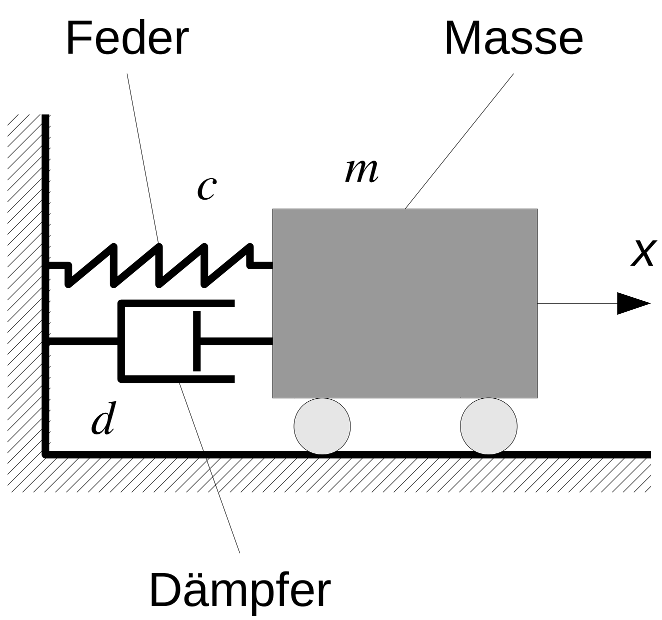
2. Freie Schwingungen

- Die einfachsten schwingungsfähigen Systeme sind lineare Systeme:
  - Die Rückstellkräfte sind proportional zur Auslenkung.
  - Die Dämpfungskräfte sind proportional zur Geschwindigkeit.
- Bei linearen Systemen gilt das Superpositionsprinzip:
  - Jede Überlagerung von Schwingungen ist ebenfalls eine Schwingung.
- Bei kleinen Auslenkungen aus einer Gleichgewichtslage verhalten sich die meisten Systeme linear.

2. Freie Schwingungen

2.1 Einleitung

- Grundmodell:
  - Das Grundmodell eines einfachen linearen schwingungsfähigen Systems besteht aus einer Masse, einer Feder und einem Dämpfer:
    - Masse m
    - Federsteifigkeit c
    - Dämpferkonstante d



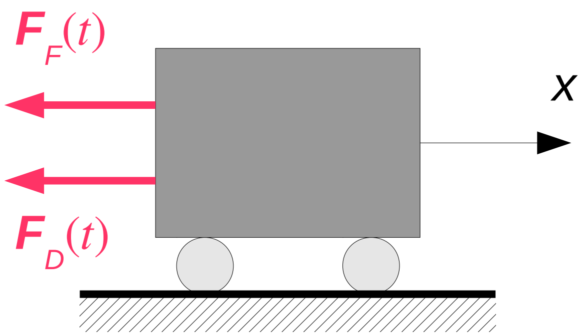
2.1 Einleitung

- Bewegungsgleichung:
  - Schwerpunktsatz:

$$\sum F_x = m a_x \; : \; -F_F - F_D = m \ddot{x}$$

  - Mit $F_F = c\,x$, $F_D = d\,\dot{x}$

folgt: $$\boxed{m\ddot{x} + d\dot{x} + c\,x = 0}$$



  - Einheiten:
    - Federsteifigkeit c:

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$$

- Dämpfungskonstante d:

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

2.1 Einleitung

- Schwingungsgleichung:
  - Division der Bewegungsgleichung durch die Masse m ergibt:

    $$\ddot{x}+\frac{d}{m}\dot{x}+\frac{c}{m}x=0$$

  - Abklingkonstante: $\delta=\dfrac{d}{2m}$
  - Kreisfrequenz: $\omega=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$
  - Schwingungsgleichung:

    $$\boxed{\ddot{x}+2\,\delta\,\dot{x}+\omega^2 x=0}$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Bei freien ungedämpften Schwingungen wird die Dämpfung vernachlässigt.
- Lösung der Schwingungsgleichung:
  - Wenn die Dämpfung vernachlässigt wird, lautet die Schwingungsgleichung:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

  - Die Lösung ist eine harmonische Schwingung:

$$x(t) = x_a \cos(\omega t + \phi)$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Amplitude x_a und Phase ϕ werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x(0) = x_a \cos(\phi) \\ v_0 &= \dot{x}(0) = -\omega\, x_a \sin(\phi) \end{aligned}\right\} \rightarrow \tan(\phi) = -\frac{v_0}{\omega\, x_0}, \quad x_a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

- Beispiele:

$$x_0 \neq 0,\ v_0 = 0 \ :\ x_a = x_0, \quad \tan(\phi) = 0 \rightarrow \phi = 0$$

$$x_0 = 0,\ v_0 \neq 0 \ :\ x_a = \left|\frac{v_0}{\omega}\right|, \quad \cot(\phi) = 0 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

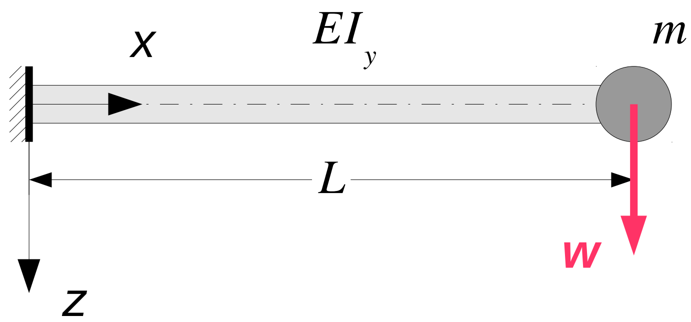
- Eigenkreisfrequenz und Eigenfrequenz:
  - Die Kreisfrequenz der freien ungedämpften Schwingung wird als *Eigenkreisfrequenz* des Systems bezeichnet. Die zugehörige Frequenz heißt *Eigenfrequenz*.
  - Bei freien ungedämpften Schwingungen interessiert in der Regel nur die Eigenfrequenz.
  - Die Eigenfrequenz der freien ungedämpften Schwingung ist ein wichtiger Parameter zur Charakterisierung des Verhaltens des Systems bei erzwungenen Schwingungen.
  - Die Eigenfrequenz kann unmittelbar aus der Schwingungsgleichung abgelesen werden.

