# 3. Erzwungene Schwingungen

- Bei erzwungenen Schwingungen greift am schwingenden System eine zeitlich veränderliche äußere Anregung an.
- Kraftanregung:
  - Am schwingenden System greift eine zeitlich veränderliche äußere Kraft an.
- Weganregung:
  - An einigen Punkten des schwingenden Systems ist eine zeitlich veränderliche Bewegung vorgeschrieben.

# 3. Erzwungene Schwingungen

3.1 Kraftanregung

3.2 Weganregung

3.3 Unwuchtanregung

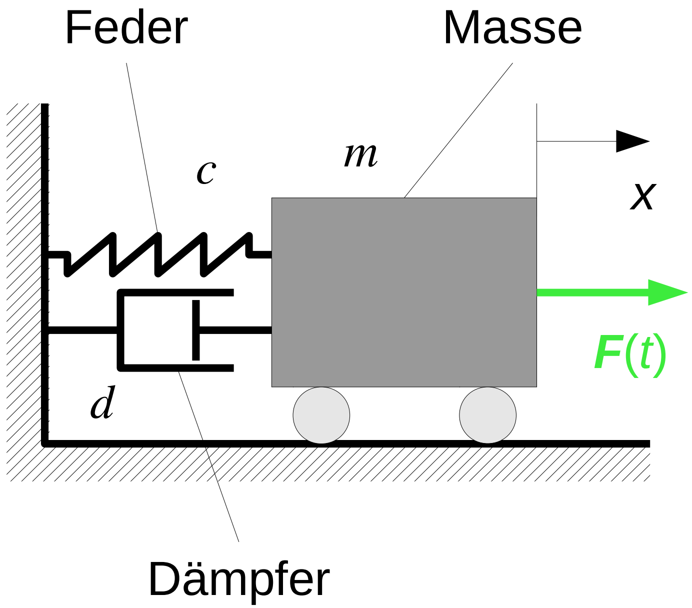
# 3.1 Kraftanregung

- Aufgabenstellung:
  - An der Masse greift eine zeitlich veränderliche Kraft $F(t)$ an.
  - Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{x}+d\dot{x}+cx=F(t)$$

  - Division durch die Masse $m$ ergibt:

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2 x=\frac{F(t)}{m}$$




# 3.1 Kraftanregung

- Harmonische Anregung:
  - Ein wichtiger Spezialfall ist die Anregung durch eine harmonische Kraft:

$$F(t) = F_a(\Omega)\cos(\Omega t)$$

  - Dabei ist $\Omega$ die *Erregerkreisfrequenz* und $F_a(\Omega)$ die Amplitude der Kraft, die im Allgemeinen von der Erregerkreisfrequenz abhängen kann.
  - Jede periodische Kraft kann als Überlagerung von harmonischen Kräften dargestellt werden.
  - Die Antwort des Systems auf eine periodische Kraft ist die Überlagerung der Antworten auf die harmonischen Kräfte.

# 3.1 Kraftanregung

- Schwingungsgleichung:
  - Mit $m = c/\omega^2$ und der statischen Lösung

$$x_S(\Omega) = \frac{F_a(\Omega)}{c}$$

lautet die Schwingungsgleichung:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_S \cos(\Omega t)}$$

  - Ihre allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus einer partikulären Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung.

# 3.1 Kraftanregung

- Lösung der homogenen Gleichung:
  - Die homogene Gleichung lautet: $\ddot{x}+2\,\delta\,\dot{x}+\omega^2\,x=0$
  - Ihre Lösung beschreibt eine freie gedämpfte Schwingung.
  - Sie hängt von den Anfangsbedingungen ab und klingt exponentiell mit der Zeit ab.
  - Nach Beendigung des so genannten *Einschwingvorgangs* kann die Lösung der homogenen Gleichung gegenüber der partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung vernachlässigt werden.
  - Die partikuläre Lösung beschreibt den *eingeschwungenen Zustand*.

# 3.1 Kraftanregung

- Partikuläre Lösung:
  - Einsetzen des Lösungsansatzes

$$x_p(t) = A_s \sin(\Omega t) + A_c \cos(\Omega t)$$
$$\dot{x}_p(t) = \Omega\left(A_s \cos(\Omega t) - A_c \sin(\Omega t)\right)$$
$$\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2\left(A_s \sin(\Omega t) + A_c \cos(\Omega t)\right)$$

in die Schwingungsgleichung ergibt:

$$-\Omega^2\left(A_s \sin(\Omega t) + A_c \cos(\Omega t)\right) + 2\,\delta\,\Omega\left(A_s \cos(\Omega t) - A_c \sin(\Omega t)\right)$$
$$+\omega^2\left(A_s \sin(\Omega t) + A_c \cos(\Omega t)\right) = \omega^2 x_S \cos(\Omega t)$$

$$\rightarrow \quad \left(-\Omega^2 A_c + 2\,\delta\,\Omega\, A_s + \omega^2 A_c - \omega^2 x_S\right)\cos(\Omega t)$$
$$= \left(\Omega^2 A_s + 2\,\delta\,\Omega\, A_c - \omega^2 A_s\right)\sin(\Omega t)$$

# 3.1 Kraftanregung

- Damit diese Gleichung für jeden Zeitpunkt $t$ erfüllt ist, müssen die Terme in den Klammern null sein:

$$\begin{aligned} \left(\omega^2-\Omega^2\right) A_c &+ 2\delta\Omega\, A_s = \omega^2 x_S \\ -2\delta\Omega\, A_c &+ \left(\omega^2-\Omega^2\right) A_s = 0 \end{aligned}$$

- Mit dem *Frequenzverhältnis* $\eta = \Omega/\omega$ und dem Lehrschen Dämpfungsmaß $D = \delta/\omega$ folgt nach Division durch $\omega^2$:

$$\begin{aligned} \left(1-\eta^2\right) A_c &+ 2D\eta\, A_s = x_S \\ -2D\eta\, A_c &+ \left(1-\eta^2\right) A_s = 0 \end{aligned}$$

- Das Gleichungssystem hat die Lösung:

$$A_c = \frac{1-\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}\, x_S, \quad A_s = \frac{2D\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}\, x_S$$

