1. Bewegungsgleichung

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Die Erfahrung zeigt:
  - Wenn die Kräfte, die an einem Massenpunkt angreifen, nicht im Gleichgewicht sind, ändert sich seine Geschwindigkeit.
  - Beschleunigung und Kraft haben die gleiche Richtung.
  - Der Betrag der Beschleunigung ist proportional zum Betrag der Kraft.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- 2. Newtonsches Gesetz:
  - Zwischen der am Massenpunkt angreifenden Kraft ***F*** und seiner Beschleunigung ***a*** besteht der Zusammenhang

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}}$$

  - Die Proportionalitätskonstante *m* wird als träge Masse bezeichnet.
  - Ein Massenpunkt ist ein geometrischer Punkt, dem eine träge Masse zugeordnet ist.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Bewegungsgleichungen:
  - Wenn am Körper mehrere Kräfte angreifen, so ist die Resultierende zu bilden:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$$

  - In einem kartesischen Koordinatensystem gilt:

$$\boxed{\sum F_x = m\,a_x,\quad \sum F_y = m\,a_y,\quad \sum F_z = m\,a_z}$$

  - Diese Gleichungen werden als Bewegungsgleichungen bezeichnet.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Aus den Bewegungsgleichungen lässt sich die Bewegung des Massenpunkts bestimmen, wenn die Kräfte und die Anfangsbedingungen gegeben sind.
- Wenn die Bewegung gegeben ist, so lassen sich aus den Bewegungsgleichungen die benötigten Kräfte ermitteln.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

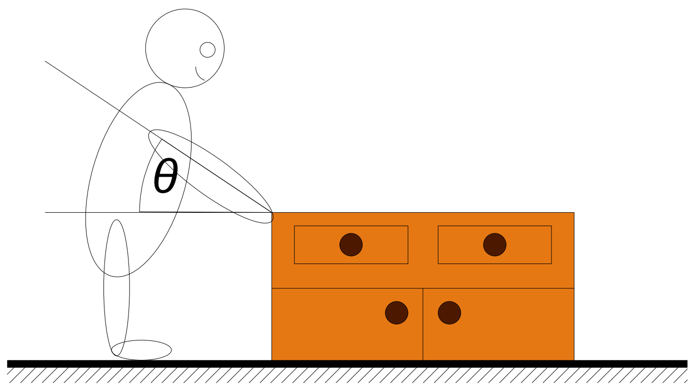
- Inertialsystem:
  - Das Newtonsche Grundgesetz gilt nicht in beliebigen Bezugssystemen.
  - Ein Bezugssystem, in dem das Grundgesetz gilt, wird als Inertialsystem bezeichnet.
  - Bei technischen Anwendungen kann die Erde in der Regel als Inertialsystem angesehen werden.
  - Jedes Bezugssystem, das sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu einem Inertialsystem bewegt, ist ebenfalls ein Inertialsystem.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Lösungsweg:
  - Freischneiden des betrachteten Systems
  - Einführen eines geeigneten Koordinatensystems
  - Aufstellen der Bewegungsgleichungen:
    - Kraft- , Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten sind positiv, wenn die zugehörigen Vektoren in Richtung positiver Koordinatenachsen zeigen.

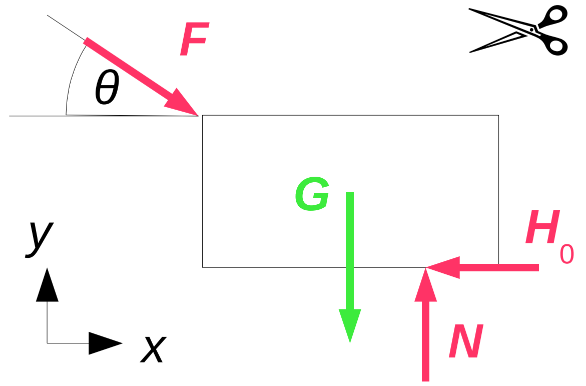
1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Beispiel:
  - Ein Mann möchte eine Kommode verschieben.
  - Gegeben:
    - Gewicht G der Kommode
    - Haftungskoeffizient $\mu_0 = 0{,}25$ und Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}1$
    - Winkel $\theta = 30°$
  - Gesucht:
    - Beschleunigung, die auftritt, wenn die Haftung gerade überschritten wird



1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Nötige Kraft:
  - Damit sich die Kommode in Bewegung setzt, muss die Haftung überwunden werden.
  - Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum F_x = 0 \quad : \quad F\cos(\theta) - H_0 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad : \quad -F\sin(\theta) - G + N = 0$$

