1. Eindimensionale Bewegung

- Die Gesamtheit aller Orte, die ein Massenpunkt während seiner Bewegung einnimmt, wird als Bahnkurve oder Bahn bezeichnet.
- Bei einer eindimensionalen Bewegung ist die Bahn vorgegeben:
  - Schienenfahrzeuge
  - Schlitten von Werkzeugmaschinen
  - Magnetschwebebahn

1. Eindimensionale Bewegung

1.1 Grundbegriffe

1.2 Gleichförmige Bewegung

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

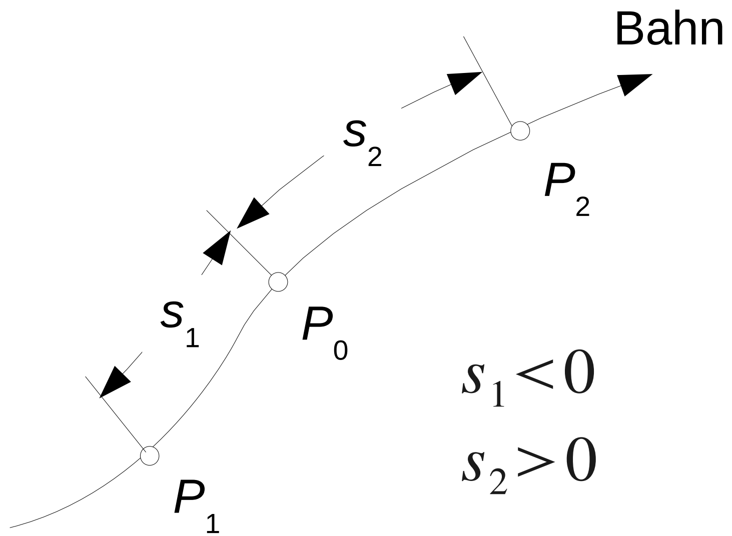
1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

1.1 Grundbegriffe

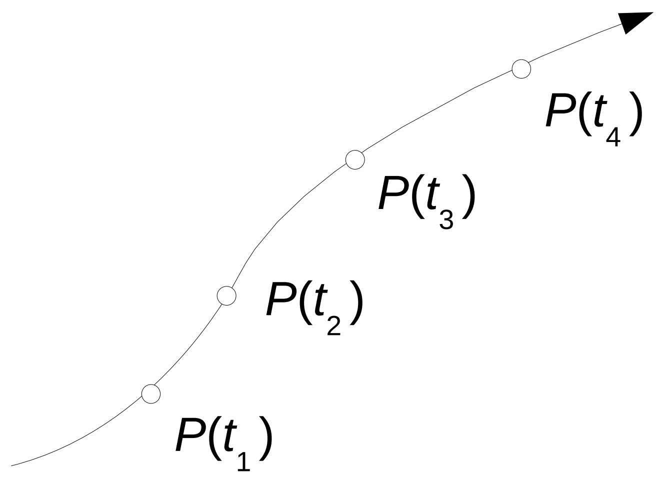
- Ort:
  - Bei vorgegebener Bahn ist die Lage eines Punktes durch die Angabe der von einem festen Punkt P_0 aus gemessenen Bogenlänge *s* eindeutig festgelegt.
  - Die Bogenlänge *s* ist die Ortskoordinate des Punktes.
  - Die Orientierung der Bahn legt das Vorzeichen der Ortskoordinate fest.



$$s_1 < 0$$
$$s_2 > 0$$

1.1 Grundbegriffe

- Bewegung:
  - Zum Zeitpunkt t_i befindet sich der Massenpunkt am Ort $P(t_i)$ mit der Ortskoordinate $s(t_i)$.
  - Der Bewegungsablauf ist vollständig beschrieben, wenn die Ortskoordinate s in Abhängigkeit von der Zeit t bekannt ist.



1.1 Grundbegriffe

- Bahngeschwindigkeit:
  - Der Differenzenquotient

$$v_m = \frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}$$

    ist ein Maß für die Schnelligkeit der Bewegung zwischen den Punkten $P(t_i)$ und $P(t_{i+1})$.

  - Er wird als mittlere Bahngeschwindigkeit zwischen den Punkten $P(t_i)$ und $P(t_{i+1})$ bezeichnet.

1.1 Grundbegriffe

- Je kleiner der Abstand der Zeiten t_i und t_{i+1} gewählt wird, desto genauer gibt die mittlere Geschwindigkeit die Schnelligkeit der Bewegung am Ort $P(t_i)$ an.
- Der Grenzwert

$$v(t_i) = \lim_{t_{i+1} \to t_i} \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} = \frac{ds}{dt}(t_i) = \dot{s}(t_i)$$

  definiert die Bahngeschwindigkeit im Punkt $P(t_i)$.
- Die Bahngeschwindigkeit ist die Ableitung der Ortskoordinate s nach der Zeit.

1.1 Grundbegriffe

- Einheiten:
  - Die Einheit der Bahngeschwindigkeit ist Längeneinheit pro Zeiteinheit.
  - Gängige Einheiten sind *m/s* und *km/h*:

$$1\,\frac{km}{h}=\frac{1000\,m}{3600\,s}=\frac{1}{3{,}6}\,\frac{m}{s},\quad 1\,\frac{m}{s}=3{,}6\,\frac{km}{h}$$

- Vorzeichen:
  - Ein positiver Wert der Bahngeschwindigkeit gibt an, dass sich der Massenpunkt in Richtung zunehmender Ortskoordinate, d.h. entsprechend der Orientierung der Bahn bewegt.
  - Ein negativer Wert der Bahngeschwindigkeit gibt an, dass sich der Massenpunkt entgegen der Orientierung der Bahn bewegt.

1.1 Grundbegriffe

- Bahnbeschleunigung:
  - Die Bahnbeschleunigung ist ein Maß für die Änderung der Bahngeschwindigkeit.
  - Der Differenzenquotient

$$a_m = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\Delta v_i}{\Delta t_i}$$

wird als mittlere Bahnbeschleunigung zwischen den Punkten $P(t_i)$ und $P(t_{i+1})$ bezeichnet.

1.1 Grundbegriffe

- Der Grenzwert

$$a(t_i)=\lim_{t_{i+1}\to t_i}\frac{\Delta v_i}{\Delta t_i}=\frac{dv}{dt}(t_i)=\dot{v}(t_i)=\ddot{s}(t_i)$$

  definiert die Bahnbeschleunigung im Punkt $P(t_i)$.

- Die Bahnbeschleunigung ist die erste Ableitung der Bahngeschwindigkeit nach der Zeit oder die zweite Ableitung der Ortskoordinate nach der Zeit.