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Vorgehen zur Ermittlung der Eigenkreisfrequenz:
  - Aufstellen der kinematischen Bindungen
  - Aufstellen der Bewegungsgleichung:
    - Schwerpunktsatz
    - Drallsatz
    - Energieerhaltungssatz
  - Umformung der Bewegungsgleichung in die Schwingungs-gleichung
  - Ablesen der Beziehung für die Eigenkreisfrequenz aus der Schwingungsgleichung

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Beispiel: Kragbalken mit Punktmasse
  - Am freien Ende eines masselosen Kragbalkens befindet sich eine Punktmasse.
  - Gegeben:
    - Länge L
    - Biegesteifigkeit EI_y
    - Masse m



- Gesucht:
  - Eigenkreisfrequenz ω und Eigenfrequenz f der freien ungedämpften Schwingung

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Kräfte an der freigeschnittenen Masse:

- Für die Rückstellkraft F gilt (vgl. TM 2):

$$F = \frac{3\,E\,I_y}{L^3}\,w$$

- Schwerpunktsatz:

$$\sum F_z = m\,\ddot{w} \quad :$$

$$m\,\ddot{w} = -F = -\frac{3\,E\,I_y}{L^3}\,w$$

- Schwingungsgleichung:

$$\ddot{w} + \frac{3\,E\,I_y}{m\,L^3}\,w = 0$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Aus der Schwingungsgleichung kann abgelesen werden:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 E I_y}{m L^3}}$$

- Das System schwingt mit der Frequenz

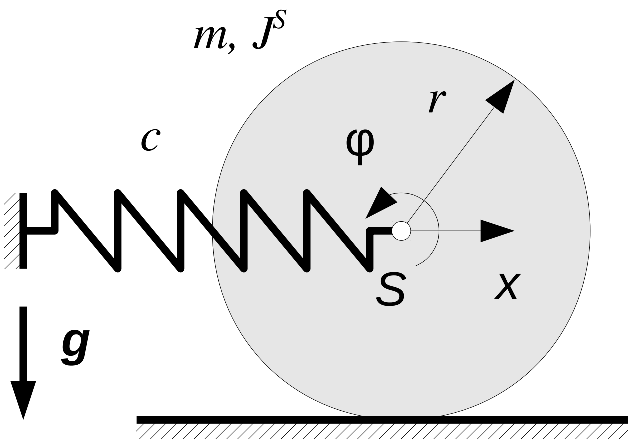
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 E I_y}{m L^3}}$$

und der Periode

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m L^3}{3 E I_y}} \quad .$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

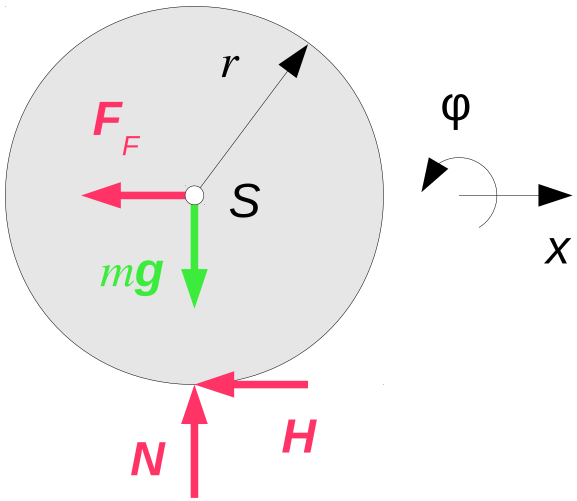
- Beispiel: Rollschwinger



- Eine zylindrische Walze mit Masse m und Massenträgheitsmoment J^S bezüglich des Schwerpunkts wird durch eine Feder mit der Federsteifigkeit c gehalten.
- Die Walze rollt auf einer horizontalen Ebene.
- Gesucht ist die Eigenfrequenz der freien Schwingung.

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Freigeschnittene Walze:



- Federkraft: $F_F = c\,x$
- Rollbedingung: $0 = \dot{x} + r\,\dot{\phi}$

$\rightarrow \quad x = -r\,\phi, \quad \ddot{x} = -r\,\ddot{\phi}$

- Drallsatz bezüglich Schwerpunkt *S*:

$$\sum M^S = J^S\,\dot{\omega} \quad : \quad -r\,H = J^S\,\ddot{\phi}$$

- Schwerpunktsatz:

$$\sum F_x = m\,a_x \quad :$$

$$-F_F - H = m\,\ddot{x}$$

$$\rightarrow \quad H = -c\,x - m\,\ddot{x}$$

$$= c\,r\,\phi + m\,r\,\ddot{\phi}$$

- Bewegungsgleichung:

$$\left(J^S + m\,r^2\right)\ddot{\phi} + c\,r^2\,\phi = 0$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

