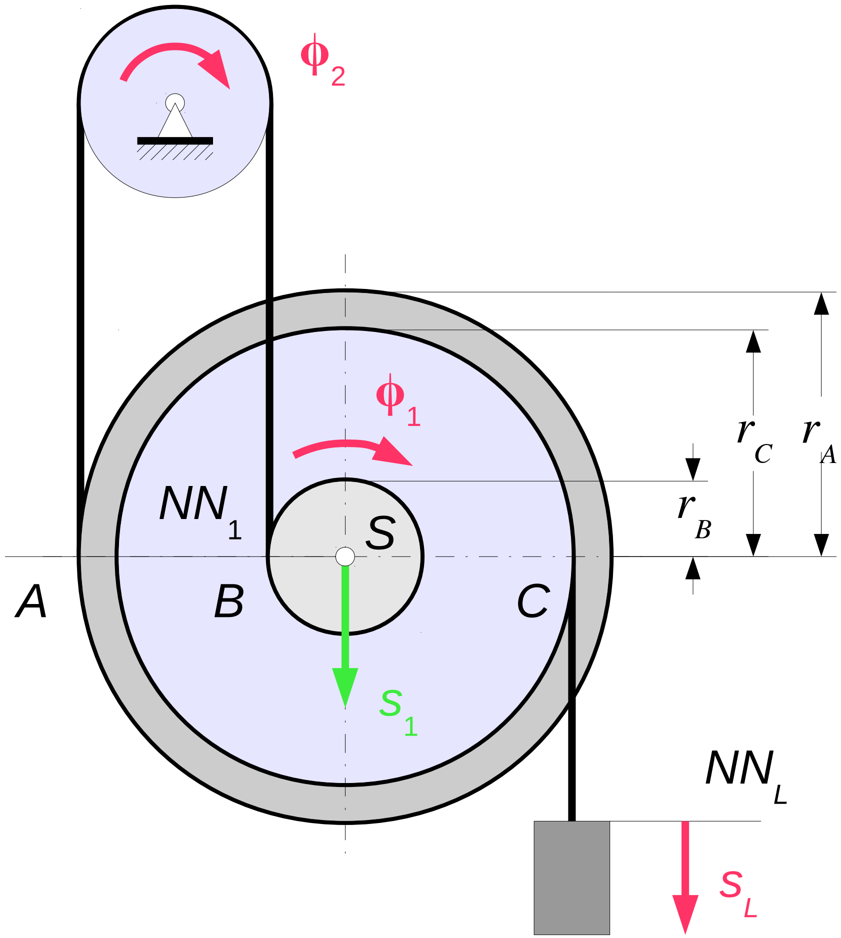


3. Systeme von starren Körpern

- Gegeben:
  - Last: $m_L = 10$ kg
  - Rolle 1: $m_1 = 20$ kg, $J^S_1 = 0{,}5$ kgm²
  - Rolle 2: $J^D_2 = 0{,}1$ kgm²
  - Radien: $r_A = 20$ cm, $r_B = 5$ cm, $r_C = 15$ cm
- Gesucht:
  - Beschleunigungen a_1 des Schwerpunkts der Rolle 1 und a_L der Last
  - Winkelbeschleunigungen der Rollen
  - Seilkräfte S_A, S_B und S_C

3. Systeme von starren Körpern

- Lösungsweg:
  - Ermittlung von v_1 mit dem Energieerhaltungssatz
  - Ermittlung der Seilkräfte mit Schwerpunktsatz und Drallsatz
- Freiheitsgrade und Nullniveaus:
  - Die Nullniveaus liegen in der Ruhelage der Rolle 1 bzw. der Last.



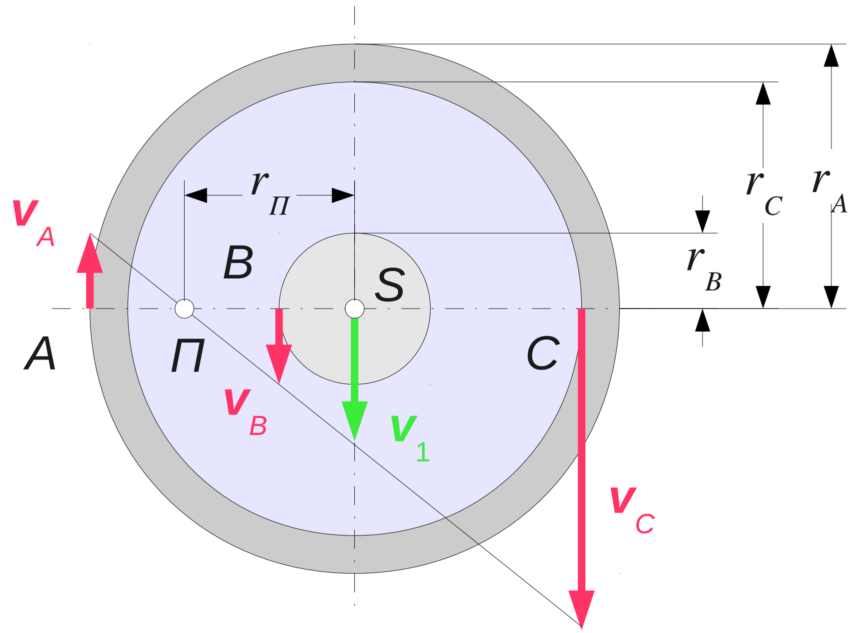
3. Systeme von starren Körpern

- Kinematik:
  - Rolle 2: $v_A = v_B = \omega_2 r_2$
  - Rolle 1:

$$r_\Pi = \frac{1}{2}(r_A + r_B)$$

$$v_1 = \omega_1 r_\Pi \rightarrow \omega_1 = \frac{2 v_1}{r_A + r_B}$$

$$v_L = v_C = (r_\Pi + r_C)\omega_1 = \frac{r_A + r_B + 2 r_C}{2} \cdot \frac{2 v_1}{r_A + r_B} = \frac{r_A + r_B + 2 r_C}{r_A + r_B} v_1$$



- Radius von Rolle 2:

$$r_2 = \frac{1}{2}(r_A - r_B)$$

3. Systeme von starren Körpern

$$v_B = \left(r_\Pi - r_B\right)\omega_1 = \frac{r_A - r_B}{2} \cdot \frac{2 v_1}{r_A + r_B} = \frac{r_A - r_B}{r_A + r_B} v_1$$

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r_2} = \frac{2 v_B}{r_A - r_B} = \frac{2 v_1}{r_A + r_B} = \omega_1$$

- Für die Verschiebungen gilt: $v_L = \dot{s}_L \rightarrow s_L = \dfrac{r_A + r_B + 2 r_C}{r_A + r_B} s_1$

- Energien in der Ruhelage: $E_A^K + E_A^G = 0$
- Energien in der ausgelenkten Lage:

$$E_B^K = \frac{1}{2}\left(J_2^D \omega_2^2 + J_1^S \omega_1^2 + m_1 v_1^2 + m_L v_L^2\right), \quad E_B^G = -m_1 g s_1 - m_L g s_L$$

3. Systeme von starren Körpern

- Energieerhaltungssatz: $E_B^K + E_B^G = E_A^K + E_A^G$

$$\frac{1}{2}\left(J_2^D \omega_2^2 + J_1^S \omega_1^2 + m_1 v_1^2 + m_L v_L^2\right) - m_1 g s_1 - m_L g s_L = 0$$

- Einsetzen der kinematischen Beziehungen ergibt:

$$\frac{1}{2}\left[\left(J_2^D + J_1^S\right)\left(\frac{2}{r_A + r_B}\right)^2 + m_1 + m_L\left(\frac{r_A + r_B + 2 r_C}{r_A + r_B}\right)^2\right] v_1^2$$

$$= \left(m_1 + m_L \frac{r_A + r_B + 2 r_C}{r_A + r_B}\right) g s_1$$

3. Systeme von starren Körpern

- Daraus folgt:

$$v_1^2 = \frac{2\left(m_1 + m_L \dfrac{r_A + r_B + 2\,r_C}{r_A + r_B}\right) g\, s_1}{m_1 + m_L \left(\dfrac{r_A + r_B + 2\,r_C}{r_A + r_B}\right)^2 + \dfrac{4\left(J_1^S + J_2^D\right)}{\left(r_A + r_B\right)^2}}$$

- Beschleunigungen:

$$a_1 = \frac{1}{2}\frac{dv_1^2}{ds_1} = \frac{\left(m_1 + m_L \dfrac{r_A + r_B + 2\,r_C}{r_A + r_B}\right) g}{m_1 + m_L \left(\dfrac{r_A + r_B + 2\,r_C}{r_A + r_B}\right)^2 + \dfrac{4\left(J_1^S + J_2^D\right)}{\left(r_A + r_B\right)^2}}$$

3. Systeme von starren Körpern

$$a_L = \frac{r_A + r_B + 2\,r_C}{r_A + r_B}\,a_1\,,\quad \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \frac{2\,a_1}{r_A + r_B}$$

