3.2 Momentanpol

Lösungen

Aufgabe 1:

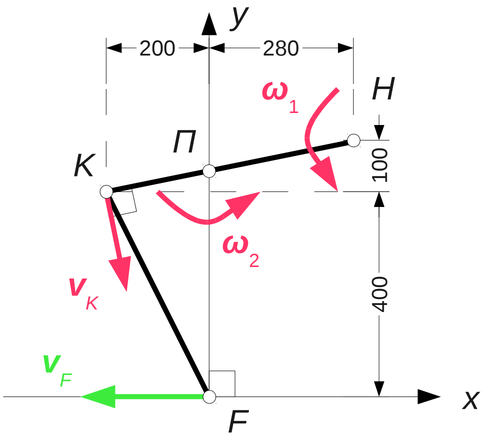
a) Momentanpol des Unterschenkels:

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_F$ von Punkt F zeigt in Richtung der negativen x-Achse.

Punkt K bewegt sich auf einer Kreisbahn um Punkt H. Seine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_K$ steht daher senkrecht auf der Geraden KH.

Der Momentanpol ist der Schnittpunkt der y-Achse, die senkrecht auf $\boldsymbol{v}_F$ steht, und der Geraden KH, die senkrecht auf $\boldsymbol{v}_K$ steht.

Die y-Koordinate des Momentanpols berechnet sich aus



$$\frac{100}{480}=\frac{y_\Pi-400}{200}$$

zu

$$y_\Pi=400+200\cdot\frac{100}{480}=\underline{441{,}67} \quad .$$

b) Winkelgeschwindigkeiten:

In der gezeichneten Lage dreht sich der Unterschenkel mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 um den Momentanpol Π. Für die Geschwindigkeit v_F von Punkt F gilt daher:

$$v_F=-y_\Pi\,\omega_2$$

Der Punkt F dreht sich aber auch mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um den Mittelpunkt M des Kettenrads. Daher gilt auch:

$$v_F=\Omega\, r_{MF}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt für die Winkelgeschwindigkeit des Unterschenkels:

$$\omega_2 = -\frac{r_{MF}}{y_\Pi}\Omega$$

Zahlenwert: $\omega_2 = -\frac{200}{441{,}67} \cdot 3\frac{1}{s} = \underline{-1{,}358\frac{1}{s}}$

Als Teil des Unterschenkels dreht sich das Knie mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 um den Momentanpol Π des Unterschenkels. Daher gilt für seine Geschwindigkeit:

$$v_K = \omega_2 r_{\Pi K}$$

Als Teil des Oberschenkels dreht sich das Knie mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um Punkt H. Daher gilt für seine Geschwindigkeit auch:

$$v_K = \omega_1 r_{HK}$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnet sich die Winkelgeschwindigkeit des Oberschenkels zu

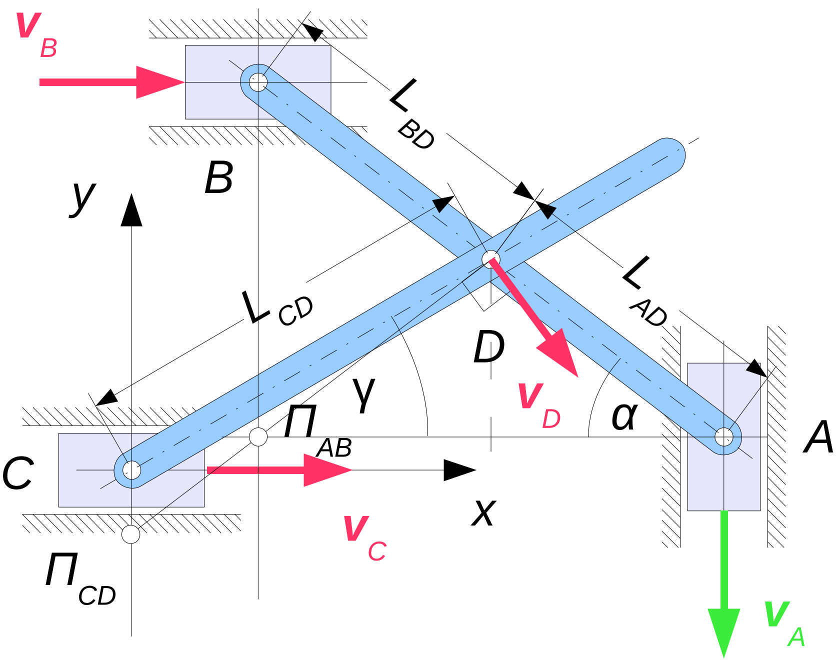
$$\omega_1 = \frac{r_{\Pi K}}{r_{HK}}\omega_2 \quad .$$