  - Grenzfall für Haften: $H_0 = \mu_0 N$
  - Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$H_0 = F\cos(\theta), \quad N = F\sin(\theta) + G$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Einsetzen in die Haftbedingung ergibt:

$$F\cos(\theta)=\mu_0\left(F\sin(\theta)+G\right)$$

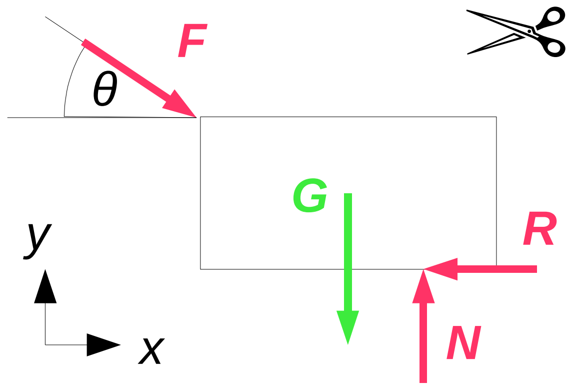
- Daraus folgt für die Kraft:

$$F\left(\cos(\theta)-\mu_0\sin(\theta)\right)=\mu_0 G \quad\rightarrow\quad F=\frac{\mu_0 G}{\cos(\theta)-\mu_0\sin(\theta)}$$

- Gleiten:
  - Wird die Kraft *F* auch nur geringfügig überschritten, tritt Gleiten auf. Statt der Haftungskraft wirkt die kleinere Gleitreibungskraft.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Bewegungsgleichungen:



$$\sum F_x = m a_x \quad : \quad F\cos(\theta) - R = m a_x$$

$$\sum F_y = m a_y \quad : \quad -F\sin(\theta) - G + N = 0$$

- Gleitreibungsgesetz: $R = \mu N$
- Aus der Bewegungsgleichung in *y*-Richtung folgt:

$$N = F\sin(\theta) + G$$

- Einsetzen in das Gleitreibungsgesetz ergibt:

$$R = \mu N = \mu\left(F\sin(\theta) + G\right)$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Einsetzen in die Bewegungsgleichung in *x*-Richtung führt auf:

$$a_x = \frac{F\cos(\theta) - \mu F\sin(\theta) - \mu G}{m} = \frac{F\left(\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)\right) - \mu G}{m}$$

$$= \left(\mu_0 \frac{\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_0\sin(\theta)} - \mu\right)\frac{G}{m} = \left(\mu_0 \frac{\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_0\sin(\theta)} - \mu\right) g$$

- Die Beschleunigung hängt nicht vom Gewicht der Kommode ab.

- Zahlenwert:
  - Mit μ_0 = 0,25, μ = 0,1 und θ = 30° ergibt sich:

$$a_x = \left[0{,}25\,\frac{\cos(30°) - 0{,}1\sin(30°)}{\cos(30°) - 0{,}25\sin(30°)} - 0{,}1\right] g = 0{,}1753\, g = \underline{1{,}720\, m/s^2}$$

1.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Die d'Alembertsche Trägheitskraft:
  - Das Newtonsche Grundgesetz kann auch in der Form

    $$\boldsymbol{F} - m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

    geschrieben werden.
  - Die Kraft

    $$\boldsymbol{F}_T = -m\,\boldsymbol{a}$$

    wird als d'Alembertsche Trägheitskraft bezeichnet.
  - Die d'Alembertsche Trägheitskraft ist eine Scheinkraft, die entgegensetzt zur Beschleunigung gerichtet ist.

1.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Dynamisches Gleichgewicht:
  - Durch das Einführen der Trägheitskraft lässt sich das Newtonsche Grundgesetz formal auf eine Gleichgewichtsbedingung zurückführen:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_T = \boldsymbol{0}$$

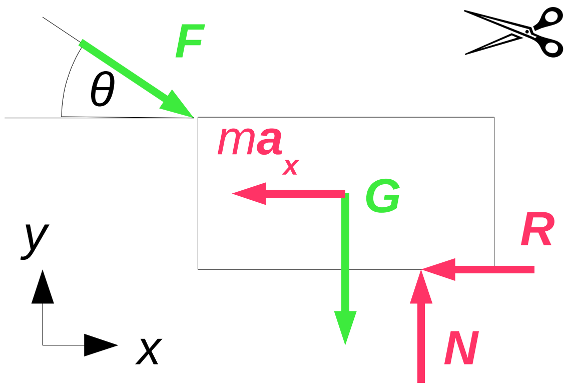
  - Dieses Gleichgewicht wird als dynamisches Gleichgewicht bezeichnet.
  - Später wird gezeigt:
    - Bei einem starren Körper greift die d'Alembertsche Trägheitskraft im Schwerpunkt an.
    - Wenn sich der Körper dreht, können zusätzliche Momente auftreten.

1.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Vorgehen:
  - Der zu untersuchende Körper wird freigeschnitten.
  - Neben den äußeren Kräften werden zusätzlich die d'Alembertschen Trägheitskräfte eingetragen.
  - Die Bewegungsgleichungen folgen dann wie in der Statik aus der Bedingung, dass die Summe der Kräfte und Momente null sein muss.