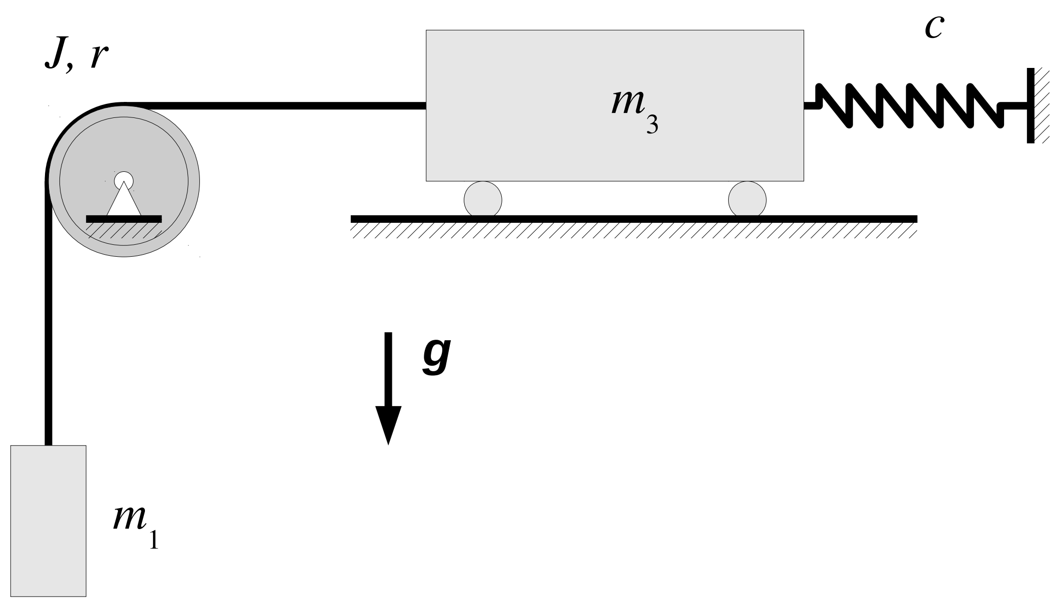
- Schwingungsgleichung: $$\ddot{\phi}+\frac{c\,r^2}{J^S+m\,r^2}\phi=0$$

- Eigenkreisfrequenz: $$\omega=\sqrt{\frac{c\,r^2}{J^S+m\,r^2}}=\sqrt{\frac{c}{m+J^S/r^2}}$$

- Eigenfrequenz: $$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m+J^S/r^2}}$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Beispiel: Ersatzmodell für die Spannvorrichtung für das Zugseil einer Seilbahn

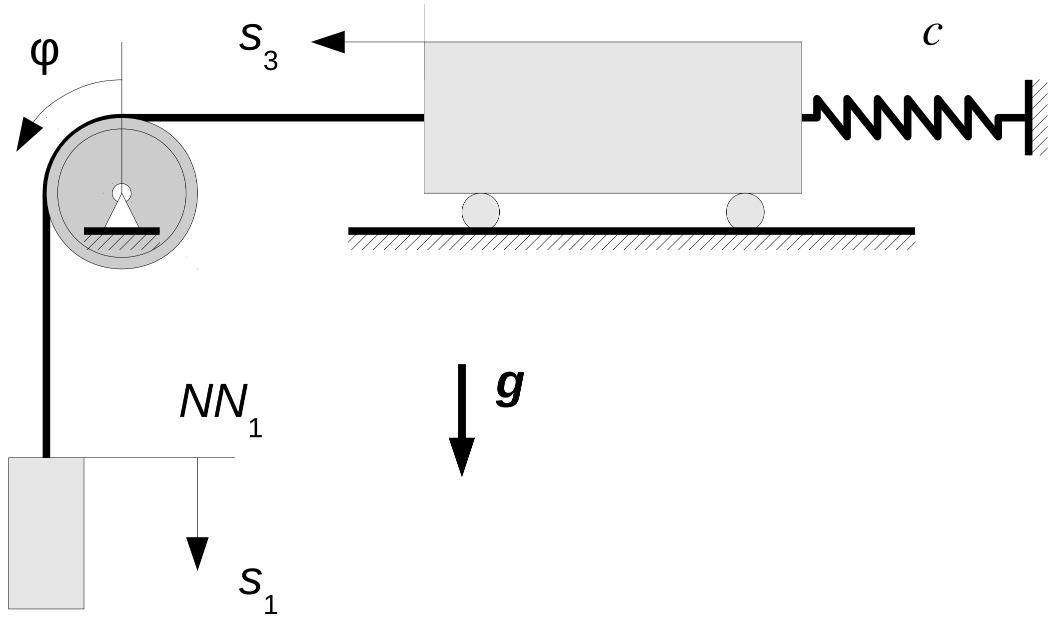


2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Die Elastizität des Zugseils wird durch eine Feder mit der Federsteifigkeit c abgebildet.
- Die Umlenkvorrichtung des Zugseils wird als Wagen der Masse m_3 mit masselosen Rädern abgebildet. Die Räder rollen auf den Schienen.
- Die Masse m_1 zum Spannen hängt an einem masselosen dehnstarren Seil, das durch eine reibungsfrei gelenkig gelagerte Rolle (Massenträgheitsmoment J, Radius r) umgelenkt wird.
- Gesucht ist die Frequenz der freien Schwingung.