# 3.1 Kraftanregung

- Die partikuläre Lösung beschreibt eine harmonische Schwingung

$$x_p(t) = A_s \sin(\Omega t) + A_c \cos(\Omega t) = x_a \cos(\Omega t + \phi)$$

mit der Amplitude

$$x_a = \sqrt{A_c^2 + A_s^2} = \frac{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4 D^2 \eta^2}}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4 D^2 \eta^2} x_S = \frac{x_S}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4 D^2 \eta^2}}$$

und dem Phasenwinkel

$$\tan(\phi) = -\frac{A_s}{A_c} = -\frac{2 D \eta}{1-\eta^2} \quad .$$

# 3.1 Kraftanregung

- Mit dem *dynamischen Überhöhungsfaktor*

$$\boxed{V_F(\eta)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}}}$$

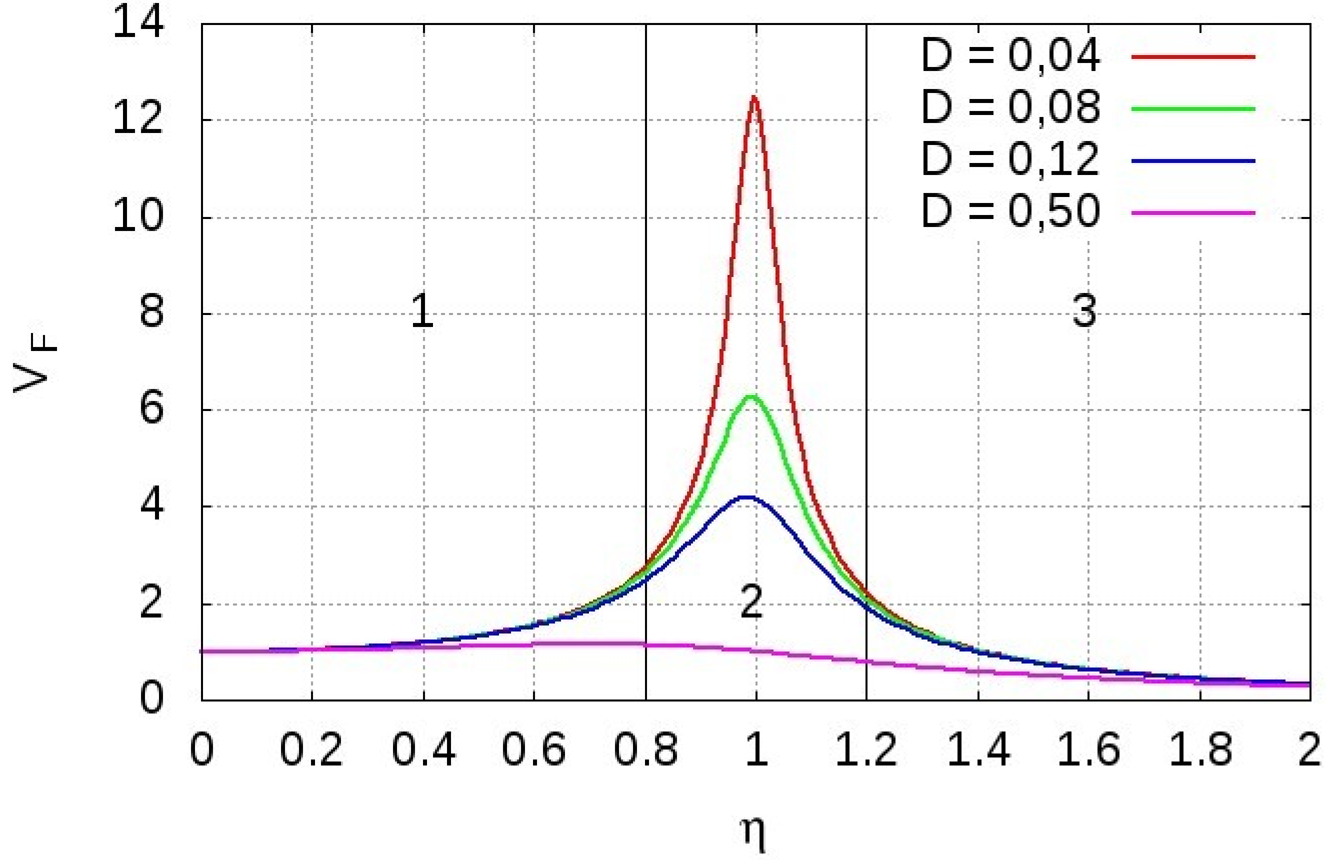
gilt:

$$x_a(\eta)=V_F(\eta)\,x_S$$

- Die Amplitude der Lösung im eingeschwungenen Zustand ergibt sich durch Multiplikation der statischen Lösung mit dem dynamischen Überhöhungsfaktor.