1.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Beispiel: Kommode
  - Freischneiden der Kommode:



  - Dynamisches Gleichgewicht:

$$\sum_D F_x = 0 \; : \; F\cos(\theta) - R - m\,a_x = 0$$

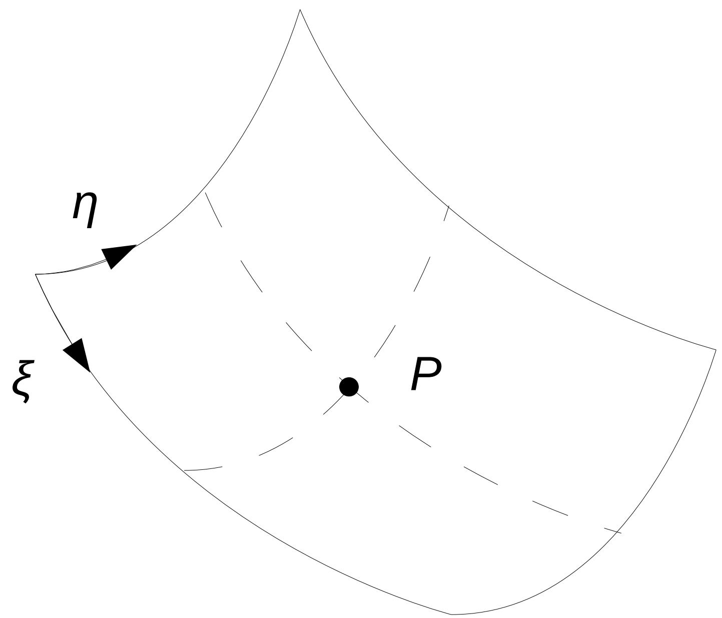
$$\sum_D F_y = 0 \; : \; -F\sin(\theta) - G + N = 0$$

1.3 Geführte Bewegung

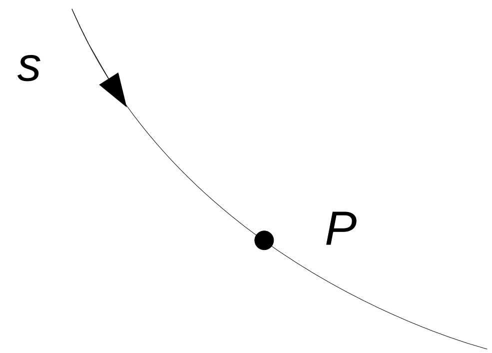
- Bei einer geführten Bewegung wird der Massenpunkt gezwungen, sich auf einer vorgegebenen Fläche oder Kurve zu bewegen.
- Dadurch wird die Zahl der Freiheitsgrade des Massenpunktes eingeschränkt.
- Die Zahl der Freiheitsgrade ist gleich der Zahl der Koordinaten, die notwendig sind, um die Lage des Massenpunktes eindeutig zu beschreiben.