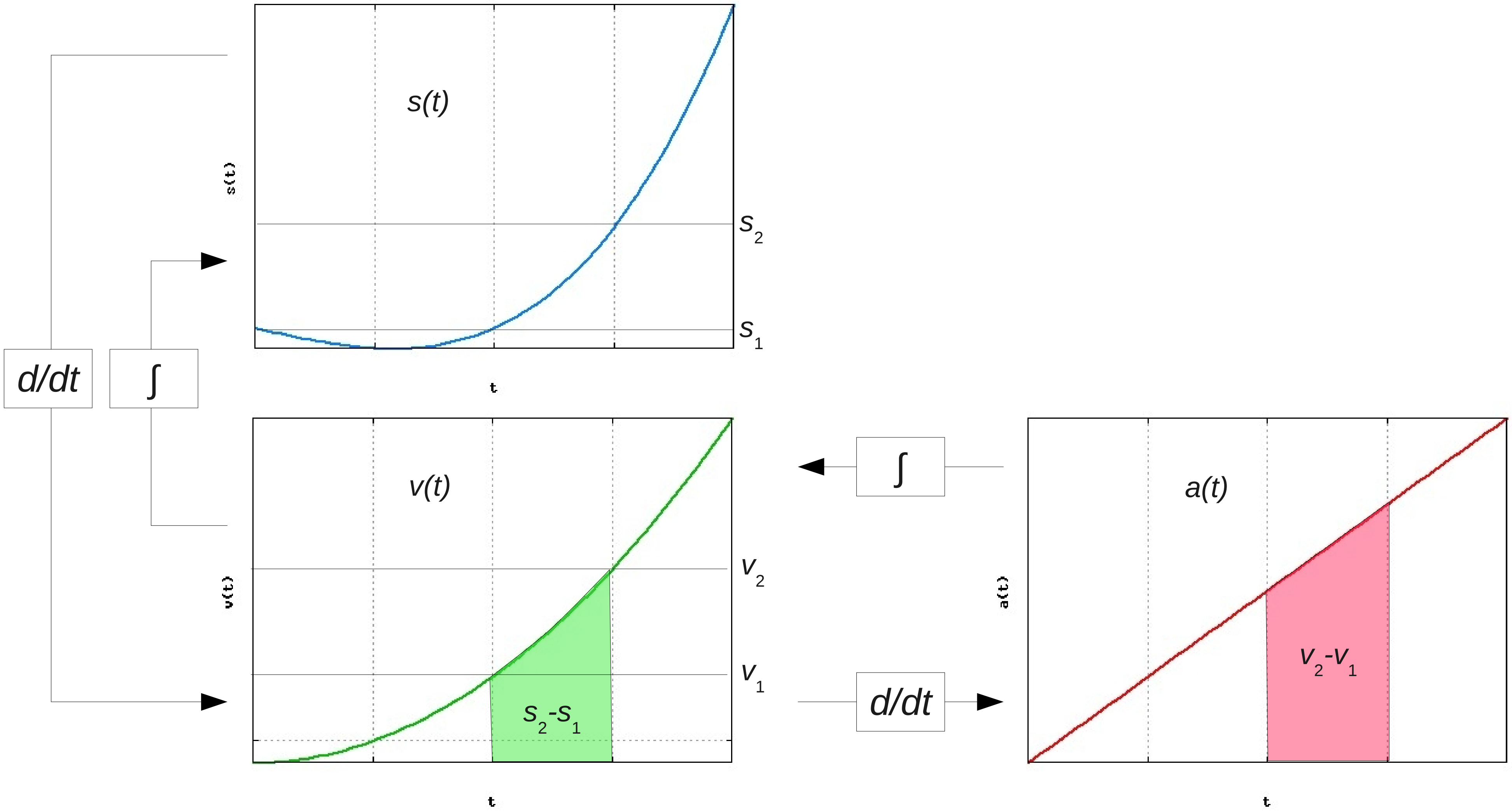
1.1 Grundbegriffe

- Einheiten:
  - Die Einheit der Bahnbeschleunigung ist Länge pro Zeit zum Quadrat.
  - Gängige Einheiten sind m/s^2 und g (Erdbeschleunigung):

$$1\,g = 9{,}81\,m/s^2$$

- Vorzeichen:
  - Haben Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung das gleiche Vorzeichen, so nimmt der Betrag der Bahngeschwindigkeit zu. Die Bewegung wird beschleunigt.
  - Haben Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung entgegengesetzte Vorzeichen, so nimmt der Betrag der Bahngeschwindigkeit ab. Die Bewegung wird verzögert.

1.1 Grundbegriffe



1.2 Gleichförmige Bewegung

- Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Bahngeschwindigkeit konstant: $v(t) = v_0 = const.$

- Dann gilt für die Bahnbeschleunigung: $a = \dfrac{dv}{dt} = 0$
- Ortskoordinate:
  - Aus der Definition der Geschwindigkeit, $v = \dfrac{ds}{dt}$

    folgt durch Trennung der Veränderlichen: $ds = v(t)\,dt$
  - Die Ortskoordinate ergibt sich durch Integration:

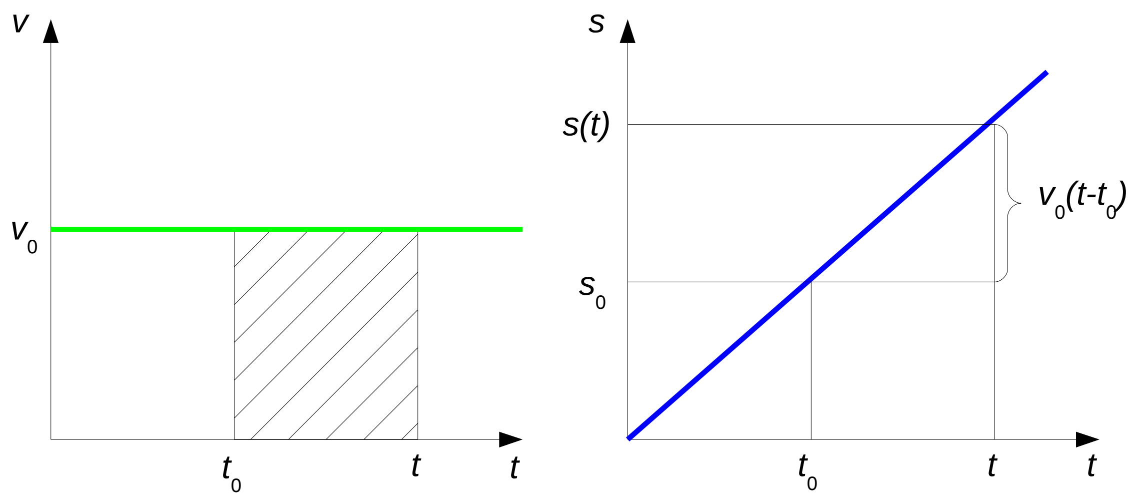
$$\int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = v_0 \int_{t_0}^{t} d\tau = v_0 (t - t_0)$$

1.2 Gleichförmige Bewegung

- Ergebnis: Ort-Zeit-Gesetz

$$s(t) - s_0 = v_0 (t - t_0) \longrightarrow \boxed{s(t) = s_0 + v_0 (t - t_0)}$$

- s_0 ist die Ortskoordinate zum Zeitpunkt t_0 (Anfangsbedingung).

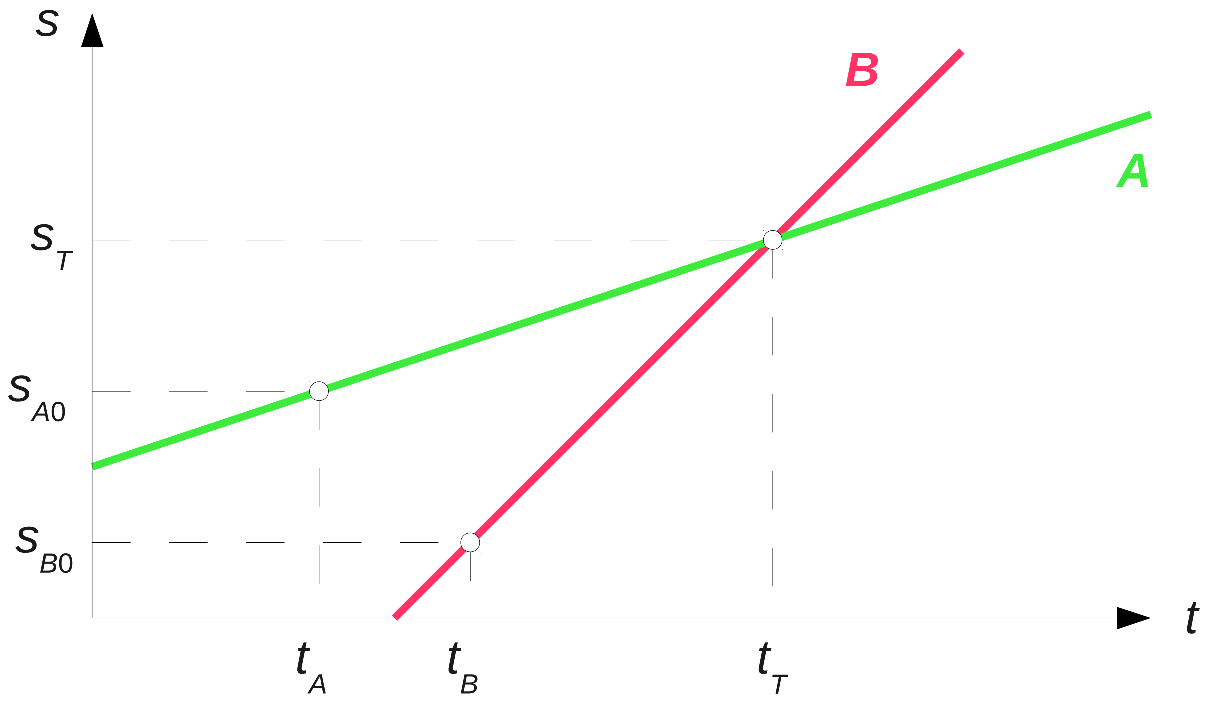


1.2 Gleichförmige Bewegung

- Beispiel:
  - Fahrzeug *A* befindet sich zum Zeitpunkt t_A am Ort P_A mit der Ortskoordinate s_{A0} und fährt mit der konstanten Bahngeschwindigkeit v_A.
  - Fahrzeug *B* befindet sich zum Zeitpunkt t_B am Ort P_B mit der Ortskoordinate s_{B0} und fährt mit der konstanten Bahngeschwindigkeit v_B.
  - Wo treffen sich die beiden Fahrzeuge?