Aus Ähnlichkeitsbetrachtungen folgt: $\frac{r_{\Pi K}}{r_{HK}} = \frac{200}{480}$

Zahlenwert: $\omega_1 = -\frac{200}{480} \cdot 1{,}358\frac{1}{s} = \underline{-0{,}566\frac{1}{s}}$

Aufgabe 2:

a) Lage der Momentanpole:



Für die Punkte *A* und *B* sind die Richtungen der Geschwindigkeiten bekannt. Damit kann die Lage des Momentanpols des Trägers *AB* bestimmt werden. Wenn die Lage des Momentanpols des Trägers *AB* bekannt ist, kann die Richtung der Geschwindigkeit von Punkt *D* angegeben werden. Damit kann dann auch die Lage des Momentanpols des Trägers *CD* bestimmt werden.

Koordinaten der Punkte *A, B* und *D*:

$$x_A = L_{CD}\cos(\gamma) + L_{AD}\cos(\alpha) \quad , \quad y_A = L_{CD}\sin(\gamma) - L_{AD}\sin(\alpha)$$

$$x_B = L_{CD}\cos(\gamma) - L_{BD}\cos(\alpha) \quad , \quad y_B = L_{CD}\sin(\gamma) + L_{BD}\sin(\alpha)$$

$$x_D = L_{CD}\cos(\gamma) \quad , \quad y_D = L_{CD}\sin(\gamma)$$

Koordinaten der Momentanpole:

$$x_{AB} = x_B \quad , \quad y_{AB} = y_A$$

$$x_{CD} = 0$$

$$\frac{y_D - y_{AB}}{x_D - x_{AB}} = \frac{y_{AB} - y_{CD}}{x_{AB}} \quad \rightarrow \quad y_{CD} = y_{AB} - \frac{x_{AB}}{x_D - x_{AB}}\left(y_D - y_{AB}\right)$$

Zahlenwerte:

$$x_A = 400\,mm\cdot\cos(30°) + 300\,mm\cdot\cos(36{,}87°) = 586{,}4\,mm$$

$$y_A = 400\,mm \cdot \sin(30°) - 300\,mm \cdot \sin(36{,}87°) = 20{,}00\,mm$$

$$x_B = 400\,mm \cdot \cos(30°) - 250\,mm \cdot \cos(36{,}87°) = 146{,}4\,mm$$

$$y_B = 400\,mm \cdot \sin(30°) + 250\,mm \cdot \sin(36{,}87°) = 350\,mm$$

$$x_D = 400\,mm \cdot \cos(30°) = 346{,}1\,mm \quad , \quad y_D = 400\,mm \cdot \sin(30°) = 200\,mm$$

$$x_{AB} = x_B = \underline{146{,}4\,mm} \quad , \quad y_{AB} = y_A = \underline{20\,mm}$$

$$x_{CD} = \underline{0\,mm}$$

$$y_{CD} = 20\,mm - \frac{146{,}4\,mm}{346{,}1\,mm - 146{,}4\,mm}(200\,mm - 20\,mm) = \underline{-112{,}0\,mm}$$

b) <u>Winkelgeschwindigkeiten und Geschwindigkeiten:</u>

In der dargestellten Lage drehen sich beide Träger im Uhrzeigersinn. Daher werden Winkelgeschwindigkeiten im Uhrzeigersinn positiv gewählt.

Träger *AB*:

$$v_A = (x_A - x_{AB})\,\omega_{AB} \;\rightarrow\; \omega_{AB} = \frac{v_A}{x_A - x_{AB}}$$

$$v_B = (y_B - y_{AB})\,\omega_{AB} = v_A \frac{y_B - y_{AB}}{x_A - x_{AB}} = v_A \tan\alpha$$

$$v_{Dx} = (y_D - y_{AB})\,\omega_{AB} = v_A \frac{y_D - y_{AB}}{x_A - x_{AB}}$$

$$v_{Dy} = -(x_D - x_{AB})\,\omega_{AB} = -v_A \frac{x_D - x_{AB}}{x_A - x_{AB}}$$