1.3 Geführte Bewegung

- Fläche:
  - 2 Freiheitsgrade



- Kurve:
  - 1 Freiheitsgrad

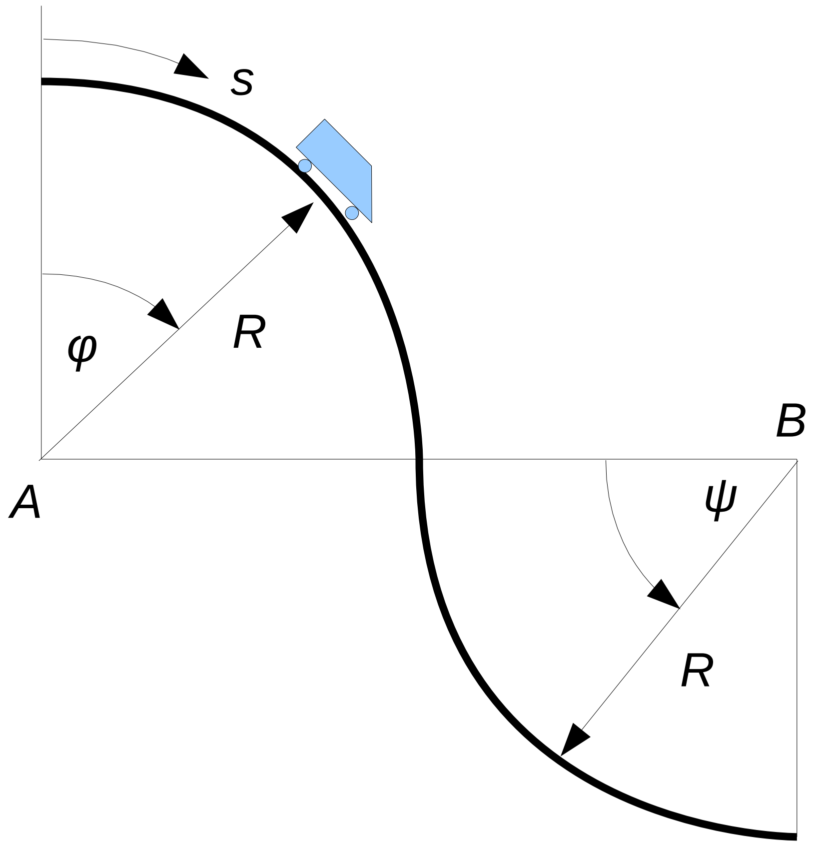


1.3 Geführte Bewegung

- Neben den eingeprägten Kräften treten Zwangskräfte auf, die die geforderte Bindung an die Fläche oder Kurve bewirken.
- Die Zwangskräfte stehen senkrecht auf der Fläche oder Kurve.
- Die Zwangskräfte werden auch als Führungskräfte bezeichnet.

1.3 Geführte Bewegung

- Beispiel: Achterbahn

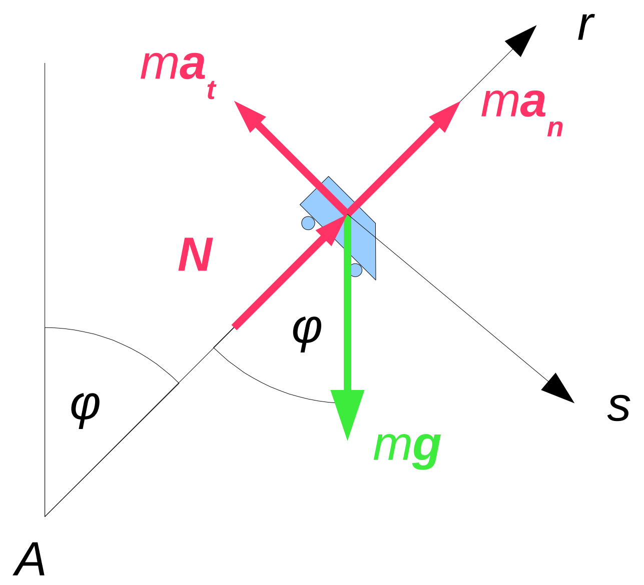


– Gegeben:
  - Masse des Wagens m
  - Radius R
  - Anfangsgeschwindigkeit $v(s=0) = v_0$

– Gesucht:
  - Bahngeschwindigkeit $v(s)$
  - Zwangskraft $N(s)$

1.3 Geführte Bewegung

- Es wird nur die Bewegung auf dem Viertelkreis um *A* untersucht.
- Die Untersuchung der Bewegung auf dem Viertelkreis um *B* erfolgt genauso und bleibt zur Übung überlassen.
- Dynamisches Gleichgewicht am freigeschnittenen Wagen:



$$\sum_D F_s = 0 \;:\; -m a_t + m g \sin(\phi) = 0$$

$$\sum_D F_r = 0 \;:\; N + m a_n - m g \cos(\phi) = 0$$

1.3 Geführte Bewegung

- Bahngeschwindigkeit:
  - Mit $\phi = s/R$ folgt aus dem dynamischen Gleichgewicht in tangentialer Richtung:

$$a_t(s) = g \sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

  - Die Bahnbeschleunigung ist ortsabhängig.
  - Für die Bahngeschwindigkeit gilt:

$$v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2\int_0^s g \sin\left(\frac{\bar{s}}{R}\right) d\bar{s}}$$

  - Das Integral berechnet sich zu

$$\int_0^s \sin\left(\frac{\bar{s}}{R}\right) d\bar{s} = \left[-R\cos\left(\frac{\bar{s}}{R}\right)\right]_{\bar{s}=0}^{\bar{s}=s} = R\left(1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

1.3 Geführte Bewegung

- Ergebnis:

$$v(s)=\sqrt{v_0^2+2\,R\,g\left(1-\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)}$$

- Zwangskraft:
  - Mit $a_n(s)=v^2(s)/R$ folgt aus dem dynamischen Gleichgewicht in radialer Richtung:

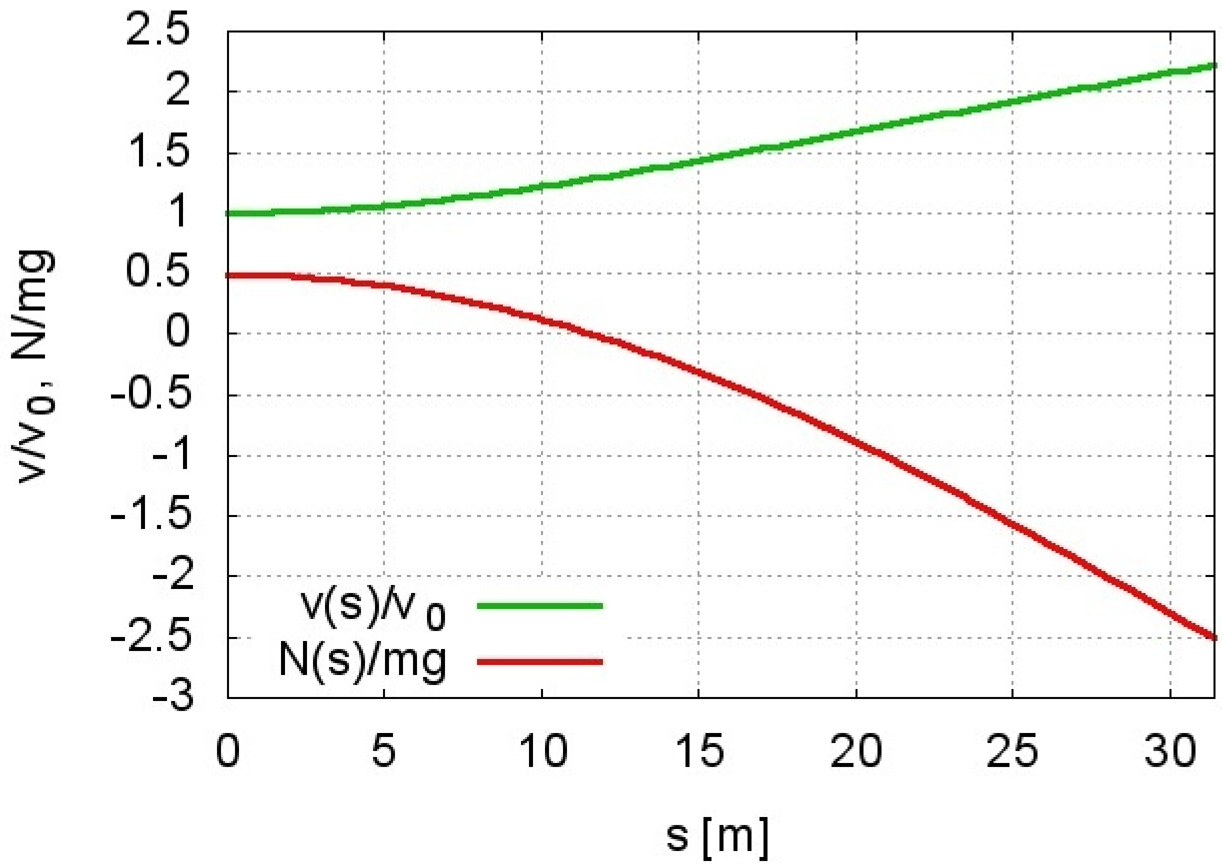
$$N(s)=m\left[g\cos\left(\frac{s}{R}\right)-\frac{v_0^2}{R}-2\,g\left(1-\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)\right]$$

$$=m\,g\left[3\cos\left(\frac{s}{R}\right)-\frac{v_0^2}{g\,R}-2\right]$$

1.3 Geführte Bewegung

– Zahlenwerte:

- $v_0 = 10 m/s$
- $R = 20 m$



1.4 Massenpunktsysteme

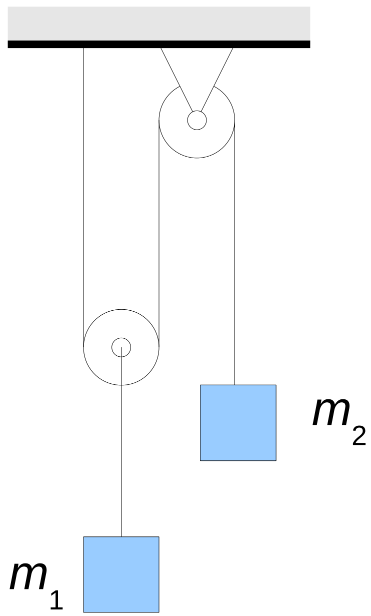
- Ein Massenpunktsystem besteht aus einer endlichen Zahl von Punktmassen, die untereinander in Verbindung stehen.
- Kinematische Bindungen sind geometrische Beziehungen zwischen den Koordinaten der Massenpunkte.
- Physikalische Bindungen beschreiben Zusammenhänge zwischen den Abständen der Massenpunkte und den Kräften.