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Die Aufgabe kann mit dem Energieerhaltungssatz gelöst werden.
- Freiheitsgrade und Nullniveaus:



2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Kinematische Bindungen: $s_1 = s_3 = s\,,\quad r\,\dot{\phi} = \dot{s} \;\rightarrow\; \dot{\phi} = \dfrac{\dot{s}}{r}$
- Energien:
  - Zustand *A*: Feder entspannt, $s = s_0 = 0,\quad \dot{s} = v_0$
  - Zustand *B*: beliebige ausgelenkte Lage

  - Lageenergie: $E_A^G = 0\,,\quad E_B^G = -m_1\,g\,s_1 = -m_1\,g\,s$
  - Federenergie: $E_A^F = 0\,,\quad E_B^F = \dfrac{1}{2}\,c\,s_3^2 = \dfrac{1}{2}\,c\,s^2$
  - Kinetische Energie: $E_A^K = \dfrac{1}{2}\left(m_1\,v_0^2 + J\,(v_0/r)^2 + m_3\,v_0^2\right)$

$$E_B^K = \frac{1}{2}\left(m_1\,\dot{s}^2 + J\,(\dot{s}/r)^2 + m_3\,\dot{s}^2\right)$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Energieerhaltungssatz: $E_B^K + E_B^G + E_B^F = E_A^K + E_A^G + E_A^F$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 \dot{s}^2 + J\left(\frac{\dot{s}}{r}\right)^2 + m_3 \dot{s}^2\right) - m_1 g s + \frac{1}{2} c s^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 v_0^2 + J\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 + m_3 v_0^2\right)$$

$$\left(m_1 + m_3 + \frac{J}{r^2}\right)\dot{s}^2 = 2 m_1 g s - c s^2 + \left(m_1 + m_3 + \frac{J}{r^2}\right) v_0^2$$

$$\rightarrow \quad \dot{s}^2 = v_0^2 + \frac{2 m_1 g s - c s^2}{m_1 + m_3 + J/r^2}$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Beschleunigung:

$$\ddot{s}=\frac{1}{2}\frac{d\dot{s}^2}{ds}=\frac{m_1 g-c\,s}{m_1+m_3+J/r^2} \quad \rightarrow \quad \ddot{s}+\frac{c}{m_1+m_3+J/r^2}s=\frac{m_1 g}{m_1+m_3+J/r^2}$$

- Die Gleichung unterscheidet sich dadurch von der Schwingungsgleichung, dass die rechte Seite nicht null ist.
- Statische Gleichgewichtslage:

$$\ddot{s}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{c\,s_S}{m_1+m_3+J/r^2}=\frac{m_1 g}{m_1+m_3+J/r^2} \quad \rightarrow \quad s_S=\frac{m_1}{c}g$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Die gesamte Verschiebung setzt sich zusammen aus der statischen Verschiebung s_S und der Verschiebung s_r relativ zur statischen Verschiebung:

$$s = s_S + s_r \, , \quad \ddot{s} = \ddot{s}_r$$

- Für die Relativbeschleunigung folgt:

$$\ddot{s}_r = \ddot{s} = \frac{m_1 g - m_1 g - c\, s_r}{m_1 + m_3 + J/r^2} = \frac{-c\, s_r}{m_1 + m_3 + J/r^2}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{s}_r + \frac{c}{m_1 + m_3 + J/r^2}\, s_r = 0$$

2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Das System schwingt mit der Frequenz

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m_1+m_3+J/r^2}}$$

  um die statische Gleichgewichtslage.
- Mit $c=m_1 g/s_S$ gilt auch:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_3+J/r^2}}\sqrt{\frac{g}{s_S}}$$

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Bei realen Systemen werden die Schwingungsausschläge mit der Zeit kleiner, und die Schwingung kommt zum Stillstand.
- Ursache dafür sind Energieverluste durch Reibungs- und Dämpfungskräfte:
  - Lagerreibung
  - Luftwiderstand
  - innere Reibung des Werkstoffs
  - Schallabstrahlung

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Dämpfungskräfte:
  - Dämpfungskräfte sind stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt.
  - Die genaue Beschreibung aller dämpfenden Einflüsse ist sehr aufwändig.
  - Das einfachste Dämpfungsmodell ist das Modell einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskraft:

$$F_D = d\,v = d\,\dot{x}$$

  - Bei einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung lautet die Schwingungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega^2\,x = 0$$

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Abklingkonstante:
  - Die Abklingkonstante ist definiert durch: $\delta = \dfrac{d}{2m}$
  - Sie hat die Einheit: $\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{kg}} = \dfrac{1}{\mathrm{s}}$
- Lösung der Schwingungsgleichung:
  - Einsetzen des Lösungsansatzes

$$x(t) = A e^{\lambda t}, \quad \dot{x}(t) = \lambda A e^{\lambda t} = \lambda x(t), \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 A e^{\lambda t} = \lambda^2 x(t)$$

ergibt: $\left(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2\right) x(t) = 0$

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Damit nichttriviale Lösungen existieren, muss die *charakteristische Gleichung* erfüllt sein:

$$\boxed{\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0}$$

- Die charakteristische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -\delta \pm \omega\sqrt{\delta^2/\omega^2 - 1} \quad .$$

- Mit dem *Lehrschen Dämpfungsmaß* $D = \delta/\omega$ gilt:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \omega\sqrt{D^2 - 1}$$

- Das Lehrsche Dämpfungsmaß wird auch als *Dämpfungsverhältnis* bezeichnet.

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Dämpfungsfälle:
  - Die Lösungen der charakteristischen Gleichung hängen vom Wert des Lehrschen Dämpfungsmaßes ab.
  - Starke Dämpfung:
    - $D > 1$: Es gibt zwei reelle Lösungen.
  - Kritische Dämpfung:
    - $D = 1$: Es gibt eine reelle Lösung.
  - Schwache Dämpfung:
    - $D < 1$: Es gibt zwei komplexe Lösungen.