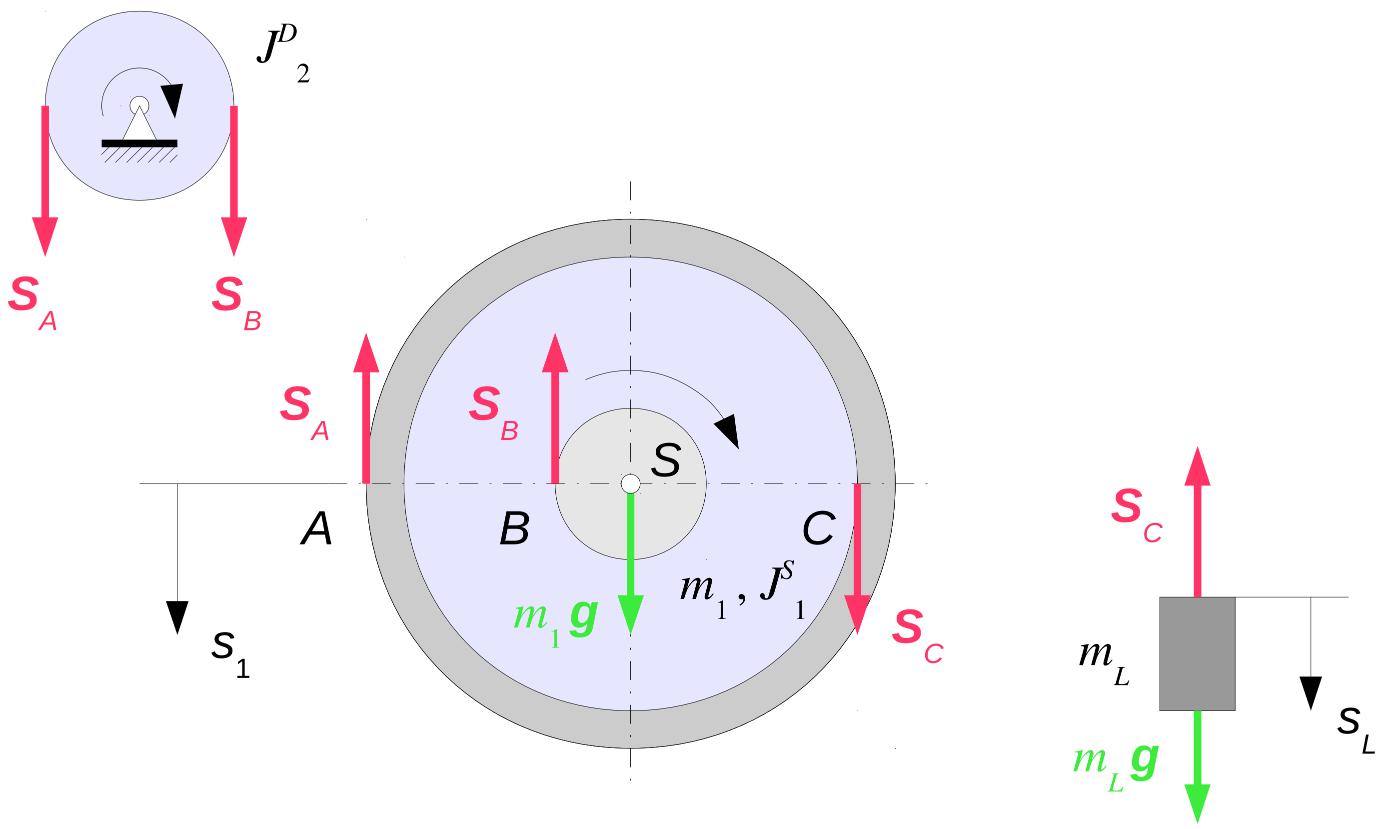
- Zahlenwerte:

$$a_1 = 0{,}3933\,\mathrm{g} = 3{,}858\,\mathrm{m/s^2}\,,\quad a_L = 0{,}8652\,\mathrm{g} = 8{,}487\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 30{,}86\,\mathrm{s}^{-2}$$

3. Systeme von starren Körpern

- Seilkräfte:



3. Systeme von starren Körpern

- Drallsatz für Rolle 2: $r_2 \left(S_B - S_A \right) = J_2^D \dot{\omega}_2$ (1)
- Schwerpunktsatz für Rolle 1: $m_1 g + S_C - S_A - S_B = m_1 a_1$ (2)
- Drallsatz für Rolle 1: $r_A S_A + r_B S_B + r_C S_C = J_1^S \dot{\omega}_1$ (3)
- Schwerpunktsatz für Last: $m_L g - S_C = m_L a_L$ (4)
- Auflösen: (4) → $S_C = m_L \left(g - a_L \right)$

  (1) → $S_B - S_A = \dfrac{J_2^D}{r_2} \dot{\omega}_2$ (1')

  (2) → $-S_B - S_A = m_1 \left(a_1 - g \right) - S_C$ (2')

3. Systeme von starren Körpern

(1') + (2') → $-2 S_A = \frac{J_2^D}{r_2} \dot{\omega}_2 + m_1 (a_1 - g) - S_C$

$$\rightarrow \quad S_A = \frac{1}{2} \left(S_C + m_1 (g - a_1) - \frac{J_2^D}{r_2} \dot{\omega}_2 \right)$$