1.2 Gleichförmige Bewegung

- Ort-Zeit-Diagramm:



1.2 Gleichförmige Bewegung

- Ort-Zeit-Gesetze:
  - Fahrzeug *A*: $s_A(t) = s_{A0} + v_A(t - t_A)$
  - Fahrzeug *B*: $s_B(t) = s_{B0} + v_B(t - t_B)$
- Bedingung für Treffen: $s_A(t_T) = s_B(t_T) = s_T$
  - Bestimmung von t_T :

$$s_{A0} + v_A(t_T - t_A) = s_{B0} + v_B(t_T - t_B)$$

$$s_{A0} - s_{B0} - v_A t_A + v_B t_B = (v_B - v_A) t_T$$

$$\rightarrow \quad t_T = \frac{s_{A0} - s_{B0} - v_A t_A + v_B t_B}{v_B - v_A}$$

1.2 Gleichförmige Bewegung

- Bestimmung von s_T aus Ort-Zeit-Gesetz für Fahrzeug *A*:

$$s_T = s_{A0} + v_A \left(\frac{s_{A0} - s_{B0} - v_A t_A + v_B t_B}{v_B - v_A} - t_A \right)$$

$$= s_{A0} + \frac{v_A}{v_B - v_A} \left(s_{A0} - s_{B0} - v_A t_A + v_B t_B - v_B t_A + v_A t_A \right)$$

$$= \frac{1}{v_B - v_A} \left(s_{A0} v_B - s_{A0} v_A + s_{A0} v_A - s_{B0} v_A + v_A v_B \left(t_B - t_A \right) \right)$$

$$= \frac{s_{A0} v_B - s_{B0} v_A + v_A v_B \left(t_B - t_A \right)}{v_B - v_A}$$

- Aus dem Ort-Zeit-Gesetz für Fahrzeug *B* folgt das gleiche Ergebnis (Übung).

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Bahnbeschleunigung konstant:

$$a(t) = a_0 = const.$$

- Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = t_0$:
  - Ort: $s(t_0) = s_0$
  - Geschwindigkeit: $v(t_0) = v_0$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Bahngeschwindigkeit:
  - Aus der Definition der Bahnbeschleunigung, $a = \dfrac{dv}{dt}$

    folgt durch Trennung der Veränderlichen: $dv = a(t)\,dt$
  - Integration von t_0 bis t ergibt

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau = a_0 \int_{t_0}^{t} d\tau = a_0 \left(t - t_0\right)$$

  - Ergebnis: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$v(t) - v_0 = a_0\left(t - t_0\right) \longrightarrow \boxed{v(t) = v_0 + a_0\left(t - t_0\right)}$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Ortskoordinate:
  - Integration von $ds = v(t)\,dt$ ergibt:

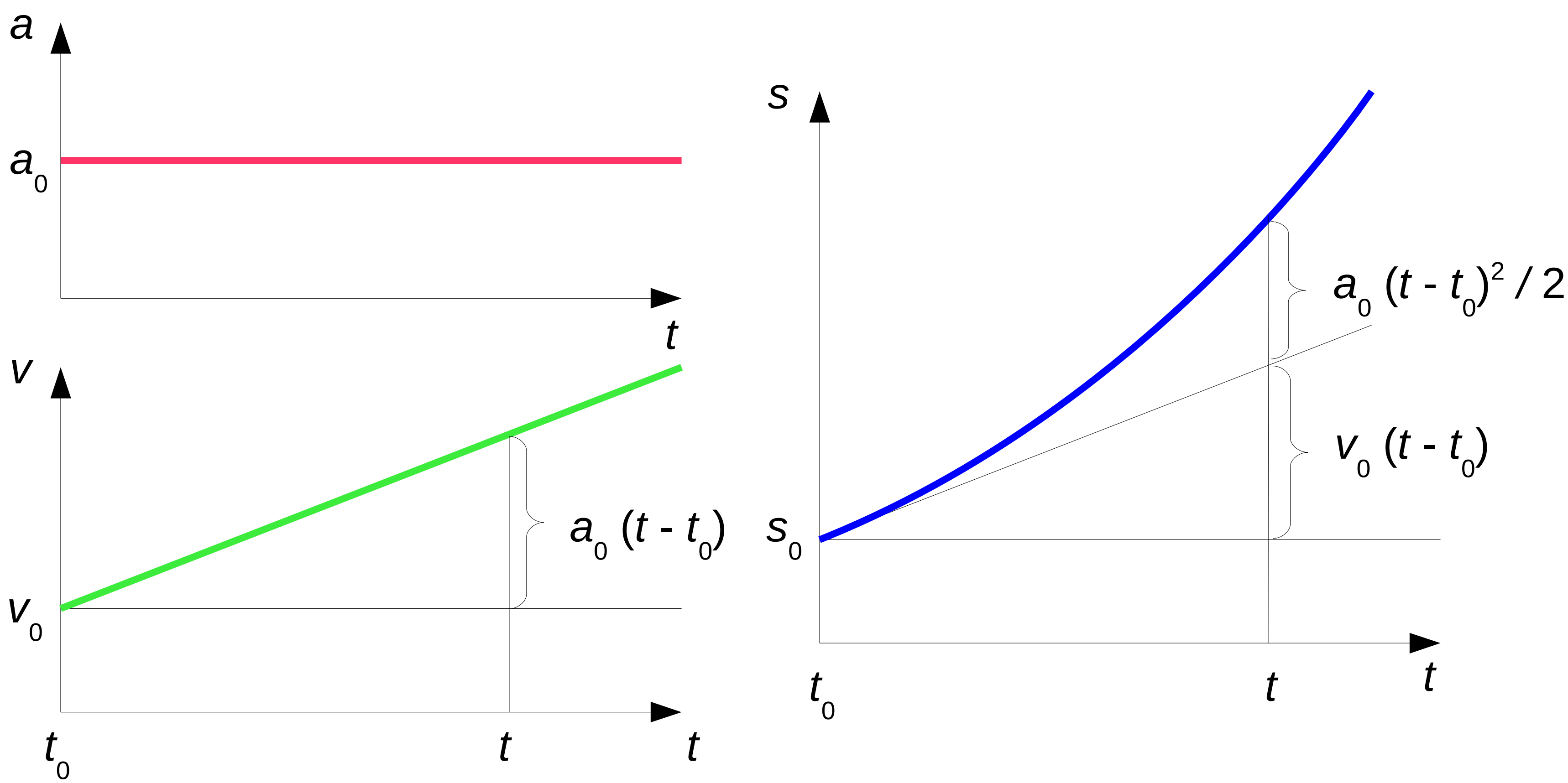
$$\int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} \left(v_0 + a_0\left(\tau - t_0\right)\right) d\tau = v_0 \int_{t_0}^{t} d\tau + a_0 \int_{t_0}^{t} \left(\tau - t_0\right) d\tau$$

$$\rightarrow \quad s(t) - s_0 = v_0\left(t - t_0\right) + \frac{a_0}{2}\left(t - t_0\right)^2$$

  - Ergebnis: Ort-Zeit-Gesetz

$$\boxed{s(t) = s_0 + v_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2} a_0\left(t - t_0\right)^2}$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung



1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Bahngeschwindigkeit als Funktion des Orts:
  - Aus dem Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz folgt: $t-t_0=\dfrac{v-v_0}{a_0}$
  - Einsetzen in das Ort-Zeit-Gesetz führt auf

$$s-s_0=v_0\left(\frac{v-v_0}{a_0}\right)+\frac{a_0}{2}\left(\frac{v-v_0}{a_0}\right)^2=\left(\frac{v-v_0}{a_0}\right)\left(v_0+\frac{v-v_0}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{v-v_0}{a_0}\right)\left(\frac{v+v_0}{2}\right)=\frac{v^2-v_0^2}{2a_0}$$

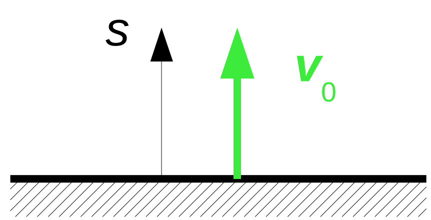
$$2a_0\left(s-s_0\right)=v^2-v_0^2 \;\rightarrow\; \boxed{v(s)=\sqrt{v_0^2+2a_0\left(s-s_0\right)}}$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Beispiel: Senkrechter Wurf
  - Aufgabenstellung: Ein Körper wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ von der Erdoberfläche mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben geworfen.
  - Gesucht:
    - Geschwindigkeit-Zeit-Verlauf
    - Ort-Zeit-Verlauf
    - Steigzeit T
    - Steighöhe H

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Wahl des Koordinatensystem:
  - Die Ortskoordinate *s* beginnt am Erdboden und ist nach oben positiv.
  - Die Zeit wird ab Abwurf des Körpers gemessen, d.h. $t_0 = 0$.
- Anfangsbedingungen:
  - $s(0) = s_0 = 0$
  - $v(0) = v_0$