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Starke Dämpfung:
  - Es gibt zwei reelle Lösungen:

$$\lambda_{1/2}=-\delta\pm\mu \quad \text{mit} \quad \mu=\omega\sqrt{D^2-1}=\sqrt{\delta^2-\omega^2}<\delta$$

  - Die Schwingungsgleichung hat die allgemeine Lösung:

$$x(t)=A_1 e^{\lambda_1 t}+A_2 e^{\lambda_2 t}=e^{-\delta t}\left(A_1 e^{\mu t}+A_2 e^{-\mu t}\right)$$

  - Die Lösung klingt exponentiell ab.
  - Für die Geschwindigkeit folgt:

$$\dot{x}(t)=\lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t}+\lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}$$

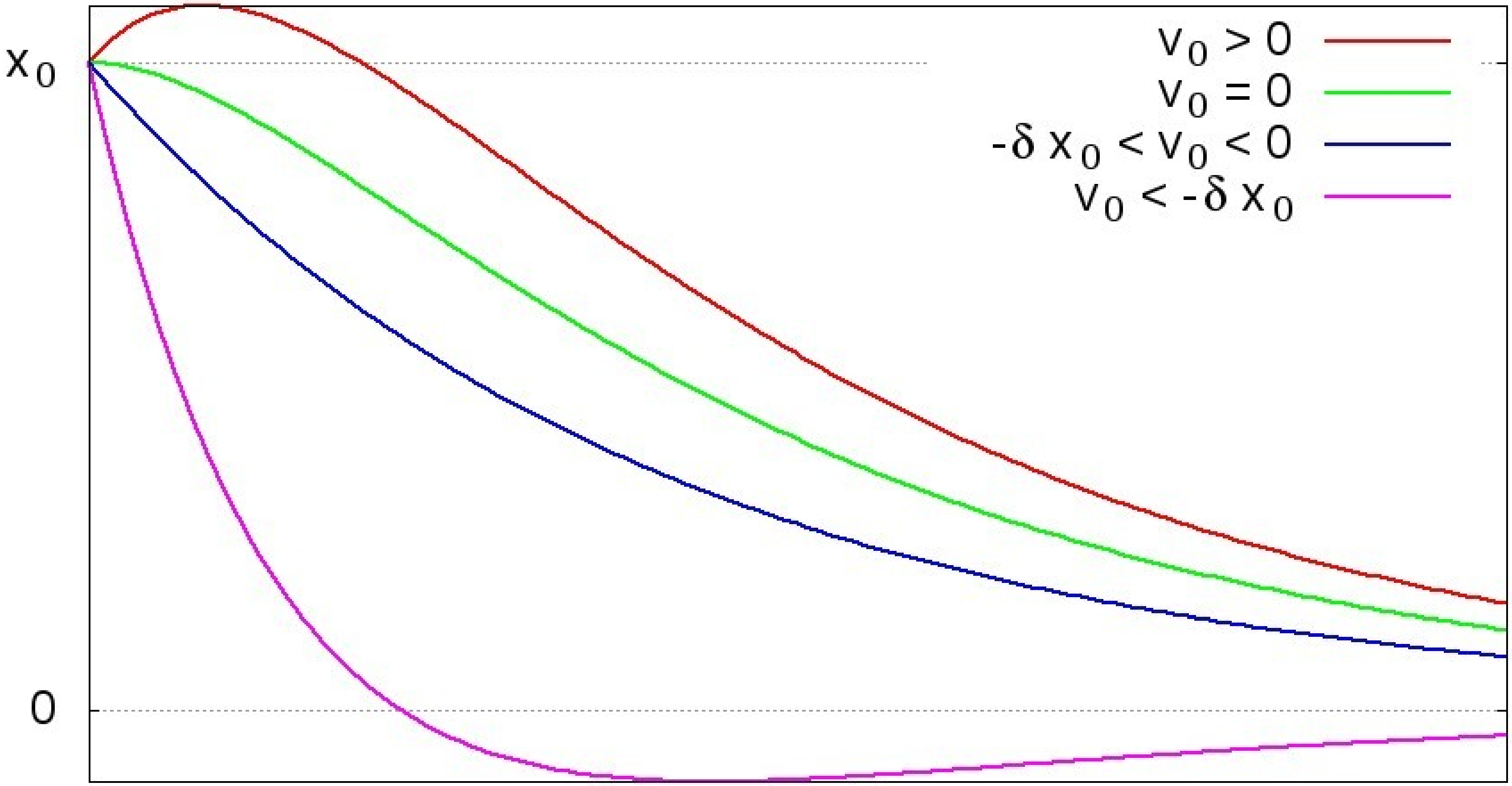
2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Die Konstanten A_1 und A_2 werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$
\begin{array}{lclclcl}
x(0)=x_0 & \rightarrow & A_1 & + & A_2 & = & x_0 \\
\dot{x}(0)=v_0 & \rightarrow & \lambda_1 A_1 & + & \lambda_2 A_2 & = & v_0
\end{array}
$$

$$
\rightarrow \quad
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(\delta+\mu)\, x_0 + v_0}{2\mu} \\
A_2 &= \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{(\delta-\mu)\, x_0 + v_0}{2\mu}
\end{aligned}
$$