(1') → $S_B = S_A + \frac{J_2^D}{r_2} \dot{\omega}_2$

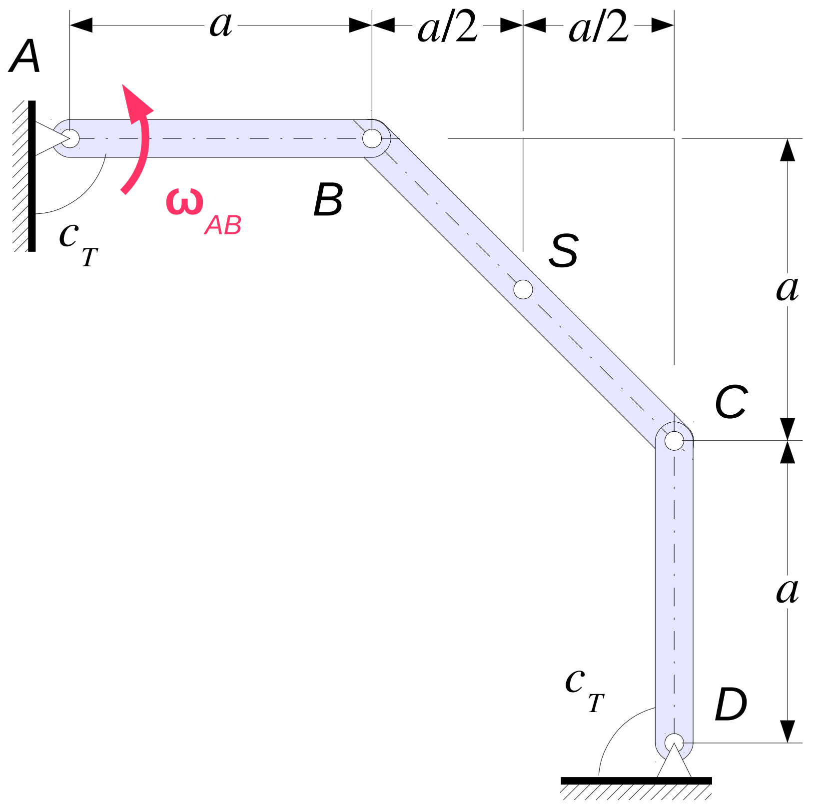
- Zahlenwerte: $S_C = 13{,}23\,\mathrm{N}\,,\quad S_A = 45{,}56\,\mathrm{N}\,,\quad S_B = 86{,}71\,\mathrm{N}$

- Gleichung 3 kann zur Probe verwendet werden:

$$(0{,}2 \cdot 45{,}56 + 0{,}05 \cdot 86{,}71 + 0{,}15 \cdot 13{,}23)\,\mathrm{Nm} = 15{,}43\,\mathrm{Nm}$$
$$0{,}5\,\mathrm{kgm}^2 \cdot 30{,}86\,\mathrm{s}^{-2} = 15{,}43\,\mathrm{Nm}$$

3. Systeme von starren Körpern

- Beispiel 4: Linearisierung
  - Die Träger *AB*, *BC* und *CD* sind in den Punkten *B* und *C* reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden.
  - Die Träger *AB* und *CD* werden in den Punkten *A* bzw. *D* durch Festlager gehalten.
  - In den Lagern *A* und *D* sind Torsionsfedern mit der Federkonstanten c_T angeschlossen.



3. Systeme von starren Körpern

– Gegeben:
  - Abmessung a
  - Federkonstante c_T
  - Träger *AB*: $J_{AB}^{A}=\frac{1}{3}m\,a^2$
  - Träger *BC*:

    $m_{BC}=2\,m\,,\quad J_{BC}^{S}=\frac{1}{3}m\,a^2$
  - Träger *CD*: $J_{CD}^{D}=\frac{1}{3}m\,a^2$
  - Die Federn sind in der gezeichneten Ausgangslage entspannt.
  - In der Ausgangslage hat der Träger *AB* die Winkelgeschwindigkeit $\omega_{AB}=\omega_0$.

– Gesucht:
  - Bewegung des Systems für kleine Auslenkungen aus der gezeichneten Ausgangslage:

    $\omega_{AB}(\phi_{AB}),\quad \dot{\omega}_{AB}(\phi_{AB})$

3. Systeme von starren Körpern

- Kinematik:
  - In der Ausgangslage gilt:

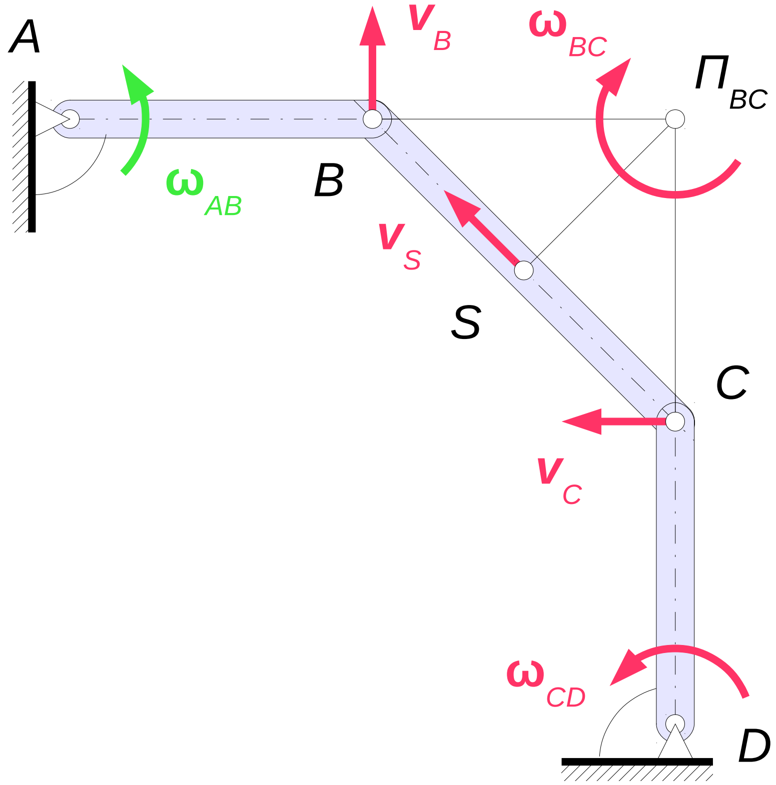
$$v_B = \omega_{AB}\, a = \omega_{BC}\, a$$

$\rightarrow \quad \omega_{BC} = \omega_{AB}$

$$v_C = \omega_{BC}\, a = \omega_{CD}\, a$$

$\rightarrow \quad \omega_{CD} = \omega_{BC} = \omega_{AB}$

$$v_S = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{BC}\, a = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{AB}\, a$$



3. Systeme von starren Körpern

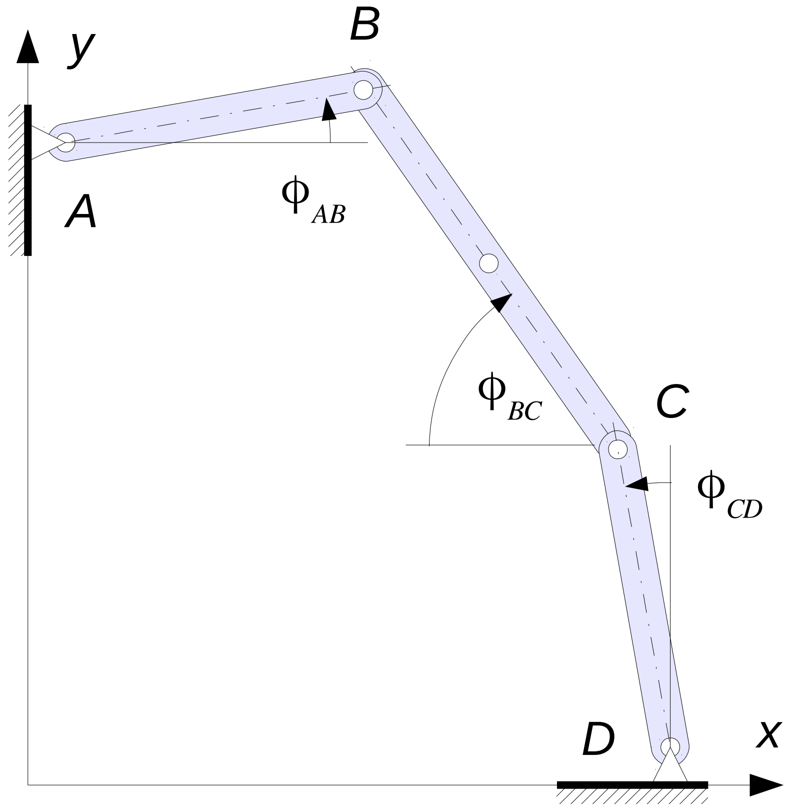
- In der ausgelenkten Lage muss gelten:

$$a\cos(\phi_{AB})+\sqrt{2}\,a\cos(\phi_{BC})+a\sin(\phi_{CD})=2\,a \qquad (1)$$

$$a\cos(\phi_{CD})+\sqrt{2}\,a\sin(\phi_{BC})-a\sin(\phi_{AB})=2\,a \qquad (2)$$

- Für kleine Auslenkungen gilt:

$$\phi_{AB}=\Delta\phi_{AB}\,,\quad \phi_{CD}=\Delta\phi_{CD}$$
$$\phi_{BC}=\frac{\pi}{4}+\Delta\phi_{BC}$$
$$\Delta\phi_{AB}\,,\Delta\phi_{BC}\,,\Delta\phi_{CD}\ll 1$$