- Die Beschleunigung ist gleich der Erdbeschleunigung. Sie wirkt entgegen der positiven Ortskoordinate:

$$a(t) = a_0 = -g$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v(t) = v_0 - g\,t$

- Ort-Zeit-Gesetz: $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g\,t^2$

- Geschwindigkeit-Ort-Gesetz: $v(s) = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,s}$

- Steigzeit:
  - Bei Erreichen des höchsten Punktes ist die Geschwindigkeit null:

$$0 = v(T) = v_0 - g\,T \quad \rightarrow \quad T = \frac{v_0}{g}$$

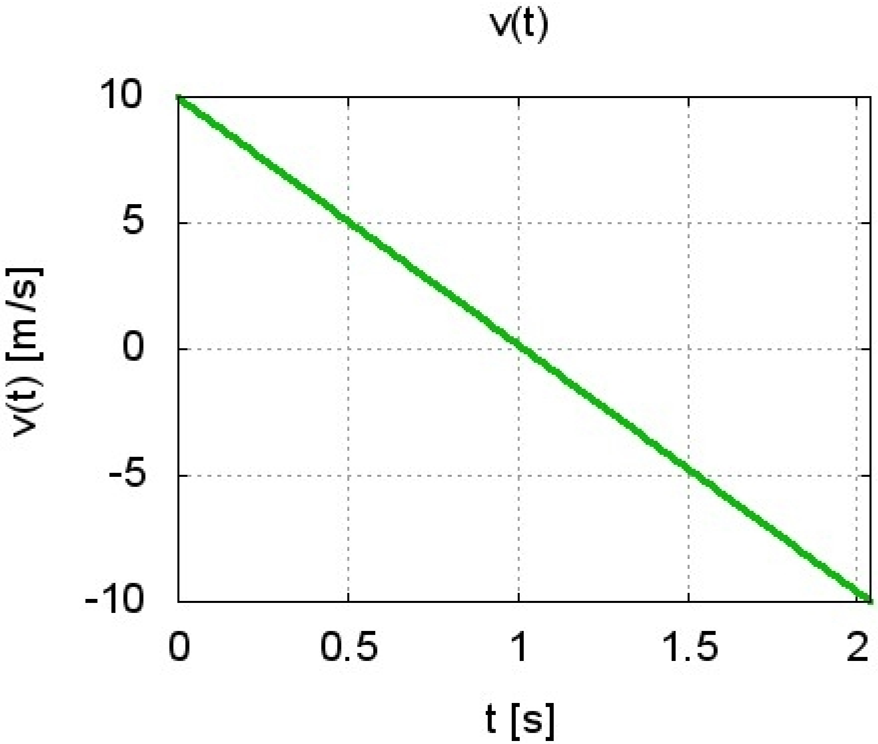
1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

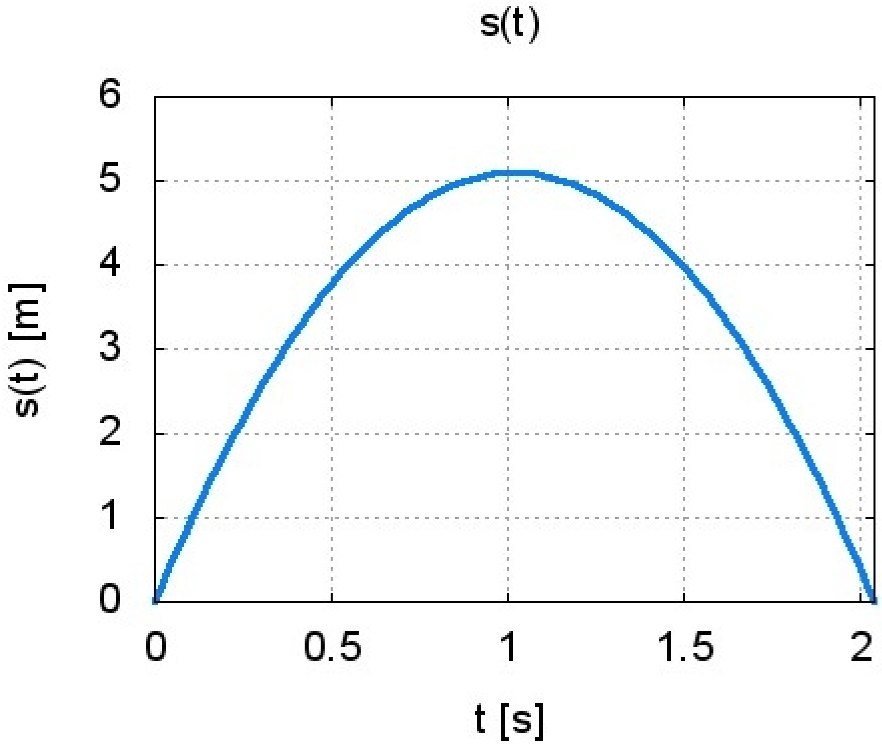
- Steighöhe:

$$0 = v(H) = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,H} \;\rightarrow\; H = \frac{v_0^2}{2\,g}$$

- Zahlenwerte:
  - Erdbeschleunigung: $g = 9{,}81 m/s^2$
  - Anfangsgeschwindigkeit: $v_0 = 10 m/s$
- Daraus:
  - Steigzeit: $$T = \frac{10\,m/s}{9{,}81\,m/s^2} = \underline{1{,}019\,s}$$
  - Steighöhe: $$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2\,m^2/s^2}{9{,}81\,m/s^2} = \underline{5{,}097\,m}$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung



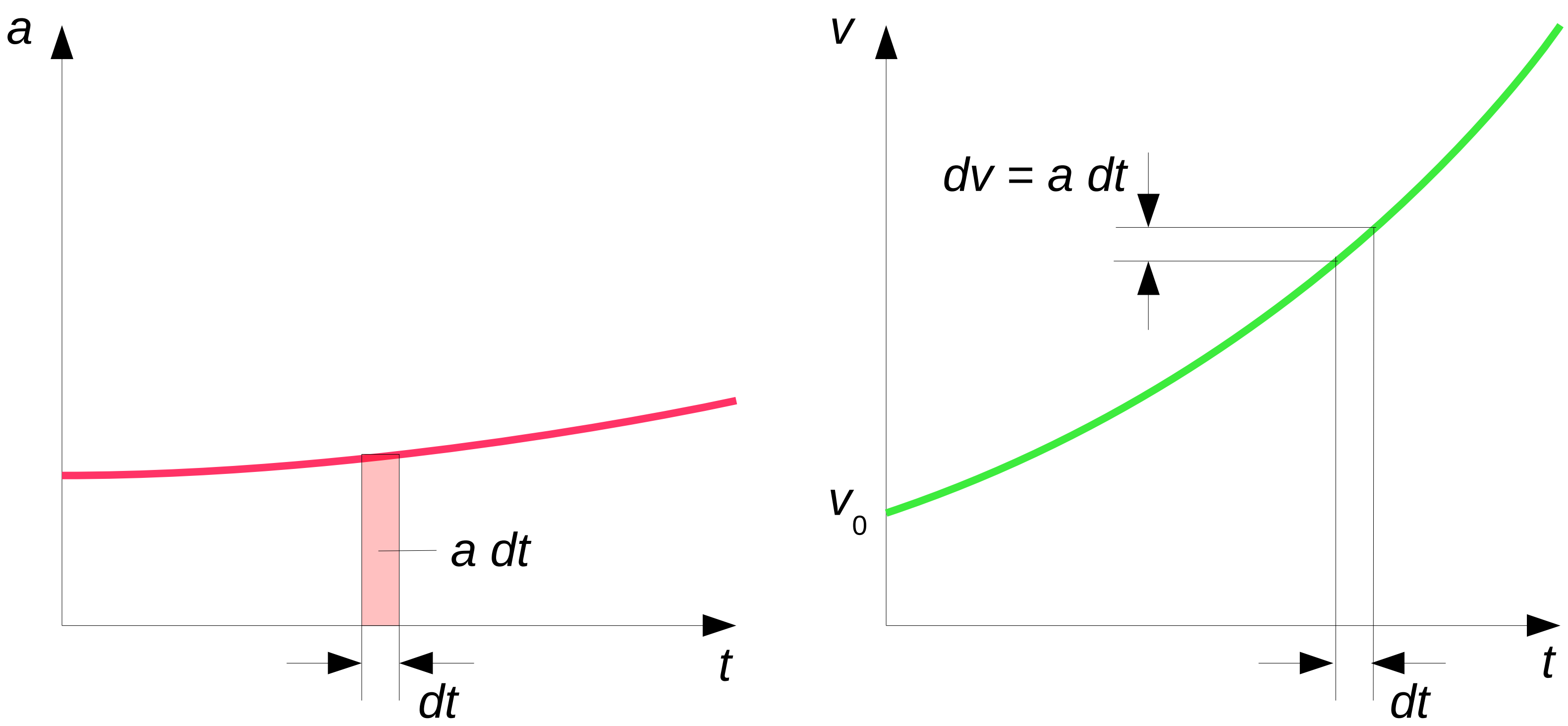


1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Vorgegeben:
  - Allgemeine zeitabhängige Beschleunigung $a(t)$
  - Anfangsbedingungen: $v(t_0) = v_0$, $s(t_0) = s_0$
- Bahngeschwindigkeit:
  - Integration von $dv = a(t)\,dt$ führt auf die Geschwindigkeit:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau \rightarrow \boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$$

