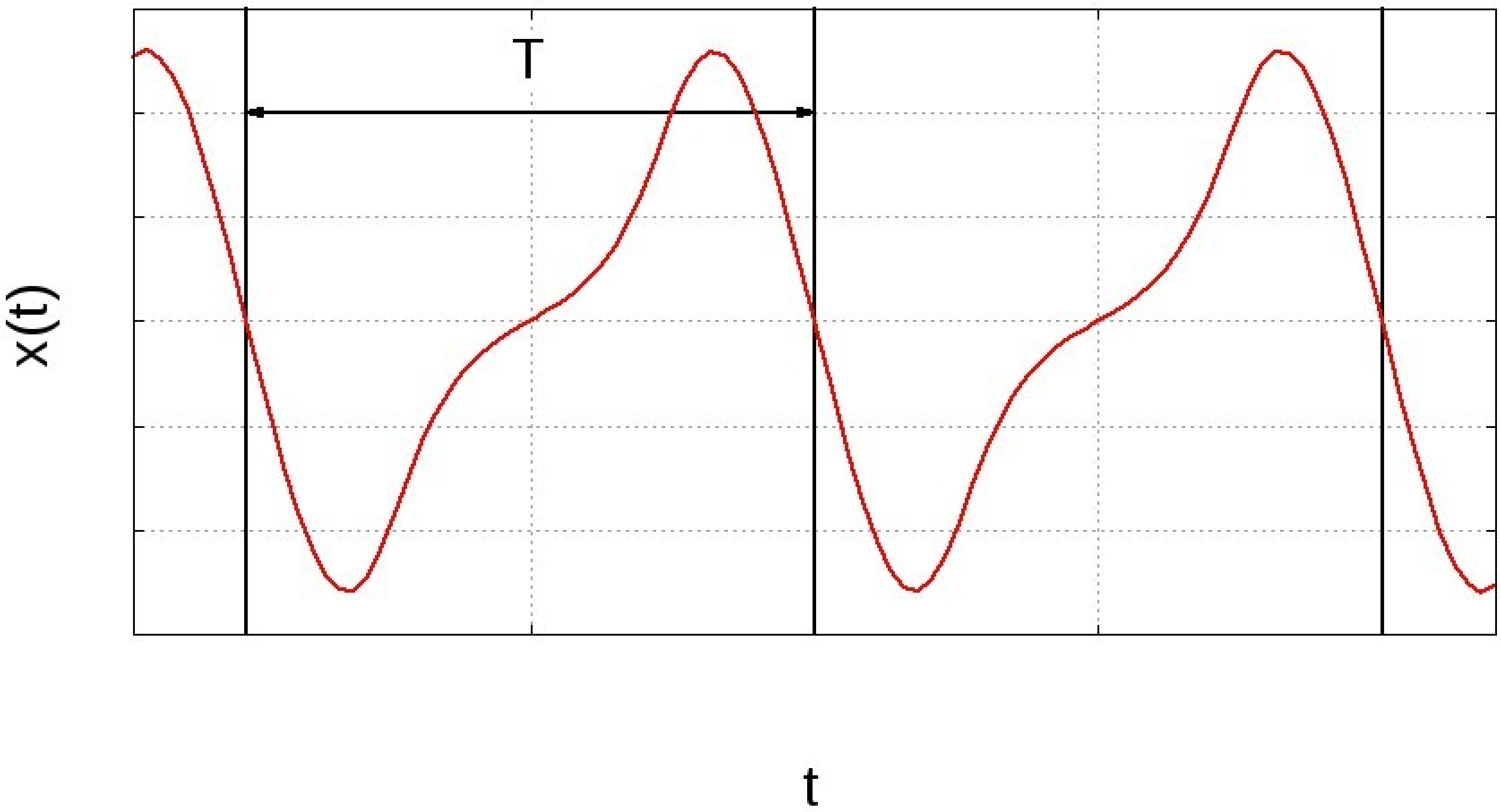
1. Grundlagen

1.1 Periodische Vorgänge

1.2 Harmonische Vorgänge

1.3 Harmonische Analyse periodischer Vorgänge

1.1 Periodische Vorgänge



1.1 Periodische Vorgänge

- Definitionen:
  - Bei einem periodischen Vorgang gibt es eine Zeit T, nach der sich der zeitliche Verlauf wiederholt.
  - Die Zeit T wird als *Periode* oder *Schwingungsdauer* bezeichnet.
  - Der Kehrwert der Periode ist die *Frequenz* f. Sie gibt die Anzahl der Wiederholungen pro Zeiteinheit an.
  - Die Einheit der Frequenz ist *Hertz*.