3. Systeme von starren Körpern

- Für kleine Winkeländerungen gilt:

$$\cos(\phi_{AB}) = \cos(\Delta\phi_{AB}) \approx 1, \quad \sin(\phi_{AB}) = \sin(\Delta\phi_{AB}) \approx \Delta\phi_{AB}$$

$$\cos(\phi_{CD}) = \cos(\Delta\phi_{CD}) \approx 1, \quad \sin(\phi_{CD}) = \sin(\Delta\phi_{CD}) \approx \Delta\phi_{CD}$$

$$\sin(\phi_{BC}) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \Delta\phi_{BC}\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\Delta\phi_{BC}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \Delta\phi_{BC}\right)$$

$$\cos(\phi_{BC}) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \Delta\phi_{BC}\right) \approx \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\Delta\phi_{BC}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \Delta\phi_{BC}\right)$$

3. Systeme von starren Körpern

- Damit folgt:

(1) $\rightarrow$ $1+\left(1-\Delta\phi_{BC}\right)+\Delta\phi_{CD}=2$ $\rightarrow$ $\Delta\phi_{CD}=\Delta\phi_{BC}$

(2) $\rightarrow$ $1+\left(1+\Delta\phi_{BC}\right)-\Delta\phi_{AB}=2$ $\rightarrow$ $\Delta\phi_{BC}=\Delta\phi_{AB}$

- Also gilt: $\Delta\phi_{BC}=\Delta\phi_{CD}=\Delta\phi_{AB}$
- Für die Winkelgeschwindigkeiten folgt:

$$\omega_{AB}=\Delta\dot{\phi}_{AB},\quad \omega_{BC}=\Delta\dot{\phi}_{BC},\quad \omega_{CD}=\Delta\dot{\phi}_{CD} \quad\rightarrow\quad \omega_{BC}=\omega_{CD}=\omega_{AB}$$

Für kleine Auslenkungen können die kinematischen Beziehungen mit dem Momentanpol der Ausgangslage bestimmt werden. Die Bewegung des Momentanpols darf vernachlässigt werden.

3. Systeme von starren Körpern

- Energien:
  - Ausgangslage:

$$E_1^K = \frac{1}{2}\left(J_{AB}^A \omega_{AB1}^2 + J_{BC}^S \omega_{BC1}^2 + m_{BC} v_{S1}^2 + J_{CD}^D \omega_{CD1}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) m a^2 \omega_0^2 = m a^2 \omega_0^2$$

$$E_1^F = 0$$

  - Ausgelenkte Lage:

$$E_2^K = m a^2 \omega_{AB}^2$$

$$E_2^F = \frac{1}{2}\left(c_T \phi_{AB}^2 + c_T \phi_{CD}^2\right) = c_T \phi_{AB}^2$$

3. Systeme von starren Körpern

- Energieerhaltungssatz: $E_2^K + E_2^F = E_1^K + E_1^F$

$$m a^2 \omega_{AB}^2 + c_T \phi_{AB}^2 = m a^2 \omega_0^2 \rightarrow \omega_{AB}^2 = \omega_0^2 - \frac{c_T}{m a^2} \phi_{AB}^2$$

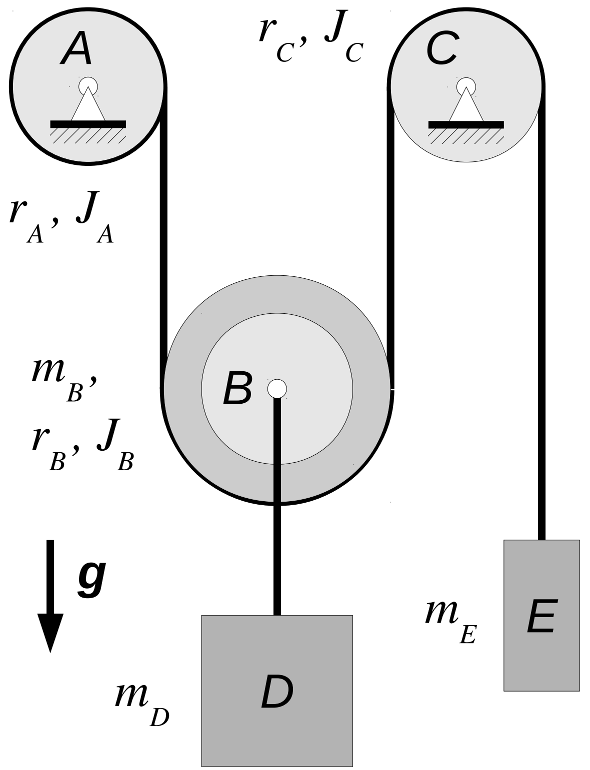
- Winkelgeschwindigkeit: $\omega_{AB} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_T \phi_{AB}^2}{m a^2}}$

- Winkelbeschleunigung: $\dot{\omega}_{AB} = \frac{1}{2} \frac{d \omega_{AB}^2}{d \phi_{AB}} = -\frac{c_T \phi_{AB}}{m a^2}$

- Das System schwingt mit der Kreisfrequenz $\Omega = \sqrt{c_T / (m a^2)}$ um die Ausgangslage.