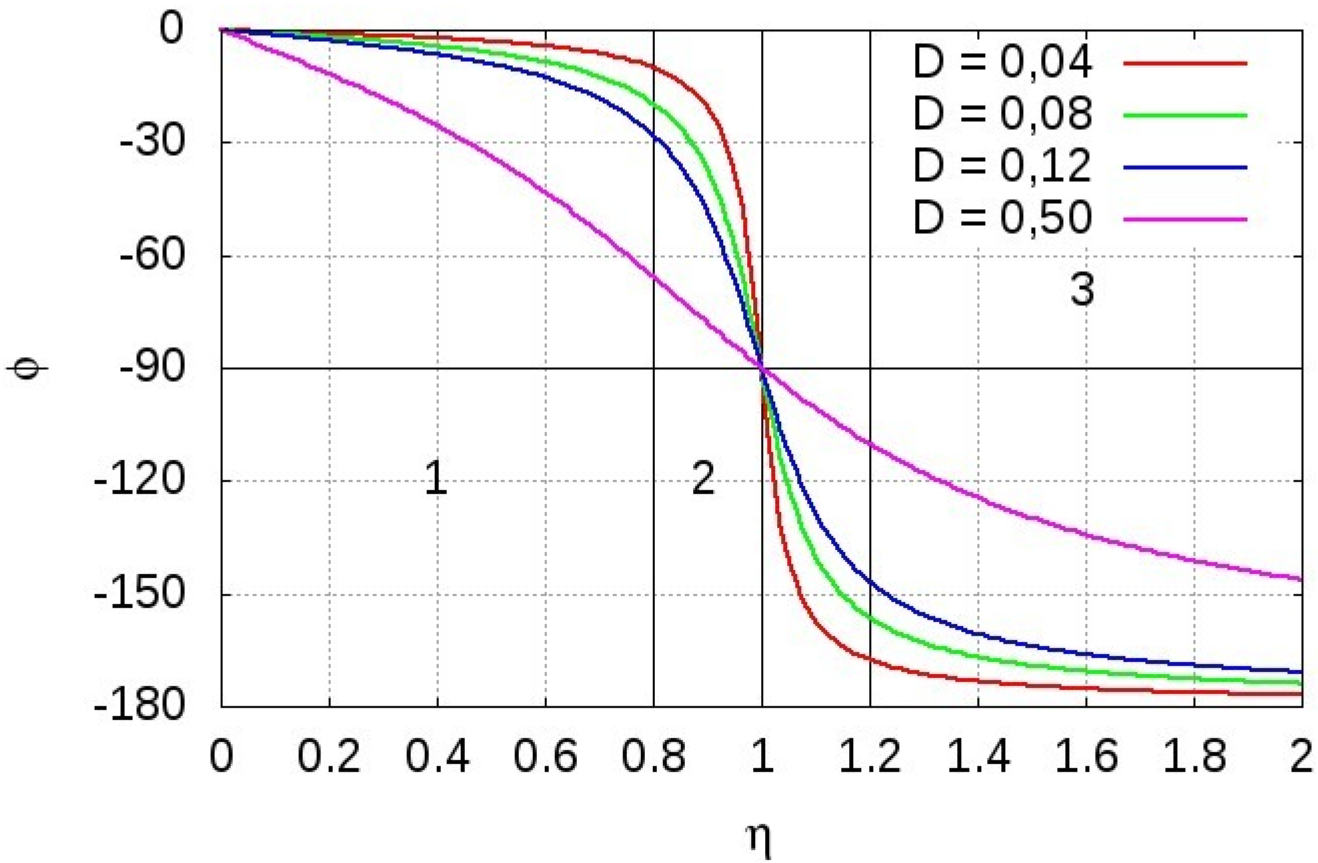
# 3.1 Kraftanregung

- Dynamischer Überhöhungsfaktor:



# 3.1 Kraftanregung

- Phasenwinkel:



# 3.1 Kraftanregung

- Diskussion der Lösung:
  - Bereich 1: $\eta < 0{,}8$: unter-kritisch
    - Bei schwacher Dämpfung ($D < 10\ \%$) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
    - Die Antwort ist in Phase mit der Anregung.
    - Es gilt in guter Näherung:

$$V_F \approx \frac{1}{1-\eta^2}$$

- Für $\eta < 1/3$ folgt:

$$V_F < \frac{1}{1-\left(1/3\right)^2} = \frac{9}{8} = 1{,}125$$

- Für $\eta < 0{,}3$ können Dämpfungs- und Trägheitskräfte gegenüber der Federkraft vernachlässigt werden: Die Antwort ist *quasistatisch.*

# 3.1 Kraftanregung

- Bereich 2: $0{,}8 < \eta < 1{,}2$: kritisch
  - Dieser Bereich wird wesentlich von der Dämpfung beeinflusst.
  - Die Antwort hat eine Phasenverschiebung von 90° gegenüber der Anregung.
  - Die Geschwindigkeit ist in Phase mit der Anregung.
  - Der Zustand bei $\eta = 1$ wird als *Resonanz* bezeichnet.
  - Bei Resonanz ist die Trägheitskraft im Gleichgewicht mit der Federkraft. Die Anregung ist im Gleichgewicht mit der Dämpfungskraft.
  - Für den dynamischen Überhöhungsfaktor gilt:

$$V_F(1) = \frac{1}{2D}$$

# 3.1 Kraftanregung

- Bereich 3: $\eta > 1{,}2$: überkritisch
  - Bei schwacher Dämpfung ($D < 10\ \%$) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
  - Die Antwort hat eine Phasenverschiebung von 180° gegenüber der Anregung.
  - Die Beschleunigung ist in Phase mit der Anregung.

- Es gilt in guter Näherung:

$$V_F \approx \frac{1}{\eta^2 - 1}$$

- Für $\eta > 3$ gilt:

$$V_F < \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

- Für $\eta > 3$ ist die Trägheitskraft groß gegenüber der Federkraft und der Dämpferkraft.

# 3.1 Kraftanregung

- Vernachlässigung der Dämpfung:
  - Außerhalb des kritischen Bereichs kann bei sehr schwacher Dämpfung ($D < 5\ \%$) die Dämpfung in der Regel vernachlässigt werden.
  - Für den Überhöhungsfaktor gilt die Näherung:

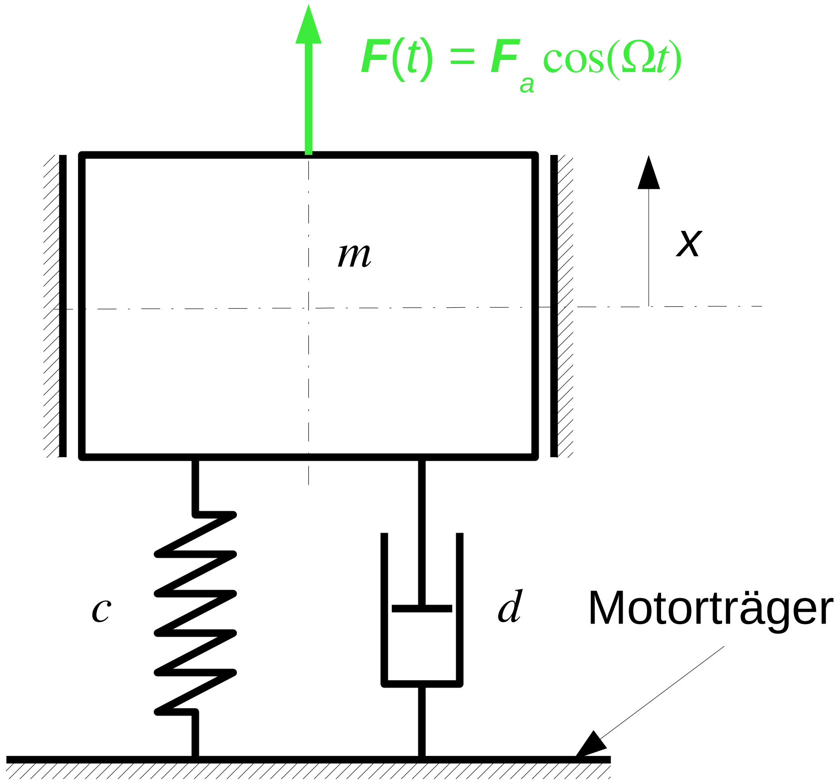
$$V_F(\eta) = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|}$$