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

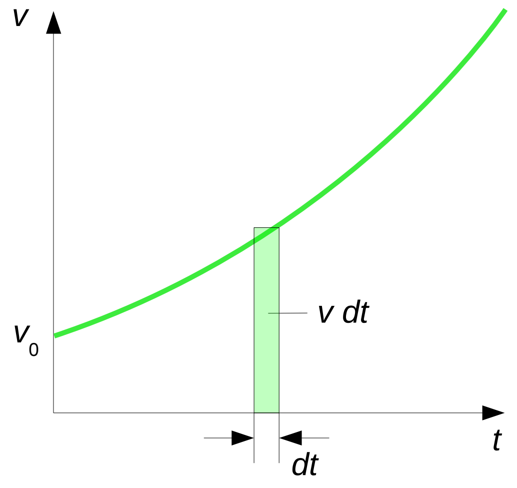


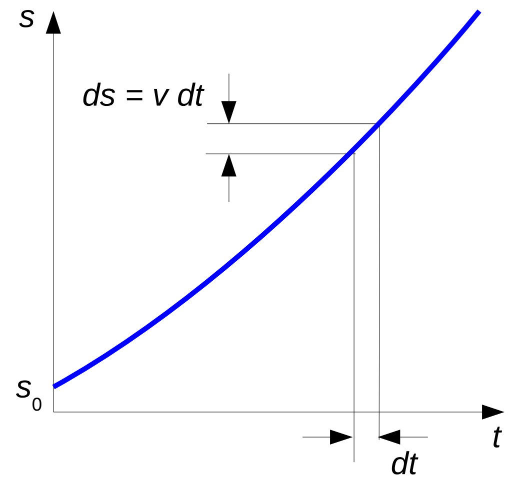
1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Ortskoordinate:
  - Integration von $ds = v(t)\,dt$ führt auf den Ort:

$$\int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau}$$





1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Beispiel:
  - Ein Fahrzeug hat zum Zeitpunkt $t_1 = 0s$ die Geschwindigkeit $v_1 = 50km/h$.
  - Vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt $t_2 = 7s$ erfährt es die Beschleunigung

$$a(t) = a_0 \sin\left(\pi \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right), \quad t_1 \le t \le t_2$$

  - Zum Zeitpunkt t_2 erreicht es die Geschwindigkeit $v_2 = 100km/h$.

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Gesucht ist das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz und das Ort-Zeit-Gesetz während der Beschleunigung, der Wert der Konstanten a_0 sowie der während der Beschleunigung zurückgelegte Weg s_{12}.
- Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:

$$v(t) = v_1 + \int_{t_1}^{t} a_0 \sin\left(\pi \frac{\tau - t_1}{t_2 - t_1}\right) d\tau = v_1 + a_0 \left[-\frac{t_2 - t_1}{\pi} \cos\left(\pi \frac{\tau - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right]_{\tau = t_1}^{\tau = t}$$

$$= v_1 + a_0 \frac{t_2 - t_1}{\pi} \left(1 - \cos\left(\pi \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right)$$

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Ort-Zeit-Gesetz:

$$s(t)=s_1+v_1(t-t_1)+a_0\frac{t_2-t_1}{\pi}\int_{t_1}^{t}\left(1-\cos\left(\pi\frac{\tau-t_1}{t_2-t_1}\right)\right)d\tau$$

$$=s_1+v_1(t-t_1)+a_0\frac{t_2-t_1}{\pi}\left(t-t_1-\left[\frac{t_2-t_1}{\pi}\sin\left(\pi\frac{\tau-t_1}{t_2-t_1}\right)\right]_{\tau=t_1}^{\tau=t}\right)$$

$$=s_1+v_1(t-t_1)+\frac{a_0}{\pi}(t_2-t_1)(t-t_1)-a_0\left(\frac{t_2-t_1}{\pi}\right)^2\sin\left(\pi\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)$$

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Wert der Konstanten a_0:

$$v_2 = v(t_2) = v_1 + a_0 \frac{t_2 - t_1}{\pi}\left(1 - \cos\left(\pi \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right) = v_1 + 2 a_0 \frac{t_2 - t_1}{\pi}$$

$$\rightarrow \quad a_0 = \frac{\pi\left(v_2 - v_1\right)}{2\left(t_2 - t_1\right)}$$

- Zurückgelegter Weg s_{12}:

$$s_{12} = s(t_2) - s_1 = v_1\left(t_2 - t_1\right) + \frac{a_0}{\pi}\left(t_2 - t_1\right)^2 = v_1\left(t_2 - t_1\right) + \frac{v_2 - v_1}{2}\left(t_2 - t_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(v_1 + v_2\right)\left(t_2 - t_1\right)$$

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Zahlenwerte:
  - Geschwindigkeiten:

$$v_1 = 50\,km/h = 13{,}89\,m/s\,,\quad v_2 = 100\,km/h = 27{,}78\,m/s$$

  - Konstante a_0:

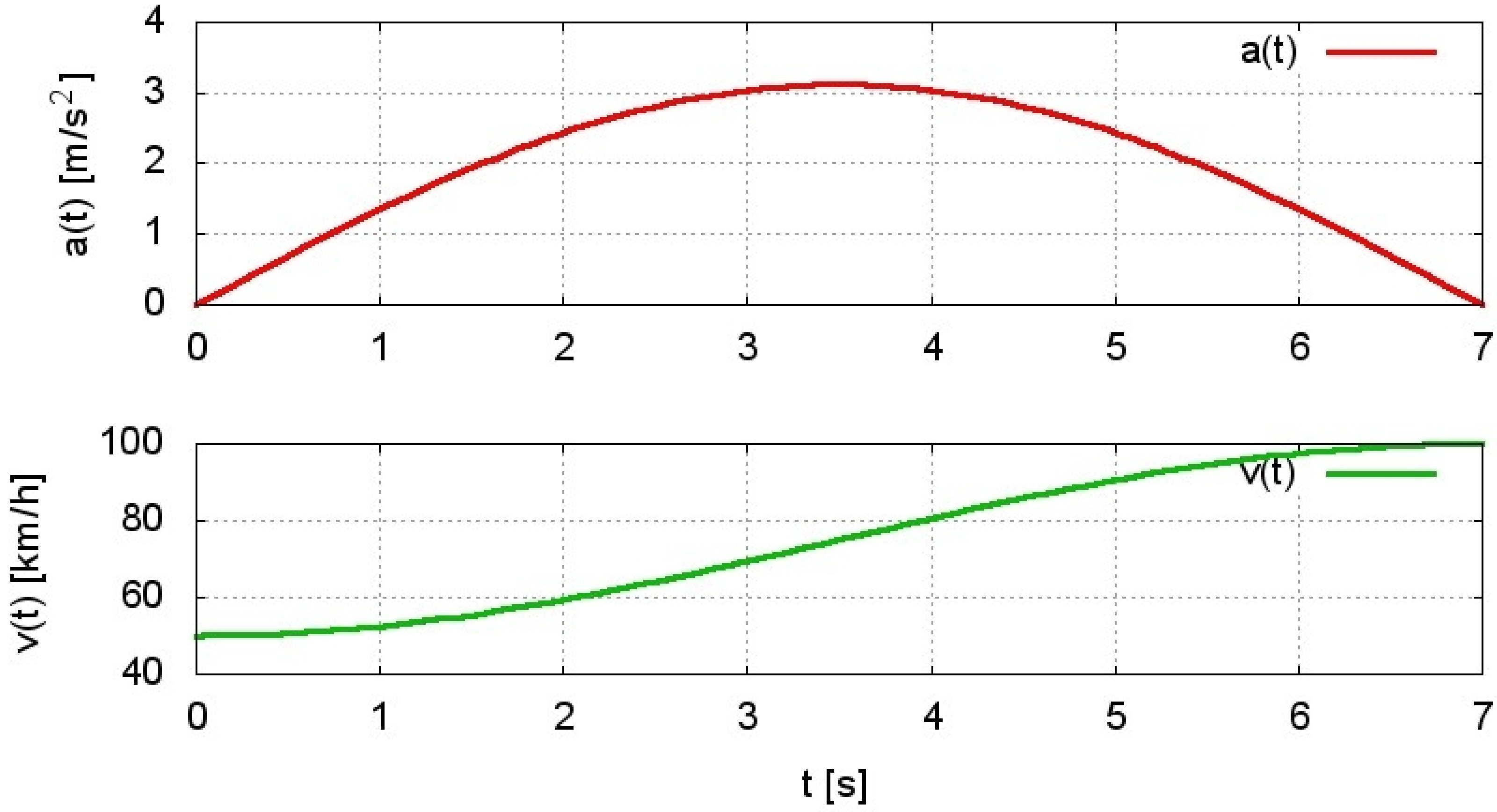
$$a_0 = \frac{\pi}{2}\,\frac{27{,}78\,m/s - 13{,}89\,m/s}{7\,s} = \underline{3{,}117\,m/s^2}$$