3. Systeme von starren Körpern

- Beispiel 5: Rollensystem
  - Die Last *E* hängt an einem dehnstarren Seil, das von der Rolle *A* abgespult und über die Rollen *B* und *C* umgelenkt wird.
  - Die Last *D* ist über ein dehnstarres Seil mit der Rolle *B* verbunden.
  - Die Rollen *A* und *C* sind reibungsfrei gelenkig gelagert.



3. Systeme von starren Körpern

- Gegeben:
  - Rolle *A*: Radius r_A, Massenträgheitsmoment J_A
  - Rolle *B*: Masse m_B, Radius r_B, Massenträgheitsmoment J_B
  - Rolle *C*: Radius r_C, Massenträgheitsmoment J_C
  - Last *D*: Masse m_D
  - Last *E*: Masse m_E
- Gesucht:
  - alle Beschleunigungen und Winkelbeschleunigungen
  - Kräfte in den Seilen *AB*, *BC* und *CE*

3. Systeme von starren Körpern

- Kinematik:

$$v_D = v_B$$

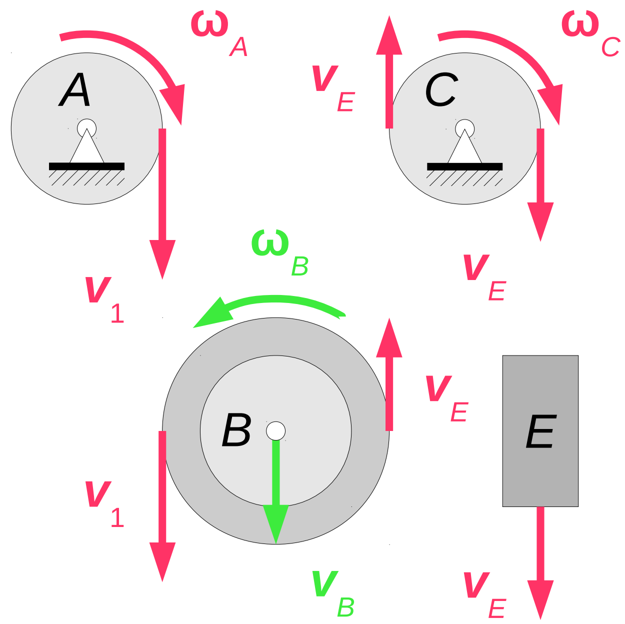
$$v_1 = v_B + \omega_B r_B = \omega_A r_A$$

$$\rightarrow \quad \omega_A = \frac{v_B + \omega_B r_B}{r_A} \qquad (1)$$

$$v_E = -v_B + \omega_B r_B \qquad (2)$$

$$v_E = \omega_B r_B - v_B = \omega_C r_C$$

$$\rightarrow \quad \omega_C = \frac{\omega_B r_B - v_B}{r_C} \qquad (3)$$



5 Freiheitsgrade

3 kinematische Bindungen

3. Systeme von starren Körpern

- Unter Berücksichtigung der kinematischen Bindungen bleiben zwei kinematische Variablen übrig. Das System kann daher nicht mit dem Arbeitssatz berechnet werden.
- Drallsatz für Rolle *A*:

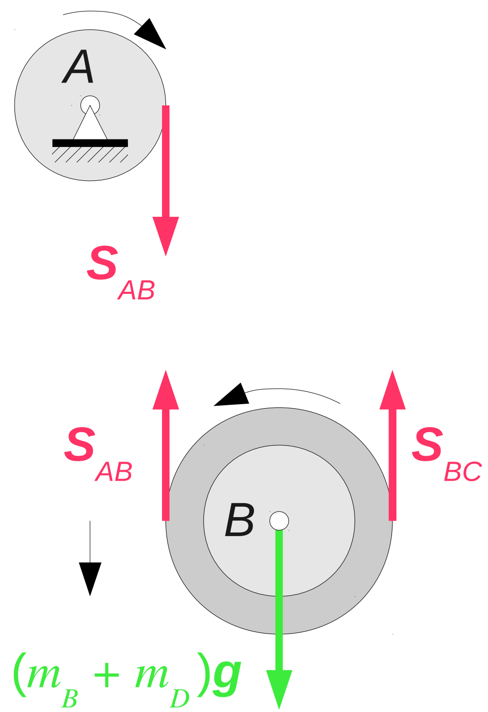
$$J_A \dot{\omega}_A = r_A S_{AB} \qquad (4)$$

- Schwerpunktsatz für Rolle *B* mit Masse *D*:

$$\left(m_B + m_D\right)\dot{v}_B = \left(m_B + m_D\right) g - S_{AB} - S_{BC} \qquad (5)$$