  - Für den Phasenwinkel gilt die Näherung:

$$\phi(\eta) = \begin{cases} 0\,° & \text{für} \quad \eta < 0{,}8 \\ -180\,° & \text{für} \quad \eta > 1{,}2 \end{cases}$$

# 3.1 Kraftanregung

- Beispiel: Motorlagerung
  - Gegeben:
    - Masse $m = 1000\ \mathrm{kg}$
    - Lehrsches Dämpfungsmaß $D = 2\ \%$
    - statische Einfederung unter Eigengewicht $x_G = 10\ \mathrm{mm}$
    - Drehzahlen: $n_1 = \ \ 150\ 1/\mathrm{min}$, $n_2 = 1000\ 1/\mathrm{min}$



# 3.1 Kraftanregung

- Lastamplituden: $F_a(n_1) = 500\ \mathrm{N}$, $F_a(n_2) = 5000\ \mathrm{N}$

– Für den eingeschwungenen Zustand sollen bestimmt werden:

- Amplitude der Motorverschiebung
- Amplitude der Motorbeschleunigung
- Amplitude der Kraft auf den Motorträger

# 3.1 Kraftanregung

- Systemparameter:
  - Statische Einfederung unter Eigengewicht:

$$c\,x_G = m\,g$$

  - Eigenkreisfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_G}} = \sqrt{\frac{9810\,\mathrm{mm}}{10\,\mathrm{mm\,s^2}}} = 31{,}32\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

- Lastparameter:
  - Statische Verschiebung:

$$x_S = \frac{F_a}{c} = \frac{F_a}{\omega^2 m}$$

  - Erregerkreisfrequenz:

$$\Omega = \frac{2\pi n}{60\,\mathrm{s/min}}$$

# 3.1 Kraftanregung

- Dynamische Überhöhungsfaktoren:
  - exakt: $$V_F(\eta)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4\cdot 0{,}02^2\cdot\eta^2}}$$
  - bei Vernachlässigung der Dämpfung: $$V_F(\eta)\approx\frac{1}{\left|1-\eta^2\right|}$$
- Amplitude der Motorverschiebung: $$x_a(\eta)=x_S(\eta)\,V_F(\eta)$$
- Amplitude der Motorbeschleunigung: $$a_a(\eta)=\Omega^2\,x_a(\eta)$$

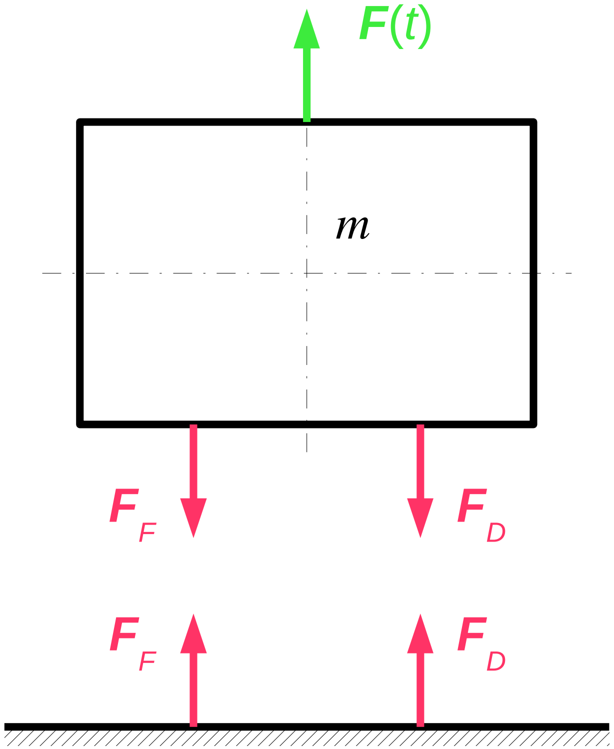
# 3.1 Kraftanregung

- Zahlenwerte:

| | $n_1$ = 150 1/min | $n_2$ = 1000 1/min |
|---|---|---|
| $x_S$ | 0,5097 mm | 5,097 mm |
| $\Omega$ | 15,71 1/s | 104,7 1/s |
| $\eta = \Omega/\omega$ | 0,5016 | 3,343 |
| $V_F$ exakt | 1,336 | 0,09827 |
| $V_F$ genähert | 1,336 | 0,09827 |
| $x_a$ | 0,6810 mm | 0,5009 mm |
| $a_a$ | 0,1681 m/s$^2$ | 5,491 m/s$^2$ |

# 3.1 Kraftanregung

- Kraft auf Motorträger:




- Auf den Motorträger wirkt die Federkraft und die Dämpferkraft:

$$\begin{aligned} F_T(t,\eta) &= F_F(t,\eta)+F_D(t,\eta)\\ &= c\,x_S\,V_F(\eta)\cos(\Omega t+\phi)\\ &\quad - d\,x_S\,V_F(\eta)\,\Omega\sin(\Omega t+\phi)\end{aligned}$$

- Für die einzelnen Amplituden gilt:

$$c\,x_S = F_a$$

$$\begin{aligned} d\,x_S &= 2\,m\,\delta\frac{F_a}{c} = \frac{2\,\delta\,F_a}{\omega^2}\\ &= \frac{2\,D}{\omega}F_a\end{aligned}$$

# 3.1 Kraftanregung

- Damit gilt: $F_T(t,\eta) = F_a V_F(\eta)\left(\cos(\Omega t + \phi) - 2D\eta \sin(\Omega t + \phi)\right)$

- Daraus folgt für die Amplitude der Kraft:

$$F_{Ta} = F_a V_F(\eta)\sqrt{1+4D^2\eta^2}$$

- Zahlenwerte:

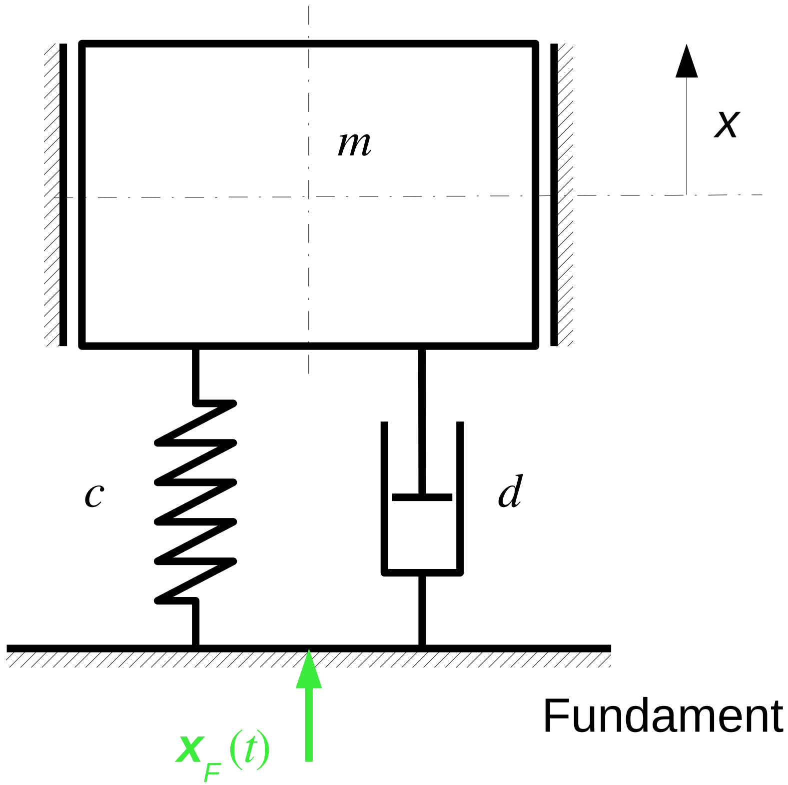
$$F_{Ta}(\eta_1) = 500\,\mathrm{N}\cdot 1{,}336\cdot\sqrt{1+4\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}5016^2} = \underline{668{,}1\,\mathrm{N}}$$
$$F_{Ta}(\eta_2) = 5000\,\mathrm{N}\cdot 0{,}09827\cdot\sqrt{1+4\cdot 0{,}02^2\cdot 3{,}343^2} = \underline{495{,}7\,\mathrm{N}}$$

# 3.2 Weganregung

- Anregung:
  - Das Fundament führt eine vorgeschriebene harmonische Bewegung durch:

$$x_F(t) = x_{Fa} \cos(\Omega t)$$

  - Beispiele:
    - Rütteltisch
    - fahrbahnerregte Fahrzeugschwingungen



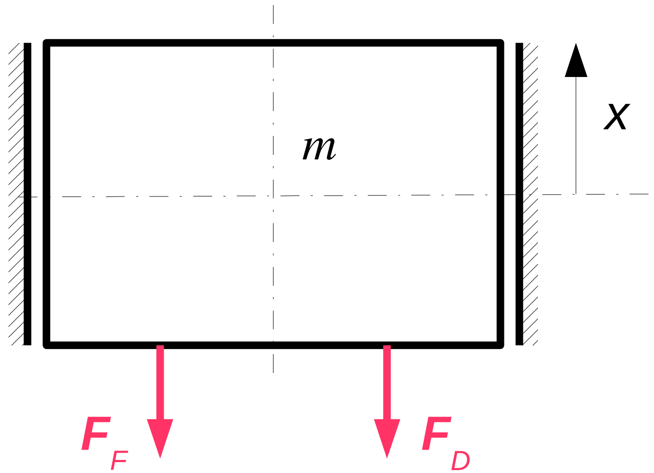
# 3.2 Weganregung

- Schwingungsgleichung:
  - Feder- und Dämpferkraft hängen von der Bewegung der Masse relativ zum Fundament ab:

$$x_r = x - x_F \rightarrow x = x_F + x_r \; : \; F_F = c\,x_r, \quad F_D = d\,\dot{x}_r$$

  - Der Schwerpunktsatz lautet:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= -F_D - F_F \\ &= -d\,\dot{x}_r - c\,x_r \end{aligned}$$




  - Mit $\ddot{x} = \ddot{x}_F + \ddot{x}_r$ folgt:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}_r + d\,\dot{x}_r + c\,x_r &= -m\,\ddot{x}_F \\ &= m\,x_{Fa}\,\Omega^2 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

# 3.2 Weganregung

- Division durch $m$ führt auf die Schwingungsgleichung

$$\boxed{\ddot{x}_r + 2\,\delta\,\dot{x}_r + \omega^2 x_r = \Omega^2 x_{Fa} \cos(\Omega t)}$$

- Lösung:
  - Für die rechte Seite der Schwingungsgleichung gilt:

$$\Omega^2 x_{Fa} \cos(\Omega t) = \omega^2 \eta^2 x_{Fa} \cos(\Omega t)$$

  - Die Lösung entspricht also der Lösung der Schwingungsgleichung bei Kraftanregung, wenn

$$x_S = \eta^2 x_{Fa}$$

eingesetzt wird.

# 3.2 Weganregung

- Damit gilt für die Relativverschiebung:

$$x_r(t,\eta)=V_F(\eta)\eta^2 x_{Fa}\cos(\Omega t+\phi)=V_B(\eta)x_{Fa}\cos(\Omega t+\phi)$$