  - Zurückgelegter Weg s_{12}:

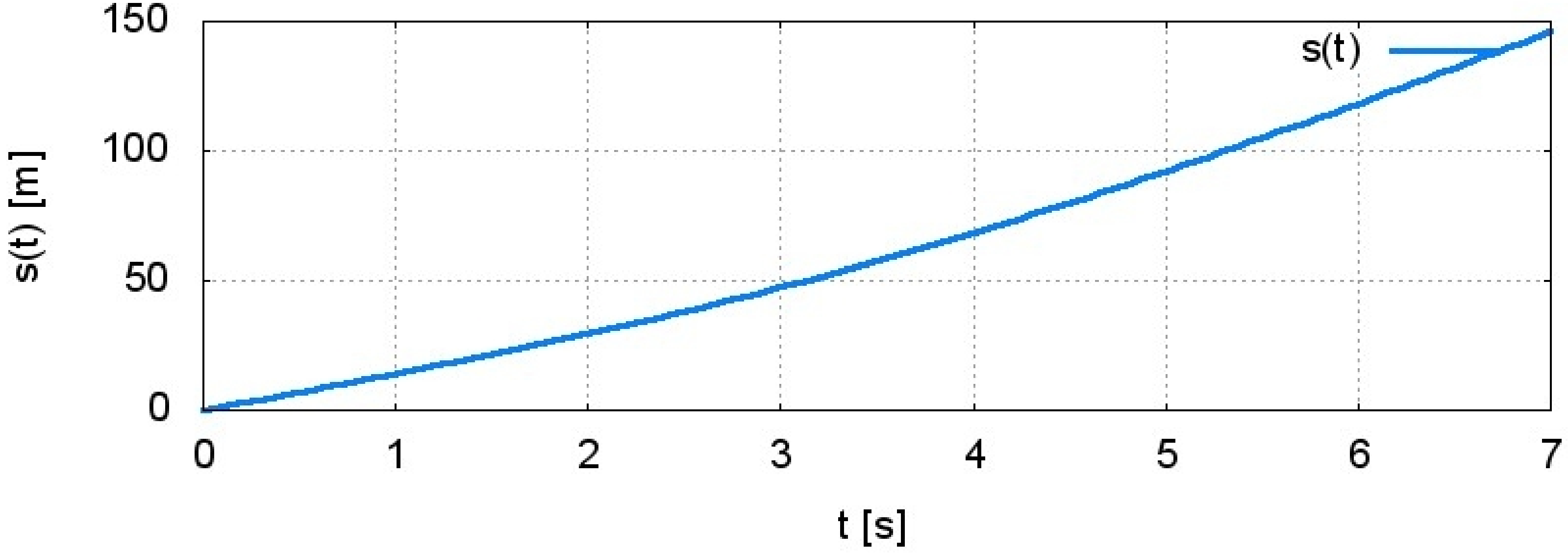
$$s_{12} = \frac{1}{2}\left(13{,}89\,m/s + 27{,}78\,m/s\right)\cdot 7\,s = \underline{145{,}8\,m}$$

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Diagramme:



1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung



1.1 – 1.4 Zusammenfassung

$s(t)$	Allgemein: $s(t)=s_0+\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$ $a=a_0=const.$: $s(t)=s_0+v_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2$ $a=0$: $s(t)=s_0+v_0(t-t_0)$	
$v(t)$	Allgemein: $v(t)=v_0+\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau$ $a=a_0=const.$: $v(t)=v_0+a_0(t-t_0)$ $a=0$: $v(t)=v_0=const.$	$v(t)=\dot{s}(t)$
$a(t)$		$a(t)=\dot{v}(t)=\ddot{s}(t)$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Vorgegeben:
  - Ortsabhängige Geschwindigkeit $v(s)$
  - Anfangsbedingung: $s(t_0) = s_0$
- Bahnbeschleunigung:
  - Nach der Kettenregel gilt:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v \quad \rightarrow \quad \boxed{a(s) = v(s)\frac{dv}{ds}(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(v^2(s)\right)}$$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Zeit als Funktion des Orts:
  - Aus der Definition der Geschwindigkeit, $$\frac{ds}{dt} = v(s)$$

    folgt durch Trennung der Veränderlichen: $$\frac{ds}{v(s)} = dt$$
  - Integration von t_0 bis t ergibt: $$\int_{s_0}^{s} \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})} = \int_{t_0}^{t(s)} dt = t(s) - t_0$$
  - Ergebnis: $$\boxed{t(s) = t_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}}$$

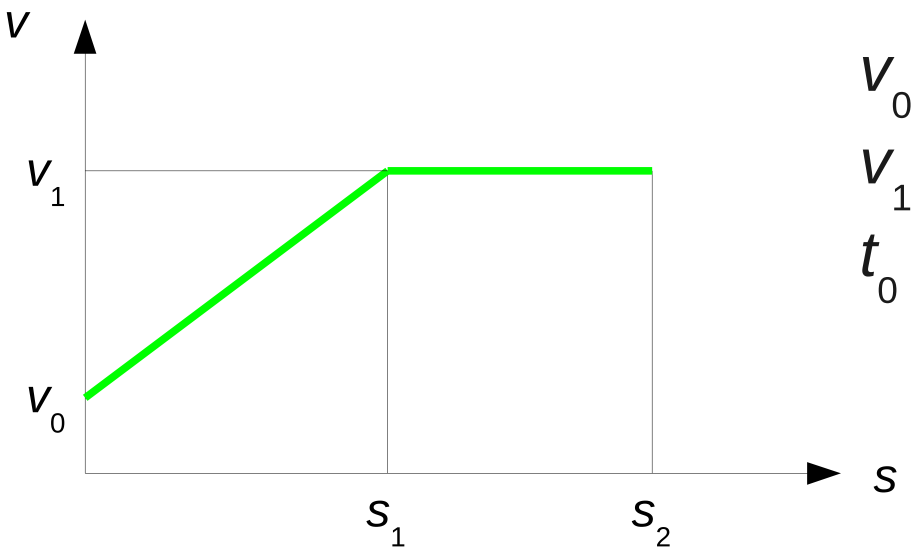
1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Beispiel:
  - Geschwindigkeit: $v(s)=\sqrt{2\,a_0\,s}$
  - Beschleunigung: $a(s)=v\dfrac{dv}{ds}=\sqrt{2\,a_0\,s}\,\dfrac{a_0}{\sqrt{2\,a_0\,s}}=a_0$

    oder einfacher: $v^2(s)=2\,a_0\,s \;\rightarrow\; a(s)=\dfrac{1}{2}\dfrac{dv^2}{ds}=a_0$
  - Zeit für $t_0 = 0$: $t(s)=\displaystyle\int_0^s \frac{d\bar{s}}{\sqrt{2\,a_0\,\bar{s}}}=\left[\frac{\sqrt{2\,a_0\,\bar{s}}}{a_0}\right]_{\bar{s}=0}^{\bar{s}=s}=\frac{\sqrt{2\,a_0\,s}}{a_0}=\sqrt{\frac{2\,s}{a_0}}$
  - Ortskoordinate: $t^2=\dfrac{2\,s}{a_0} \;\rightarrow\; s(t)=\dfrac{1}{2}a_0\,t^2$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Beispiel:
  - Die Fahrt eines Motorrades wird durch das folgende *v*-*s*-Diagramm beschrieben:



$v_0 = 3 m/s$ $\quad$ $s_0 = 0 m$

$v_1 = 15 m/s$ $\quad$ $s_1 = 60 m$

$t_0 = 0 s$ $\quad$ $s_2 = 120 m$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Gesucht:
  - *a*-*s*-Diagramm
  - Zeiten t_1 und t_2, bei denen das Motorrad die Wege s_1 und s_2 zurückgelegt hat
- Wegabschnitt 1: $0 \leq s \leq s_1$
  - Funktionsgleichung für die Geschwindigkeit:

$$v = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{s_1} s = v_0 + k\, s \quad \text{mit} \quad k = \frac{v_1 - v_0}{s_1}$$