- Drallsatz für Rolle *B*:

$$J_B \dot{\omega}_B = r_B \left(S_{BC} - S_{AB}\right) \qquad (6)$$



3. Systeme von starren Körpern

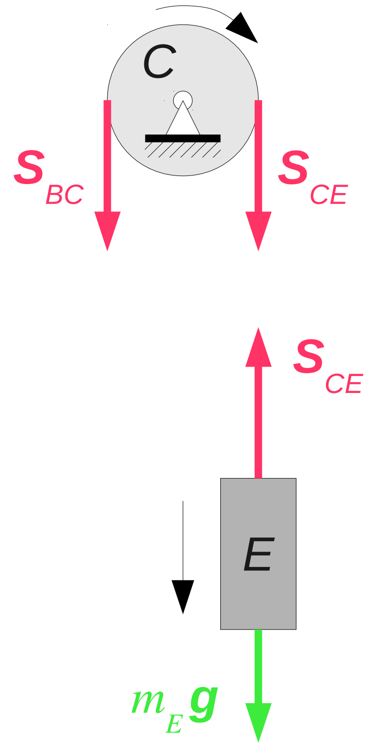
- Drallsatz für Rolle *C*:

$$J_C \dot{\omega}_C = r_C \left(S_{CE} - S_{BC} \right) \qquad (7)$$

- Schwerpunktsatz für Last *E*:

$$m_E \dot{v}_E = m_E g - S_{CE} \qquad (8)$$

- Mit den Gleichungen (4), (6) und (7) lassen sich die Seilkräfte eliminieren.
- Einsetzen in die Gleichungen (5) und (8) ergibt dann zwei Gleichungen zur Bestimmung von $\dot{v}_B$ und $\dot{\omega}_B$.



3. Systeme von starren Körpern

(4) → $$S_{AB}=\frac{J_A}{r_A}\dot{\omega}_A \quad (4')$$

(6) → $$S_{BC}=\frac{J_B}{r_B}\dot{\omega}_B+\frac{J_A}{r_A}\dot{\omega}_A \quad (6')$$

(7) → $$S_{CE}=\frac{J_C}{r_C}\dot{\omega}_C+\frac{J_B}{r_B}\dot{\omega}_B+\frac{J_A}{r_A}\dot{\omega}_A \quad (7')$$

Kräfte in (5) → $$(m_B+m_D)\dot{v}_B=(m_B+m_D)g-2\frac{J_A}{r_A}\dot{\omega}_A-\frac{J_B}{r_B}\dot{\omega}_B \quad (5')$$

Kräfte in (8) → $$m_E\dot{v}_E=m_E g-\frac{J_C}{r_C}\dot{\omega}_C-\frac{J_B}{r_B}\dot{\omega}_B-\frac{J_A}{r_A}\dot{\omega}_A \quad (8')$$

3. Systeme von starren Körpern

- Einsetzen der kinematischen Beziehungen (1) bis (3) ergibt:

(5') $\rightarrow$ $$(m_B + m_D)\dot{v}_B = (m_B + m_D) g - 2\frac{J_A}{r_A^2}(\dot{v}_B + r_B\dot{\omega}_B) - \frac{J_B}{r_B^2} r_B \dot{\omega}_B$$

$$\rightarrow \quad \left(m_B + m_D + 2\frac{J_A}{r_A^2}\right)\dot{v}_B + \left(2\frac{J_A}{r_A^2} + \frac{J_B}{r_B^2}\right) r_B\dot{\omega}_B = (m_B + m_D) g \qquad (9)$$

(8') $\rightarrow$ $$m_E(-\dot{v}_B + r_B\dot{\omega}_B) = m_E g - \frac{J_C}{r_C^2}(r_B\dot{\omega}_B - \dot{v}_B) - \frac{J_B}{r_B^2} r_B\dot{\omega}_B - \frac{J_A}{r_A^2}(r_B\dot{\omega}_B + \dot{v}_B)$$

$$\rightarrow \quad -\left(m_E - \frac{J_A}{r_A^2} + \frac{J_C}{r_C^2}\right)\dot{v}_B + \left(m_E + \frac{J_A}{r_A^2} + \frac{J_B}{r_B^2} + \frac{J_C}{r_C^2}\right) r_B\dot{\omega}_B = m_E g \qquad (10)$$

3. Systeme von starren Körpern

- Die Gleichungen (9) und (10) können nach $\dot{v}_B$ und $\dot{\omega}_B$ aufgelöst werden.
- Die übrigen Beschleunigungen folgen dann aus den kinematischen Beziehungen (1) bis (3).
- Die Seilkräfte können aus den Gleichungen (4') bis (7') berechnet werden.
- Die Zahlenwerte für die Massen, die Massenträgheitsmomente und die Radien müssen so vorgegeben werden, dass alle Seilkräfte positiv sind.

3. Systeme von starren Körpern

- Anmerkung:
  - Wenn wie in diesem Fall der Arbeitssatz nicht verwendet werden kann, weil das System nach Berücksichtigung der kinematischen Bindungen noch mehr als einen Freiheitsgrad hat, bietet der Lagrange-Formalismus eine elegante Möglichkeit, die Bewegungsgleichungen aufzustellen, ohne dass die einzelnen Körper des Systems freigeschnitten werden müssen.