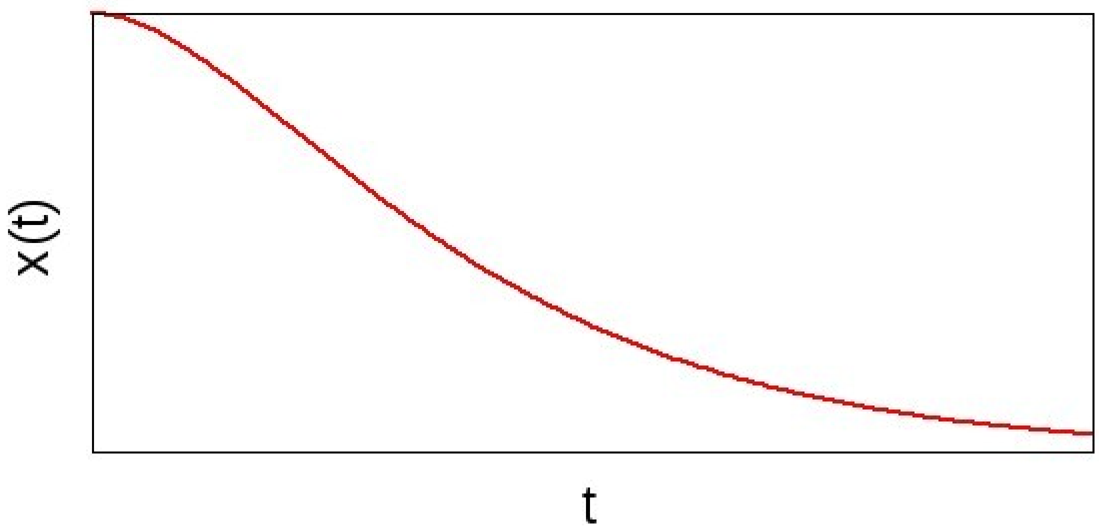
2.3 Freie gedämpfte Schwingungen



2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Kritische Dämpfung:
  - Es gibt nur eine reelle Lösung: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$
  - Die allgemeine Lösung ist: $x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}$
  - Die Konstanten A_1 und A_2 werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.
  - Dieser Fall wird auch als *aperiodischer Grenzfall* bezeichnet.

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen



- Der Ausschlag geht schneller gegen null als bei starker Dämpfung.
- Technische Anwendung findet kritische Dämpfung z. B. bei der Auslegung von Messgeräten.

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Schwache Dämpfung:
  - Es gibt zwei komplexe Lösungen:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i\,\omega_d \quad \text{mit} \quad \omega_d = \omega\sqrt{1-D^2}$$

  - Die allgemeine Lösung lautet:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right)$$

  - Die Konstanten A_1 und A_2 sind komplex:

$$A_1 = a_1 + i\,b_1, \quad A_2 = a_2 + i\,b_2$$

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Mit den Eulerschen Formeln

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

folgt:
$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\delta t}\Big[&(a_1 + i\,b_1)\big(\cos(\omega_d t) + i\sin(\omega_d t)\big) \\ &+ (a_2 + i\,b_2)\big(\cos(\omega_d t) - i\sin(\omega_d t)\big)\Big] \\ = e^{-\delta t}\Big[&(a_1 + a_2)\cos(\omega_d t) - (b_1 - b_2)\sin(\omega_d t) \\ &+ i\big((b_1 + b_2)\cos(\omega_d t) + (a_1 - a_2)\sin(\omega_d t)\big)\Big] \end{aligned}$$

- Damit die Lösung reell ist, muss gelten:

$$a_1 = a_2 = \frac{C_c}{2}, \quad b_1 = -b_2 = -\frac{C_s}{2}$$

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Damit lautet die allgemeine reelle Lösung:

$$x(t)=e^{-\delta t}\left(C_c\cos(\omega_d t)+C_s\sin(\omega_d t)\right)$$

- Für die Geschwindigkeit folgt:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-\delta e^{-\delta t}\left(C_c\cos(\omega_d t)+C_s\sin(\omega_d t)\right)\\&\quad+e^{-\delta t}\omega_d\left(-C_c\sin(\omega_d t)+C_s\cos(\omega_d t)\right)\\&=e^{-\delta t}\left[(\omega_d C_s-\delta C_c)\cos(\omega_d t)-(\omega_d C_c+\delta C_s)\sin(\omega_d t)\right]\end{aligned}$$

- Anfangsbedingungen:

$$x(0)=x_0 \quad\rightarrow\quad C_c=x_0$$

$$\dot{x}(0)=v_0 \quad\rightarrow\quad v_0=\omega_d C_s-\delta C_c \quad\rightarrow\quad C_s=\frac{v_0+\delta x_0}{\omega_d}$$

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Ergebnis:

$$x(t)=e^{-\delta t}\left[x_0\cos(\omega_d t)+\left(\frac{v_0+\delta x_0}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right]$$