  - Beschleunigung:

$$a(s) = v(s) \frac{dv}{ds}(s) = \left(v_0 + k\, s\right) \cdot k = k\, v_0 + k^2 s$$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Zahlenwerte:

$$k=\frac{v_1-v_0}{s_1}=\frac{15\,m/s-3\,m/s}{60\,m}=0{,}2\,\frac{1}{s}$$

$$a(s)=0{,}2\,\frac{1}{s}\cdot 3\,m/s+\left(0{,}2\,\frac{1}{s}\right)^2\cdot s=0{,}6\,\frac{m}{s^2}+0{,}04\,\frac{1}{s^2}\cdot s$$

- Zeit:

$$t_1=\int_0^{s_1}\frac{ds}{v_0+k\,s}=\left[\frac{1}{k}\ln\left(v_0+k\,s\right)\right]_0^{s_1}=\frac{1}{k}\left[\ln\left(v_0+k\,s_1\right)-\ln v_0\right]$$

$$\rightarrow\quad t_1=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_0+k\,s_1}{v_0}\right)=\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{k\,s_1}{v_0}\right)$$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Zahlenwert:

$$t_1 = \frac{1}{0{,}2\,\frac{1}{s}} \cdot \ln\left(1 + \frac{0{,}2\,\frac{1}{s} \cdot 60\,m}{3\,m/s}\right) = 5\,s \cdot \ln\left(1 + 0{,}2 \cdot 20\right) = \underline{8{,}05\,s}$$

– Wegabschnitt 2: $s_1 \leq s \leq s_2$

- Die Geschwindigkeit ist konstant: $v(s) = v_1$

- Beschleunigung: $$a(s) = v_1 \frac{d}{ds}\left(v_1\right) = 0$$

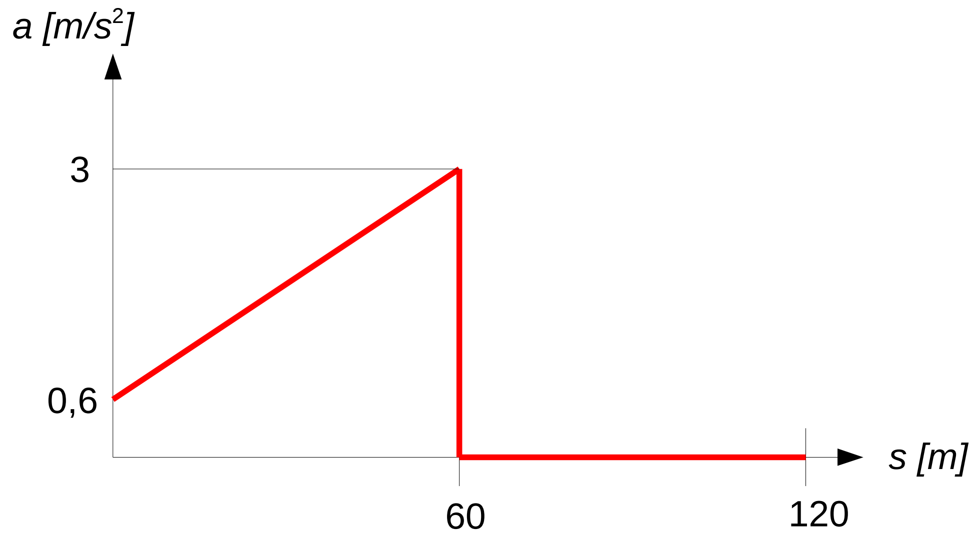
1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Zeit:

$$t_2 = t_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v_1} = t_1 + \frac{1}{v_1} \int_{s_1}^{s_2} ds = t_1 + \frac{1}{v_1} \left(s_2 - s_1 \right)$$

- Zahlenwert: $t_2 = 8{,}05\,s + \dfrac{120\,m - 60\,m}{15\,m/s} = 8{,}05\,s + 4\,s = \underline{12{,}05\,s}$

– *a*-*s*-Diagramm:



1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Vorgegeben:
  - Ortsabhängige Beschleunigung $a(s)$
  - Anfangsbedingungen: $v(t_0) = v_0$, $s(t_0) = s_0$
- Bahngeschwindigkeit:
  - Aus $a(s) = v\dfrac{dv}{ds}$

    folgt durch Trennung der Veränderlichen: $a(s)\,ds = v\,dv$
  - Integration von s_0 bis s ergibt:

$$\int_{s_0}^{s} a(\bar{s})\,d\bar{s} = \int_{v_0}^{v(s)} v\,dv = \frac{1}{2}\left(v^2(s) - v_0^2\right)$$

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Ergebnis:

$$v(s) = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} a(\bar{s})\,d\bar{s}}$$

- Zeit als Funktion des Orts:
  - Die Zeit wird wie in Abschnitt 1.5 aus der ortsabhängigen Geschwindigkeit berechnet:

$$t(s) = t_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}$$

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Beispiel:
  - Wird eine an einer Feder aufgehängte Masse aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt, so tritt eine zur Auslenkung proportionale Beschleunigung auf, die entgegen der Auslenkung gerichtet ist:

$$a(s) = -\omega^2 s$$

  - Anfangsbedingungen:
    - $t_0 = 0$, $s(t_0) = s_0$, $v(t_0) = 0$
  - Gesucht:
    - Geschwindigkeit-Ort-Diagramm
    - Ort-Zeit-Diagramm

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Geschwindigkeit als Funktion des Orts:

$$v(s) = \pm\sqrt{2\int_{s_0}^{s}\left(-\omega^2\bar{s}\right)d\bar{s}} = \pm\omega\sqrt{2\left[\frac{-\bar{s}^2}{2}\right]_{s_0}^{s}} = \pm\omega\sqrt{s_0^2 - s^2}$$

  - Das Geschwindigkeit-Ort-Diagramm wird als Phasenkurve bezeichnet.

- Ort als Funktion der Zeit:
  - Integration:

$$t(s) = \int_{s_0}^{s}\frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})} = \pm\int_{s_0}^{s}\frac{1}{\omega}\frac{d\bar{s}}{\sqrt{s_0^2 - \bar{s}^2}} = \pm\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{\bar{s}}{s_0}\right)\right]_{\bar{s}=s_0}^{\bar{s}=s}$$

$$= \pm\frac{1}{\omega}\left(\arcsin\left(\frac{s}{s_0}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Auflösen nach *s*(*t*):

$$\frac{\pi}{2} \pm \omega t = \arcsin\left(\frac{s(t)}{s_0}\right) \;\rightarrow\; \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \omega t\right) = \cos(\omega t) = \frac{s(t)}{s_0}$$

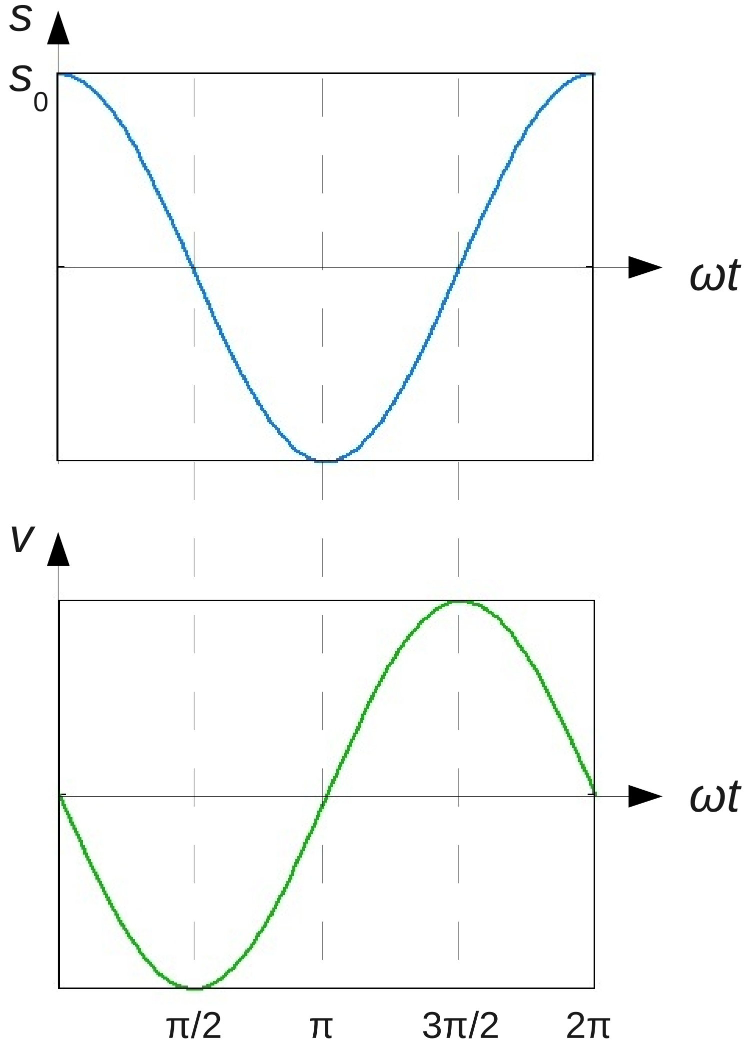
- Ergebnis: $s(t) = s_0 \cos(\omega t), \quad v(t) = \dot{s}(t) = -\omega s_0 \sin(\omega t)$