$$x(t+T) = x(t)$$

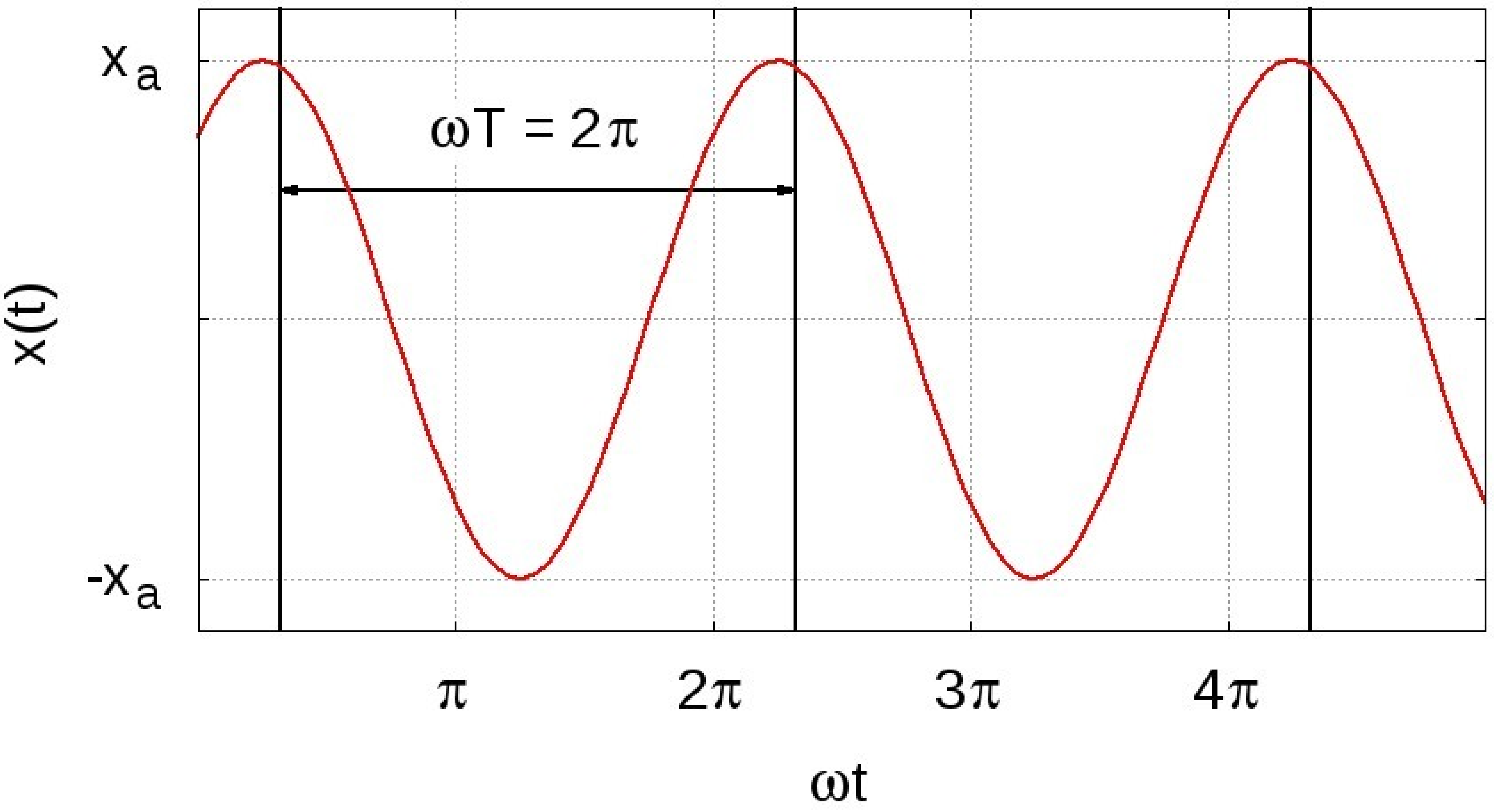
$$f = \frac{1}{T}$$

$$1\,\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

1.1 Periodische Vorgänge

- Beispiele:
  - Geschwindigkeit des Kolbens im Zylinder
  - Motorlasten bei konstanter Drehzahl
  - Kräfte und Momente infolge von Unwucht bei konstanter Drehzahl
  - Getriebelasten bei Rotation mit konstanter Drehzahl
  - Propellerlasten bei konstanter Drehzahl

1.2 Harmonische Vorgänge



1.2 Harmonische Vorgänge

- Definitionen:
  - Ein harmonischer Vorgang ist ein periodischer Vorgang mit einem kosinusförmigen Zeitverlauf:

$$x(t) = x_a \cos(\omega t + \phi)$$

  - Dabei ist x_a die *Amplitude*, ϕ der *Phasenwinkel* und

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

die *Kreisfrequenz*.