Träger *CD*:

$$v_{Dy} = -x_D\,\omega_{CD} \;\rightarrow\; \omega_{CD} = -\frac{v_{Dy}}{x_D} = \frac{v_A}{x_D}\,\frac{x_D - x_{AB}}{x_A - x_{AB}}$$

$$v_C = -y_{CD}\,\omega_{CD} = -v_A \frac{y_{CD}}{x_D}\,\frac{x_D - x_{AB}}{x_A - x_{AB}}$$

Zahlenwerte:

$$\omega_{AB} = \frac{4000\,mm/s}{586{,}4\,mm - 146{,}4\,mm} = \frac{100}{11}\,\frac{1}{s} = \underline{9{,}091\,s^{-1}}$$

$$v_B = 4\,m/s \cdot \tan(36{,}87°) = \underline{3\,m/s}$$

$$\omega_{CD}=\frac{4000\,mm/s}{346{,}1\,mm}\cdot\frac{346{,}1\,mm-146{,}4\,mm}{586{,}4\,mm-146{,}4\,mm}=\underline{5{,}245\,s^{-1}}$$

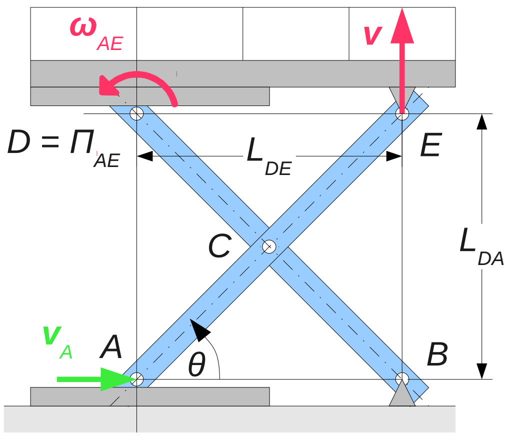
$$v_C=4\,m/s\cdot\frac{112{,}0\,mm}{346{,}1\,mm}\cdot\frac{346{,}1\,mm-146{,}4\,mm}{586{,}4\,mm-146{,}4\,mm}=\underline{0{,}5875\,m/s}$$

Aufgabe 3:

a) Zusammenhang zwischen Winkel und Geschwindigkeit:

Lösung mit Momentanpol:

Der Momentanpol des Trägers *AE* liegt im Punkt *D*.



Für die Geschwindigkeiten der Punkte *E* und *A* gilt daher:

$$v=\omega_{AE}L_{DE}$$

$$v_A=\omega_{AE}L_{DA}$$

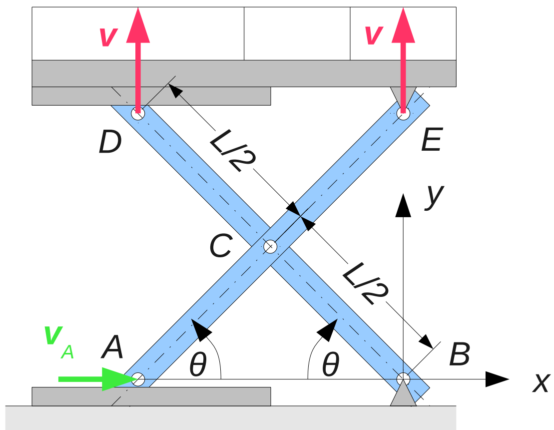
Division der beiden Gleichungen ergibt:

$$\frac{v}{v_A}=\frac{L_{DE}}{L_{DA}}=\cot(\theta)$$

Also gilt: $v=v_A\cot(\theta)$

Analytische Lösung:

Das Koordinatensystem wird in den feststehenden Punkt *B* gelegt.



Für die Geschwindigkeit von Punkt *C* gilt:

$$v_{Cx}=v_{Ax}-\dot{\theta}\left(y_C-y_A\right)=\dot{\theta}\left(y_C-y_B\right)$$

Daraus folgt:

$$v_{Ax}=v_A=2\dot{\theta}\,y_C$$

$$\rightarrow\quad\dot{\theta}=\frac{v_A}{2\,y_C}=\frac{v_A}{L\sin(\theta)}$$

Für die Geschwindigkeit von Punkt *E* gilt:

$$v = v_{Ey} = \dot{\theta}\left(x_E - x_A\right) = \dot{\theta}\, L \cos(\theta) \quad \rightarrow \quad v = v_A \cot(\theta)$$

b) <u>Zahlenwerte:</u>

$$v(\theta_1) = 0{,}6\, m/s \cdot \cot(40°) = \underline{0{,}7151\, m/s}$$

$$v(\theta_2) = 0{,}6\, m/s \cdot \cot(50°) = \underline{0{,}5035\, m/s}$$