- Dynamischer Überhöhungsfaktor und Phasenwinkel sind gegeben durch

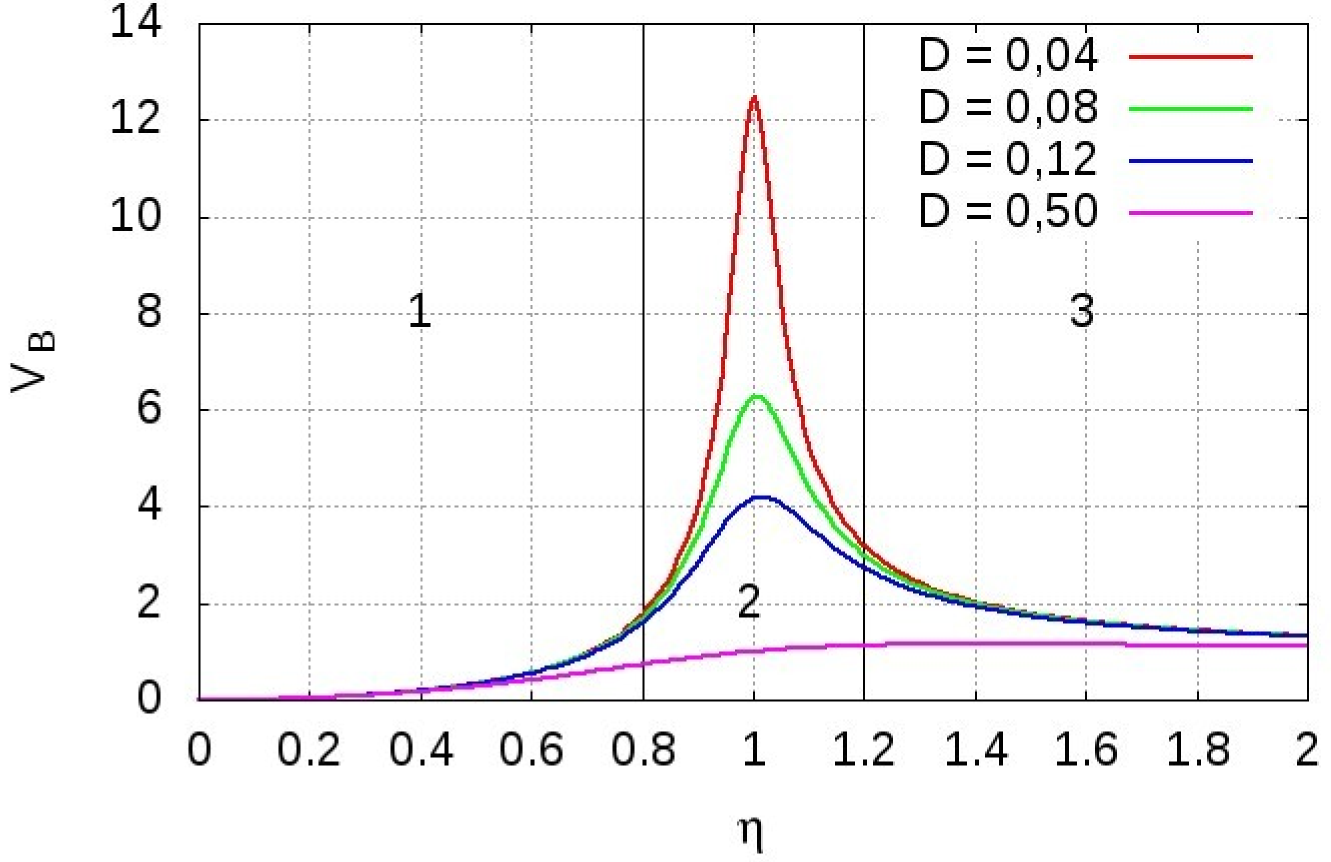
$$V_B(\eta)=\eta^2 V_F(\eta)=\frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}}, \quad \tan(\phi)=-\frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

- Für die Amplitude der Relativverschiebung gilt:

$$x_{ra}(\eta)=V_B(\eta)x_{Fa}$$

# 3.2 Weganregung

- Dynamischer Überhöhungsfaktor:



# 3.2 Weganregung

- Für die Absolutverschiebung folgt:

$$\begin{aligned} x(t,\eta) &= x_F(t,\eta) + x_r(t,\eta) \\ &= x_{Fa}\cos(\Omega t) + x_{Fa} V_B(\eta)\cos(\Omega t + \phi) \\ &= x_{Fa}\left[\cos(\Omega t) + V_B(\eta)\left(\cos(\Omega t)\cos(\phi) - \sin(\Omega t)\sin(\phi)\right)\right] \\ &= x_{Fa}\left[\left(1 + V_B(\eta)\cos(\phi)\right)\cos(\Omega t) - V_B(\eta)\sin(\phi)\sin(\Omega t)\right] \end{aligned}$$

- Ihre Amplitude berechnet sich zu

$$\begin{aligned} x_a(\eta) &= x_{Fa}\sqrt{\left(1 + V_B(\eta)\cos(\phi)\right)^2 + V_B^2(\eta)\sin^2(\phi)} \\ &= x_{Fa}\sqrt{1 + V_B^2(\eta) + 2\,V_B(\eta)\cos(\phi)} \end{aligned}$$

# 3.2 Weganregung

- Diskussion der Lösung:
  - Unterkritischer Bereich: $\eta < 0{,}8$
    - Bei schwacher Dämpfung ($D < 10\ \%$) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
    - Es gilt in guter Näherung: $V_B(\eta) \approx \dfrac{\eta^2}{1-\eta^2}$
  - Tiefer unterkritischer Bereich: $\eta < 0{,}3$

$$V_B(\eta) < \frac{0{,}3^2}{1-0{,}3^2} < 0{,}1$$

- Die Relativverschiebung ist vernachlässigbar klein.
- Die Masse folgt der Bewegung des Fundaments.

# 3.2 Weganregung

- Kritischer Bereich: $0{,}8 < \eta < 1{,}2$
  - Dieser Bereich wird wesentlich von der Dämpfung bestimmt.
  - An der Resonanzstelle $\eta = 1$ gilt: $V_B(1) = \frac{1}{2D}$
- Überkritischer Bereich: $\eta > 1{,}2$
  - Bei schwacher Dämpfung ($D < 10\ \%$) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
  - Es gilt in guter Näherung: $V_B(\eta) \approx \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1}$
  - Für große Werte von $\eta$ strebt $V_B$ gegen eins.

# 3.2 Weganregung

- Hoher überkritischer Bereich: $\eta > 4$

$$V_B(\eta) < \frac{4^2}{4^2-1} = \frac{16}{15} < 1{,}1$$

  - Der Überhöhungsfaktor ist nahezu eins.
  - Der Phasenwinkel ist nahezu -180°.
  - Die Relativverschiebung ist entgegengesetzt gleich groß wie die Verschiebung des Fundaments.
  - Die Absolutverschiebung der Masse geht gegen null. Die Masse steht nahezu still.