- Wie im ungedämpften Fall lässt sich die Lösung auch in der Form

$$x(t)=C\,e^{-\delta t}\cos(\omega_d t+\phi)$$

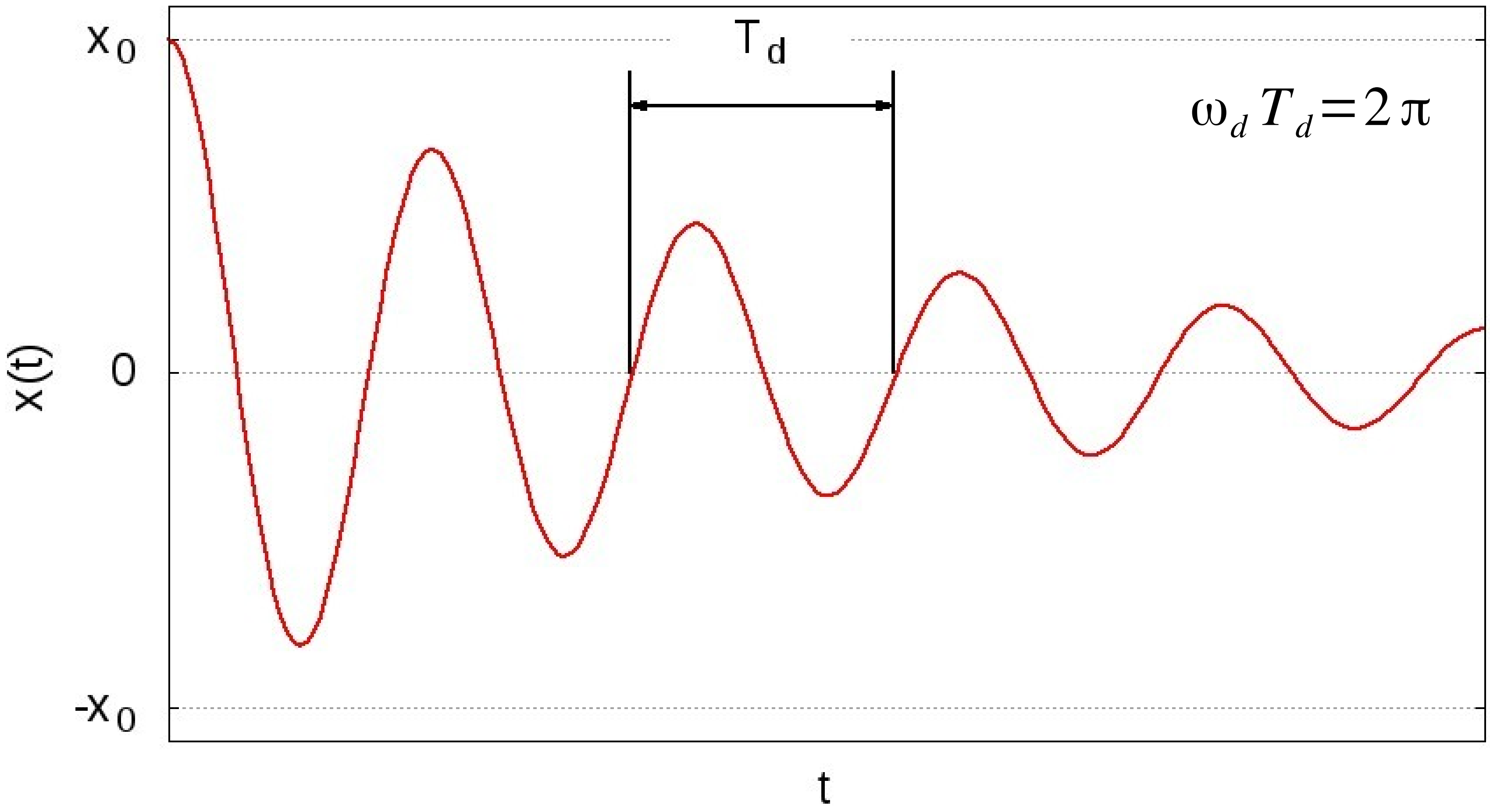
schreiben.

- Dabei gilt:

$$C=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+\delta x_0}{\omega_d}\right)^2},\quad \tan(\phi)=-\frac{v_0+\delta x_0}{\omega_d x_0}$$

$$x_0=C\cos(\phi),\quad \frac{v_0+\delta x_0}{\omega_d}=-C\sin(\phi)$$

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen



2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Die Schwingung klingt exponentiell ab.
- Die Frequenz f_d der gedämpften Schwingung ist kleiner als die Frequenz f der ungedämpften Schwingung:

$$\frac{f_d}{f} = \frac{\omega_d}{\omega} = \sqrt{1 - D^2}$$

- Bei vielen praktischen Anwendungen gilt: $D < 5\ \%$
- Für $D = 5\ \%$ gilt

$$\frac{f_d}{f} = \sqrt{1 - 0{,}05^2} = 0{,}9987\,,$$

d. h. die Abweichung von der Frequenz der ungedämpften Schwingung beträgt etwa 0,1 %.

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Logarithmisches Dekrement:
  - Für das Verhältnis von zwei Ausschlägen im Abstand einer Periode T_d gilt:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \frac{C\, e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \phi)}{C\, e^{-\delta(t+T_d)} \cos(\omega_d (t+T_d) + \phi)} = e^{\delta T_d}$$

  - Das *logarithmische Dekrement* ist definiert durch

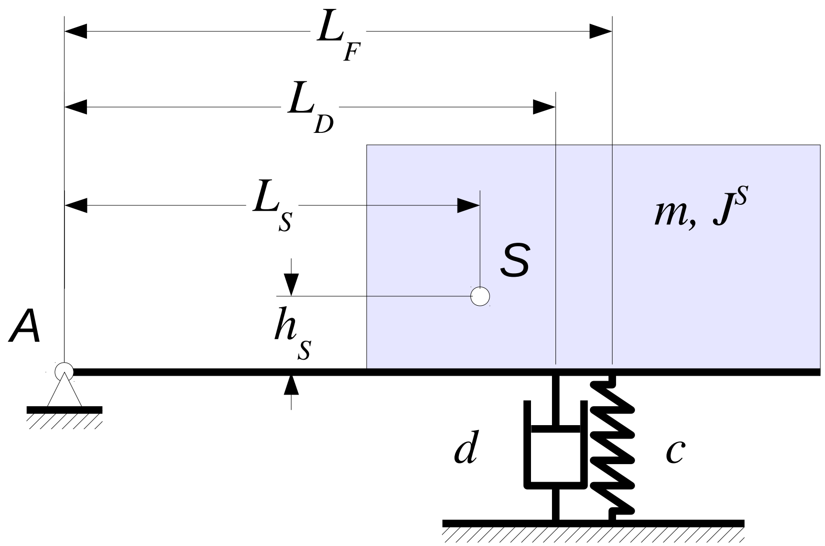
$$\Lambda = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_d)}\right) = \delta\, T_d = \delta \frac{2\pi}{\omega_d} = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}$$