1.4 Massenpunktsysteme

- Vorgehen:
  - Wahl der Freiheitsgrade
  - Freischneiden der einzelnen Massenpunkte:
    - Die Bindungskräfte treten als zusätzliche unbekannte Kräfte auf.
  - Aufstellen des dynamischen Gleichgewichts für jeden Massenpunkt
  - Berücksichtigung der Bindungsgleichungen
  - Auflösen der Gleichungen nach den gesuchten Größen

1.4 Massenpunktsysteme

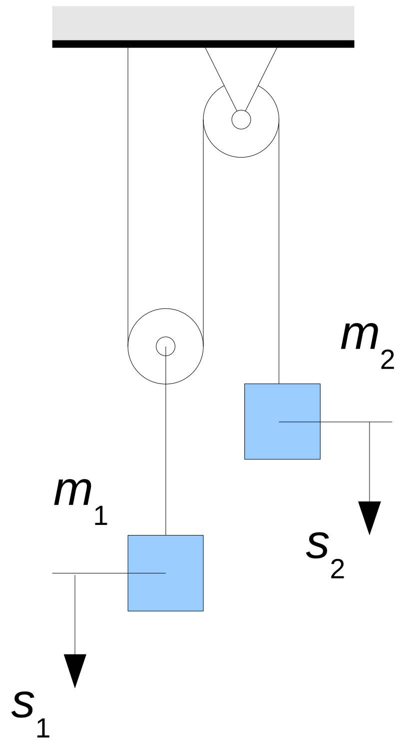
- Beispiel: Flaschenzug
  - Aufgabenstellung:
    - Die beiden Massen m_1 und m_2 sind durch ein masseloses dehnstarres Seil verbunden, das über masselose Rollen läuft.
    - Wie groß sind die Beschleunigungen und die Seilkräfte, wenn das System sich selbst überlassen wird?



1.4 Massenpunktsysteme

– Wahl der Freiheitsgrade:

- Die Lagekoordinaten s_1 und s_2 der beiden Massen werden ab der Ausgangslage positiv nach unten gemessen.
- Beim Aufstellen der dynamischen Gleichgewichtsbedingungen werden Kräfte, die in Richtung der als positiv gewählten Koordinatenrichtung zeigen, positiv gezählt.

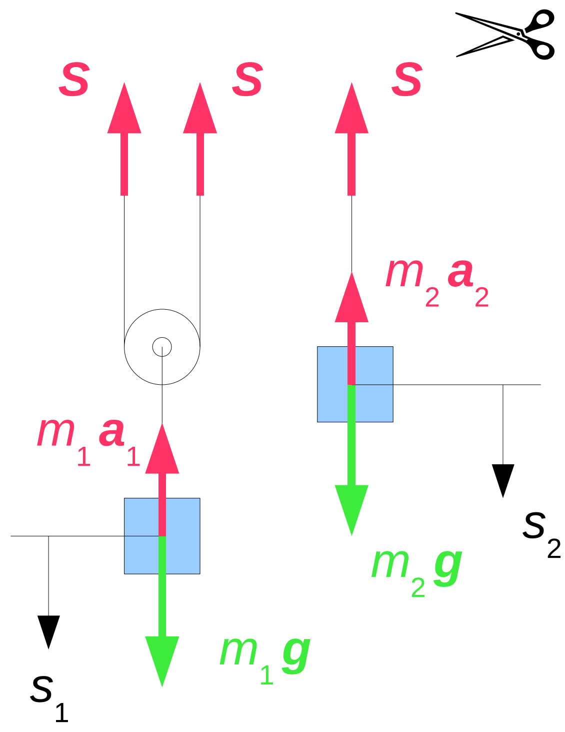


1.4 Massenpunktsysteme

- Kräfte am freigeschnittenen System:
  - Da die Rollen masselos sind, sind alle Seilkräfte gleich groß.
- Dynamisches Gleichgewicht:

$$\sum_D F_{s_1} = 0 \;:\; m_1 g - 2S - m_1 a_1 = 0$$

$$\sum_D F_{s_2} = 0 \;:\; m_2 g - S - m_2 a_2 = 0$$



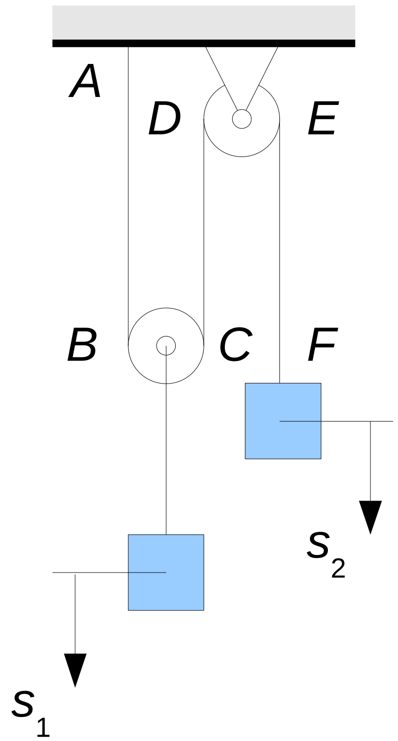
1.4 Massenpunktsysteme

- Bindungsgleichung:
  - Das dehnstarre Seil stellt eine kinematische Bindung zwischen den beiden Massenpunkten her.
  - Diese Bindung verlangt, dass sich die Länge des Seils nicht ändert.
  - In der Ruhelage gilt:

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DE} + L_{EF}$$

  - In der ausgelenkten Lage gilt:

$$L = L_{AB} + s_1 + L_{BC} + L_{CD} + s_1 + L_{DE} + L_{EF} + s_2$$



1.4 Massenpunktsysteme

- Daraus folgt: $2s_1 + s_2 = 0$
- Für die Beschleunigungen gilt: $a_2 = \ddot{s}_2 = -2\ddot{s}_1 = -2a_1$

– Mit den beiden dynamischen Gleichgewichtsbedingungen und der kinematischen Bindung stehen drei Gleichungen zur Verfügung, um die drei Unbekannten zu bestimmen.

– Auflösen nach den gesuchten Größen:

- Wird vom dynamischen Gleichgewicht für Masse 1 zweimal das dynamische Gleichgewicht für Masse 2 abgezogen, so folgt:

$$\left(m_1 - 2m_2\right) g = m_1 a_1 - 2m_2 a_2$$

- Berücksichtigung der Bindungsgleichung führt auf

$$\left(m_1 - 2m_2\right) g = \left(m_1 + 4m_2\right) a_1$$

1.4 Massenpunktsysteme

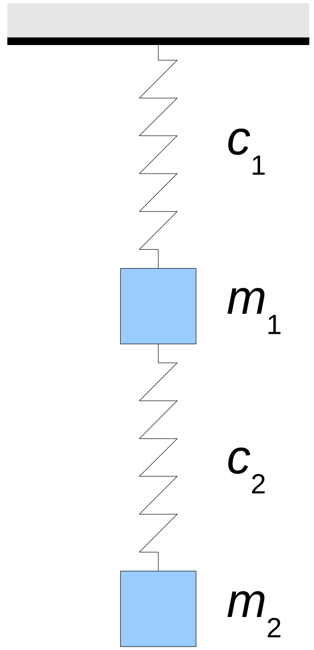
- Ergebnis:
  - Beschleunigungen: $a_1 = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2} g , \quad a_2 = 2 \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} g$
  - Für $m_1 = 2m_2$ ist das System im Gleichgewicht.
  - Die Seilkraft kann aus dem dynamischen Gleichgewicht für Masse 2 bestimmt werden:

$$S = m_2 \left(g - a_2 \right) = m_2 \frac{m_1 + 4m_2 - 4m_2 + 2m_1}{m_1 + 4m_2} g = \frac{3m_1 m_2}{m_1 + 4m_2} g$$

- Durch die kinematische Bindung wird die Anzahl der Freiheitsgrade von 2 Freiheitsgraden auf einen Freiheitsgrad reduziert.

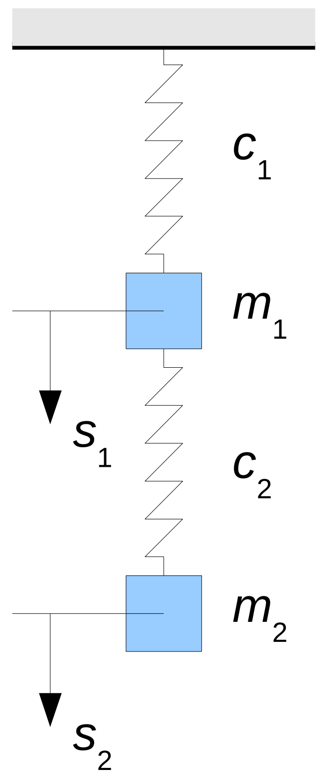
1.4 Massenpunktsysteme

- Beispiel: Feder-Masse System
  - Aufgabenstellung:
    - Die Masse m_1 hängt an einer masselosen Feder mit der Federkonstanten c_1.
    - Die Masse m_2 ist über eine masselose Feder mit der Federkonstanten c_2 mit der Masse m_1 verbunden.
    - Wie lauten die Bewegungsgleichungen?



1.4 Massenpunktsysteme

– Wahl der Freiheitsgrade:
  - Die Lagekoordinaten s_1 und s_2 der beiden Massen werden ab der Ausgangslage positiv nach unten gemessen.
  - In der Ausgangslage sind die Federn entspannt.