# 3.2 Weganregung

- Vernachlässigung der Dämpfung:
  - Außerhalb des kritischen Bereichs kann bei sehr schwach gedämpften Systemen ($D < 5\ \%$) die Dämpfung vernachlässigt werden.
  - Für den Überhöhungsfaktor gilt die Näherung: $V_B(\eta) = \dfrac{\eta^2}{\left|1-\eta^2\right|}$
  - Für den Phasenwinkel gilt die Näherung:

$$\phi(\eta) = \begin{cases} 0° & \text{für} \quad \eta < 0{,}8 \\ -180° & \text{für} \quad \eta > 1{,}2 \end{cases}$$

  - Für die Absolutverschiebung gilt die Näherung:

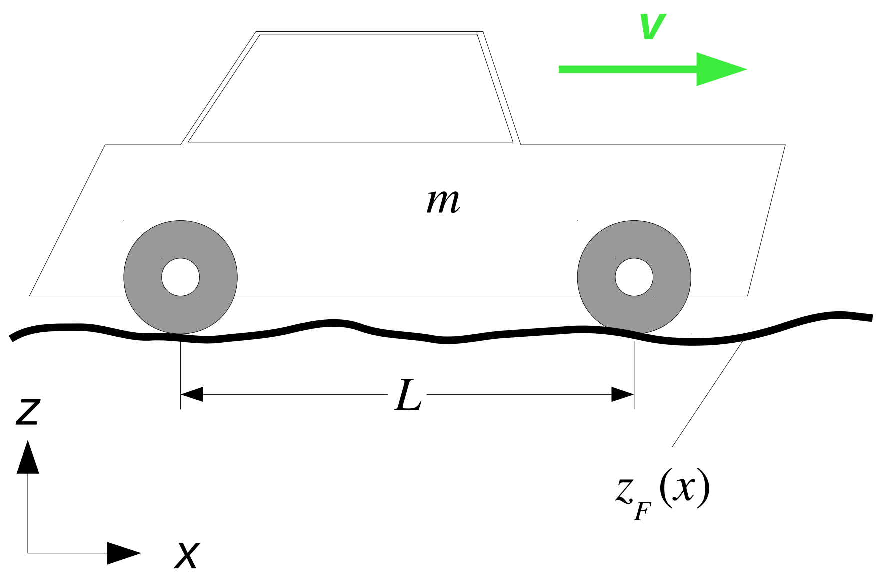
$$x(t,\eta) = \begin{cases} x_{Fa}\left(1+V_B(\eta)\right)\cos(\Omega t) & \text{für} \quad \eta < 0{,}8 \\ x_{Fa}\left(1-V_B(\eta)\right)\cos(\Omega t) & \text{für} \quad \eta > 1{,}2 \end{cases}$$

# 3.2 Weganregung

- Beispiel:
  - Ein Fahrzeug der Masse $m$ fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $v$.
  - Die Unebenheit der Fahrbahn wird beschrieben durch

$$z_F(x) = z_{Fa} \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

  - Reale Unebenheiten werden durch Unebenheitsspektren beschrieben.



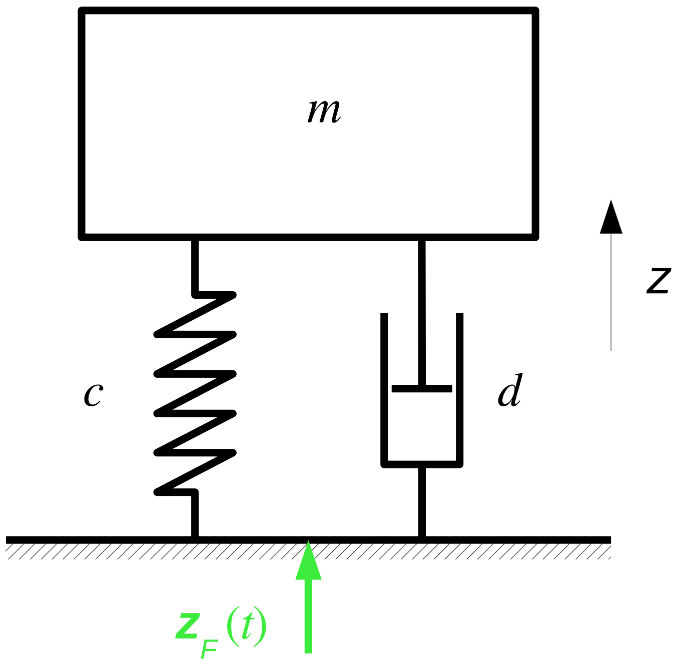

  - Daten finden sich in der Norm ISO 8608 und im VDI-Bericht 877.

# 3.2 Weganregung

- Gegeben:
  - Masse: $m = 1500\ \mathrm{kg}$, Federsteifigkeit: $c = 1{,}5\cdot 10^5\ \mathrm{N/m}$
  - Lehrsches Dämpfungsmaß: $D = 20\ \%$
  - Geschwindigkeit: $v = 30\ \mathrm{m/s}$
  - Wellenlänge: $\lambda = 60\ \mathrm{m}$, Amplitude: $z_{Fa} = 0{,}1\ \mathrm{m}$
  - Radabstand: $L = 2{,}5\ \mathrm{m}$
- Gesucht:
  - Relative Verschiebungsamplitude der Hubschwingung
  - Absolute Beschleunigungsamplitude der Hubschwingung

# 3.2 Weganregung

- Berechnungsmodell:
  - Der Radabstand ist klein im Vergleich zur Wellenlänge. Daher kann angenommen werden, dass die Vertikalverschiebung an beiden Rädern ungefähr gleich groß ist.
  - Das Fahrzeug wird als einfaches Feder-Masse-Dämpfer-System modelliert.



# 3.2 Weganregung

- Anregung:

$$x(t)=v\,t \;\rightarrow\; z_F(t)=z_{Fa}\cos\left(2\pi\frac{v\,t}{\lambda}\right)=z_{Fa}\cos(\Omega\,t)\;\text{ mit }\;\Omega=2\pi\frac{v}{\lambda}$$

- Frequenzverhältnis:

$$\Omega=2\pi\frac{30\,\mathrm{m/s}}{60\,\mathrm{m}}=3{,}142\,\frac{1}{\mathrm{s}},\quad \omega=\sqrt{\frac{1{,}5\cdot 10^5\,\mathrm{N/m}}{1500\,\mathrm{kg}}}=10\,\frac{1}{\mathrm{s}} \;\rightarrow\; \eta=0{,}3142$$

- Dynamischer Überhöhungsfaktor:

$$V_B(0{,}3142)=\frac{0{,}3142^2}{\sqrt{\left(1-0{,}3142^2\right)^2+4\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}3142^2}}=0{,}1085$$