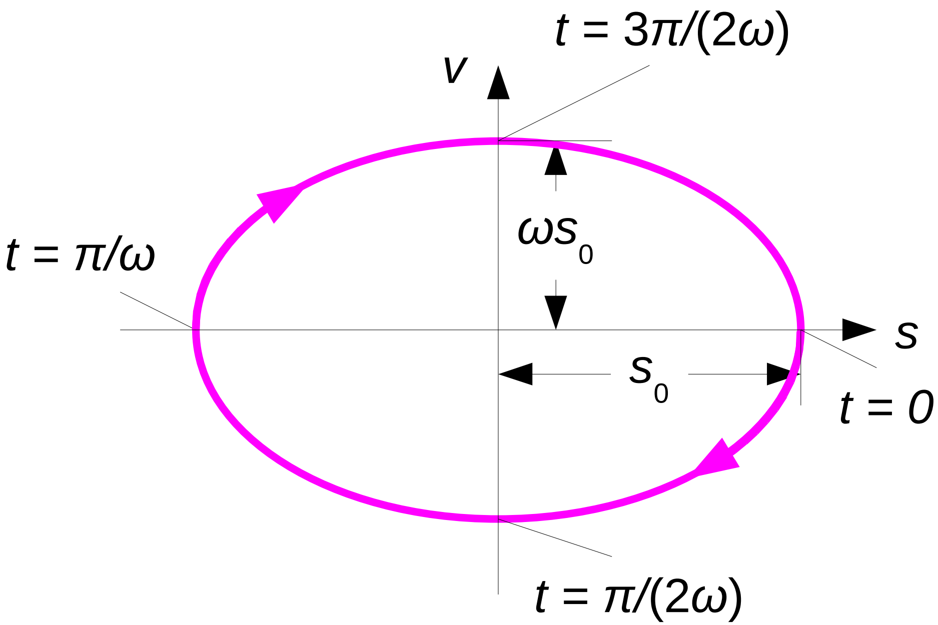
- Untersuchung der Phasenkurve:

$$v^2 = \omega^2\left(s_0^2 - s^2\right) \;\rightarrow\; \frac{v^2}{\omega^2} = s_0^2 - s^2 \;\rightarrow\; \frac{v^2}{\omega^2} + s^2 = s_0^2 \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{(\omega s_0)^2} + \frac{s^2}{s_0^2} = 1$$

- Das ist eine Ellipse mit den Halbachsen s_0 und ωs_0.

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung





1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Vorgegeben:
  - Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung $a(v)$
  - Anfangsbedingungen: $v(t_0) = v_0$, $s(t_0) = s_0$
- Zeit als Funktion der Geschwindigkeit:
  - Aus $a(v) = \dfrac{dv}{dt}$ folgt durch Trennung der Veränderlichen:

$$dt = \frac{dv}{a(v)}$$

  - Integration von t_0 bis t ergibt: $$\int_{t_0}^{t(v)} dt = t(v) - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}$$

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Ergebnis:

$$\boxed{t(v) = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}}$$

- Ort als Funktion der Geschwindigkeit:
  - Aus $a = v\dfrac{dv}{ds}$ folgt durch Trennung der Veränderlichen:

$$ds = \frac{v\,dv}{a(v)}$$

  - Integration von v_0 bis v ergibt: $\displaystyle\int_{s_0}^{s(v)} ds = s(v) - s_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{\bar{v}\,d\bar{v}}{a(\bar{v})}$

  - Ergebnis:

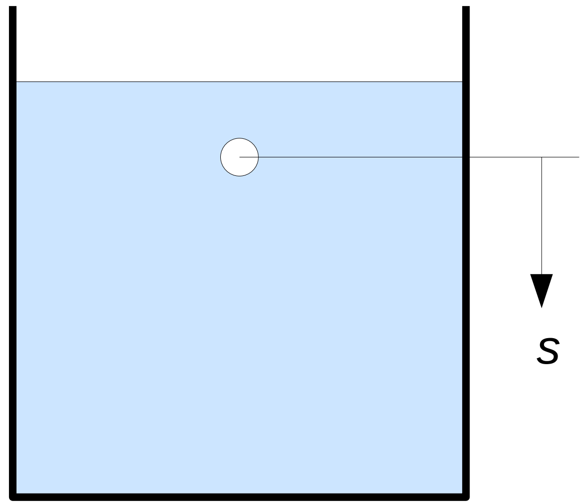
$$\boxed{s(v) = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{\bar{v}\,d\bar{v}}{a(\bar{v})}}$$

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Beispiel:
  - Ein Körper, der in einer zähen Flüssigkeit fällt, wird durch die Erdbeschleunigung beschleunigt und durch eine geschwindigkeitsproportionale Verzögerung gebremst.
  - Gesucht: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz und Ort-Zeit-Gesetz, wenn der Körper aus der Ruhe fallen gelassen wird.
  - Wahl des Koordinatensystems:
    - Die Ortskoordinate *s* beginnt am Ausgangspunkt des Körpers und ist nach unten positiv.
    - Die Zeit wird ab Loslassen des Körpers gemessen, d.h. $t_0 = 0$.

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Anfangsbedingungen:
  - $s(0) = s_0 = 0$
  - $v(0) = v_0 = 0$
- Beschleunigung: $a(v) = g - k\,v$



- Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:

$$t = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{g - k\,v} = \left[-\frac{1}{k} \ln\left(g - k\,v\right) \right]_0^{v(t)} = -\frac{1}{k}\left[\ln\left(g - k\,v(t)\right) - \ln g \right]$$

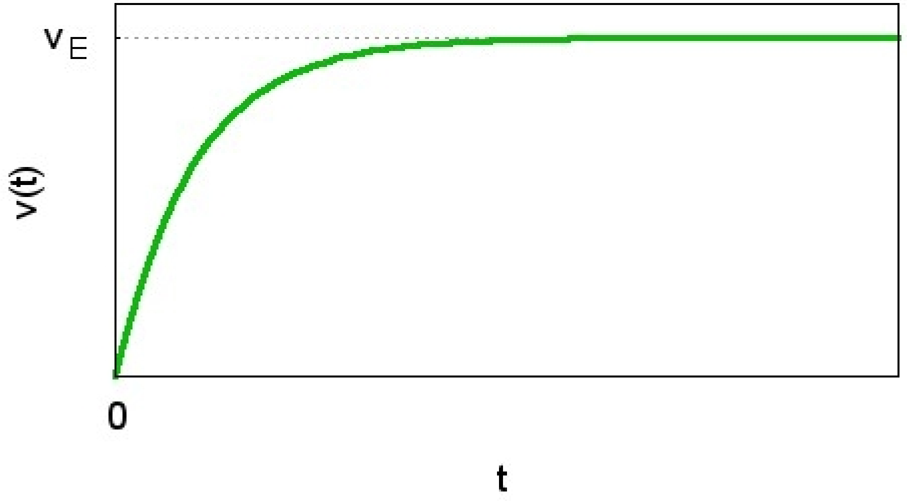
$$\rightarrow \quad -k\,t = \ln\left(\frac{g - k\,v(t)}{g} \right) = \ln\left(1 - \frac{k\,v(t)}{g} \right)$$

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

$$e^{-kt} = 1 - \frac{k\,v(t)}{g} \quad \rightarrow \quad \frac{k\,v(t)}{g} = 1 - e^{-kt}$$

- Ergebnis: $$v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) = v_E\left(1 - e^{-kt}\right)$$
- Für $t \rightarrow \infty$ strebt die Geschwindigkeit asymptotisch gegen die Endfallgeschwindigkeit

$$v_E = \frac{g}{k}$$



1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Ort-Zeit-Gesetz:
  - Integration des Geschwindigkeit-Zeit-Gesetzes:

$$s(t)=\int_0^t v(\tau)\,d\tau=v_E\int_0^t\left(1-e^{-k\tau}\right)d\tau=v_E\left[\tau+\frac{1}{k}e^{-k\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$=v_E t+\frac{v_E}{k}\left(e^{-kt}-1\right)$$