  - Für sehr schwache Dämpfung ($D < 10\,\%$) gilt die Näherung:

$$\sqrt{1-D^2} \approx 1 \;\;\rightarrow\;\; \Lambda \approx 2\pi D$$

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Beispiel: Einachsiger Anhänger



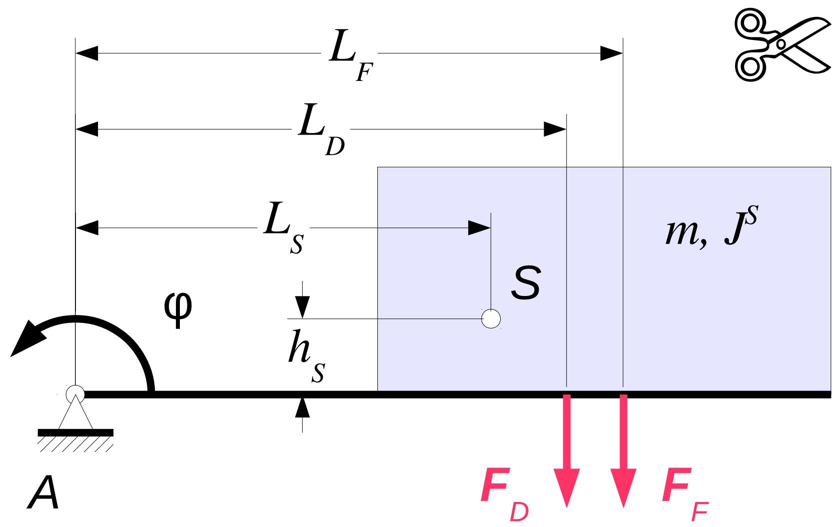
- Das Berechnungsmodell des Anhängers besteht aus einem starren Körper mit Masse m und Massenträgheitsmoment J^S bezüglich des Schwerpunkts.
- Das Fahrwerk wird durch eine Feder und einen Dämpfer beschrieben.
- Gegeben:
  - m, J^S, c
  - L_F, L_D, L_S, h_S

2.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Gesucht:
  - Frequenz f der ungedämpften Schwingung
  - Wert der Dämpferkonstanten d, damit eine Anfangsauslenkung ϕ_0 nach zwei vollen Schwingungen auf $\phi_0/50$ abklingt.
- Die Auslenkungen können als klein angenommen werden.

- Massenträgheitsmoment bezüglich Punkt A:

$$J^A = J^S + m\left(L_S^2 + h_S^2\right)$$



2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Drallsatz: $\sum M^A = J^A \ddot{\phi} \;:\; -L_F F_F - L_D F_D = J^A \ddot{\phi}$

- Bei kleinen Auslenkungen gilt für die Kräfte:

$$F_F = c\, L_F\, \phi, \quad F_D = d\, L_D\, \dot{\phi}$$

- Damit lautet die Bewegungsgleichung:

$$J^A \ddot{\phi} + d\, L_D^2\, \dot{\phi} + c\, L_F^2\, \phi = 0$$

- Für die Schwingungsgleichung folgt:

$$\ddot{\phi} + \frac{d\, L_D^2}{J^A}\, \dot{\phi} + \frac{c\, L_F^2}{J^A}\, \phi = 0$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Aus der Schwingungsgleichung kann abgelesen werden:

$$\omega^2 = \frac{c\,L_F^2}{J^A} \;\rightarrow\; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c\,L_F^2}{J^A}} \quad , \quad 2\delta = \frac{d\,L_D^2}{J^A}$$

- Ausschlag nach zwei vollen Schwingungen:

$$\phi(2T_d) = C\,e^{-2\delta T_d}\cos(2\omega_d T_d + \psi) = C\,e^{-2\delta T_d}\cos(4\pi + \psi)$$
$$= e^{-2\delta T_d}\phi_0 = \frac{\phi_0}{50}$$

- Es muss also gelten: $e^{2\delta T_d} = 50 \;\rightarrow\; 2\delta T_d = \ln(50)$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Mit

$$\delta T_d = \Lambda = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

folgt:

$$\frac{4\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln(50)$$

$$16\pi^2 D^2 = \ln^2(50)\left(1-D^2\right)$$

$$\left(16\pi^2 + \ln^2(50)\right) D^2 = \ln^2(50)$$

→ $D = 0{,}2972$

- Mit $\delta = \omega D$ folgt:

$$2\omega D = 2\delta = \frac{d\, L_D^2}{J^A}$$

→ $d = \dfrac{2\omega D J^A}{L_D^2}$

- Einsetzen von

$$\omega = L_F \sqrt{c / J^A}$$

ergibt:

$$d = 0{,}5944\, \frac{L_F}{L_D^2} \sqrt{c\, J^A}$$