# 3.2 Weganregung

- Amplitude der Relativverschiebung:

$$z_{ra} = z_{Fa} V_B(0{,}3142) = 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}1085 = \underline{0{,}01085\,\mathrm{m}}$$

- Amplitude der Absolutbeschleunigung:

$$\tan(\phi) = -\frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3142}{1 - 0{,}3142^2} = -0{,}1394$$

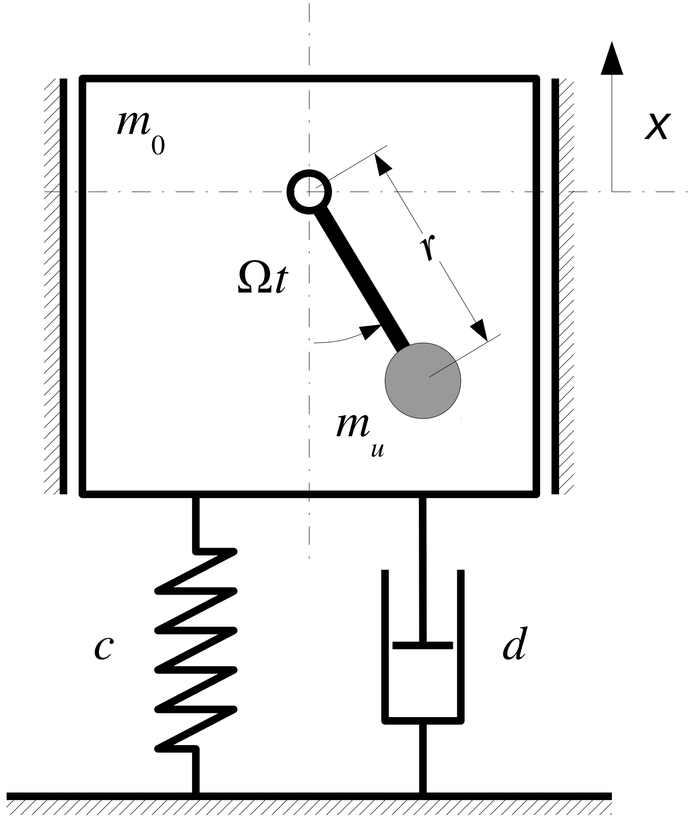
$$\cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\phi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}1394^2}} = 0{,}9904$$

$$z_a = 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{1 + 0{,}1085^2 + 2 \cdot 0{,}1085 \cdot 0{,}9904} = 0{,}1108\,\mathrm{m}$$

$$a_a = \Omega^2 z_a = 3{,}142^2\,\mathrm{s}^{-2} \cdot 0{,}1108\,\mathrm{m} = \underline{1{,}094\,\mathrm{m/s^2}}$$

# 3.3 Unwuchtanregung

- Rotierende Unwucht:
  - Die Masse $m_0$ wird durch die Zentrifugalkraft der rotierenden Masse $m_u$ zu Schwingungen angeregt.
  - Beispiele:
    - Motor
    - Rad
    - Rüttler



# 3.3 Unwuchtanregung

- Schwingungsgleichung:
  - Kinematik:

$$x_u = x - r\cos(\Omega t)$$
$$\ddot{x}_u = \ddot{x} + r\Omega^2\cos(\Omega t)$$

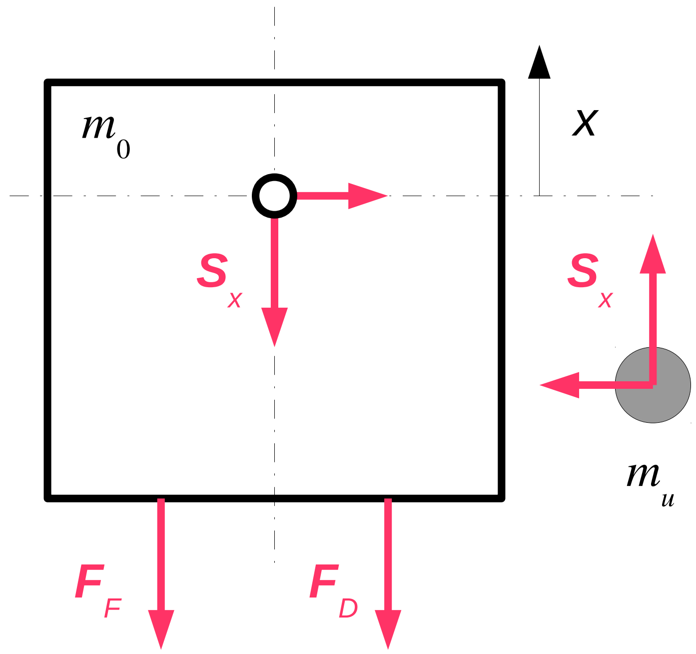
  - Unwuchtmasse:

$$\sum F_x = m_u \ddot{x}_u \ : \ m_u \ddot{x}_u = S_x$$

  - Schwinger:

$$\sum F_x = m_0 \ddot{x} \ : \ m_0 \ddot{x} = -F_F - F_D - S_x$$

  - Kraftgesetze: $F_F = c\,x\,, \quad F_D = d\,\dot{x}$



# 3.3 Unwuchtanregung

- Einsetzen der Kräfte in die Gleichung für den Schwinger ergibt:

$$m_0 \ddot{x} = -c\,x - d\,\dot{x} - m_u\left(\ddot{x} + r\,\Omega^2 \cos(\Omega\,t)\right)$$

$$\rightarrow \quad (m_0 + m_u)\ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = -m_u\,r\,\Omega^2 \cos(\Omega\,t)$$

- Mit der Gesamtmasse $m = m_0 + m_u$ folgt:

$$m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = -m_u\,r\,\Omega^2 \cos(\Omega\,t)$$

- Division durch die Gesamtmasse führt auf die Schwingungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega^2 x = -\Omega^2 r_m \cos(\Omega\,t) \quad \text{mit} \quad r_m = \frac{m_u}{m} r$$

# 3.3 Unwuchtanregung

- Lösung:
  - Die Schwingungsgleichung bei Unwuchtanregung ist vom gleichen Typ wie die Schwingungsgleichung bei Weganregung.
  - Sie hat die Lösung: $x(t,\eta) = -r_m V_B(\eta)\cos(\Omega t + \phi)$
  - Für die Amplitude gilt: $x_a(\eta) = V_B(\eta) r_m$