- Äquivalente Darstellung:
  - Aus

$$x(t) = x_a\left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right)$$

folgt

$$x(t) = x_s \sin(\omega t) + x_c \cos(\omega t)$$

mit

$$x_s = -x_a \sin(\phi), \quad x_c = x_a \cos(\phi)$$

$$x_a = \sqrt{x_s^2 + x_c^2}, \quad \tan(\phi) = -\frac{x_s}{x_c}$$

1.2 Harmonische Vorgänge

- Schwingungsgleichung:
  - Für harmonische Vorgänge gilt:

$$\dot{x}(t) = -\omega x_a \sin(\omega t + \phi)$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_a \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

  - Eine Funktion, die einen harmonischen Vorgang beschreibt, erfüllt also die Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0}$$

  - Diese Gleichung wird als *Schwingungsgleichung* bezeichnet.

1.3 Harmonische Analyse

- Fourier-Reihe:
  - Jeder periodische Vorgang mit der Periode T lässt sich als Summe von harmonischen Vorgängen darstellen:

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_{sk} \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) + x_{ck} \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) \right)$$

  - Diese Reihe wird als *Fourier-Reihe* bezeichnet.

1.3 Harmonische Analyse

- Berechnung der Koeffizienten:
  - Das Integral der Sinus- und der Kosinus-Funktion über eine Periode ist null.
  - Daher ist der Koeffizient x_0 gleich dem zeitlichen Mittelwert:

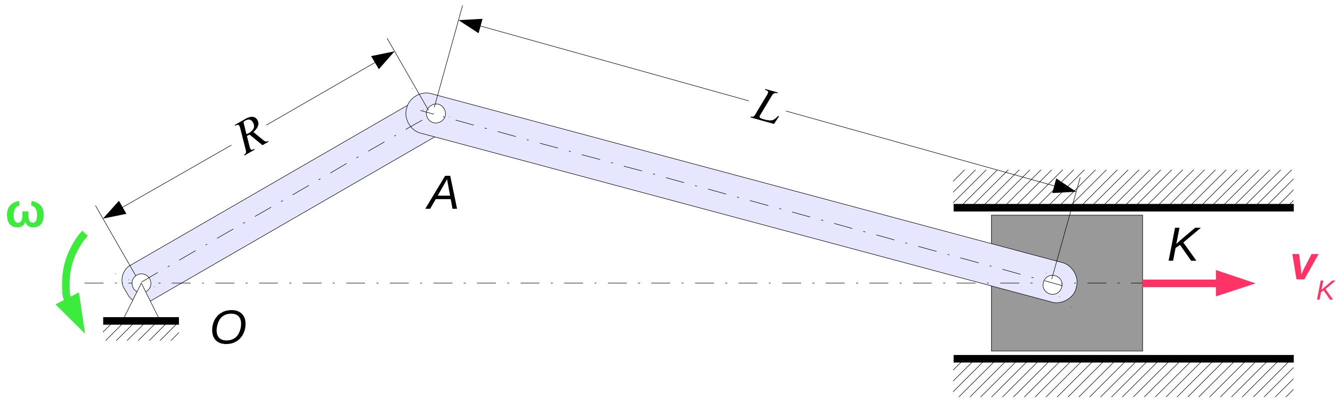
$$x_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

  - Für die übrigen Koeffizienten gilt:

$$x_{sk} = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)dt\,, \quad x_{ck} = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)dt$$

1.3 Harmonische Analyse

- Beispiel: Kurbeltrieb



- Für die Geschwindigkeit des Kolbens gilt:

$$v_K(t) = -\omega R \sin(\omega t)\left(1 + \frac{R}{L}\frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\sin(\omega t)\right)^2}}\right)$$

1.3 Harmonische Analyse

- Die Fourier-Reihe lautet:

$$v_K(t) = \omega R \left[x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_{sk} \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) + x_{ck} \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right)\right)\right]$$

- Für $R/L = 0{,}75$ und $\omega = 2\pi/T$ mit $T = 1\ \mathrm{s}$ berechnen sich die Fourier-Koeffizienten zu

$$x_{s1} = -1,\quad x_{s2} = -0{,}4491,\quad x_{s3} = 0,\quad x_{s4} = 0{,}0455$$
$$x_0 = x_{c1} = x_{c2} = x_{c3} = x_{c4} = 0$$

- Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt, dass sich bereits mit den ersten vier Gliedern der Fourier-Reihe eine sehr gute Näherung ergibt.

1.3 Harmonische Analyse