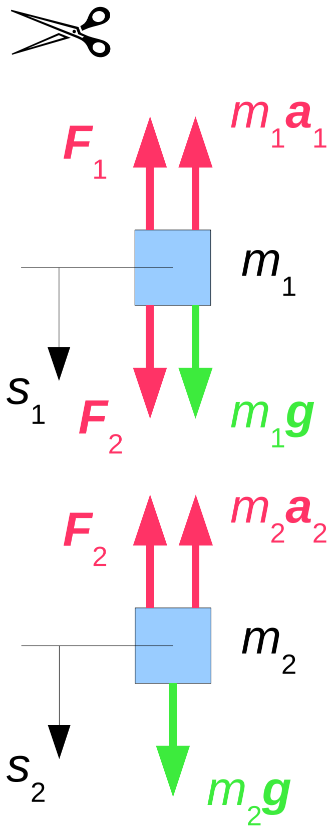
1.4 Massenpunktsysteme

- Dynamisches Gleichgewicht:

$$\sum_D F_{s_1} = 0 \ : \ m_1 g + F_2 - F_1 - m_1 a_1 = 0$$

$$\sum_D F_{s_2} = 0 \ : \ m_2 g - F_2 - m_2 a_2 = 0$$

- Bindungsgleichungen:
  - Die Federn stellen physikalische Bindungen dar.
  - Feder 1: $F_1 = c_1 s_1$
  - Feder 2: $F_2 = c_2 (s_2 - s_1)$



1.4 Massenpunktsysteme

- Auflösen:
  - Einsetzen der physikalischen Bindungen in das dynamische Gleichgewicht führt auf die Bewegungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{s}_1 &= m_1 g - \left(c_1 + c_2\right) s_1 + c_2 s_2 \\
m_2 \ddot{s}_2 &= m_2 g + c_2 s_1 - c_2 s_2
\end{aligned}
$$

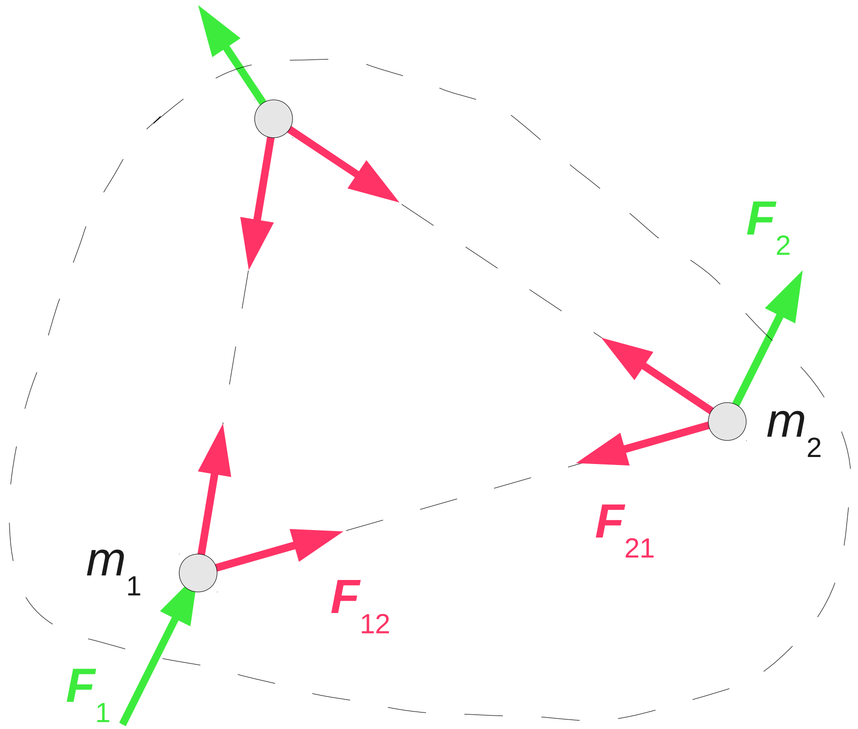
  - Es handelt sich um ein System von zwei gekoppelten linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
  - Für die Gleichgewichtslage gilt:

$$
\begin{aligned}
\left(c_1 + c_2\right) s_1 - c_2 s_2 &= m_1 g \\
-c_2 s_1 + c_2 s_2 &= m_2 g
\end{aligned}
$$

- Durch die physikalischen Bindungen wird die Anzahl der Freiheitsgrade nicht verringert.

1.5 Schwerpunktsatz

- Innere und äußere Kräfte:
  - Die zum System gehörenden Massenpunkte werden durch eine gedachte Systemgrenze von Körpern außerhalb des Systems abgegrenzt.



1.5 Schwerpunktsatz

- Äußere Kräfte:
  - Äußere Kräfte haben ihre Ursache außerhalb des Systems:
    - Eingeprägte Kräfte: Gewichtskraft
    - Lagerkräfte
    - Zwangskräfte
  - Die aus den auf die Masse mit Index *i* wirkenden äußeren Kräften resultierende Kraft wird mit $\boldsymbol{F}_i$ bezeichnet.
- Innere Kräfte:
  - Innere Kräfte werden durch kinematische oder physikalische Bindungen verursacht.
  - Sie werden durch Freischneiden sichtbar gemacht.

1.5 Schwerpunktsatz

- Die innere Kraft, die der Massenpunkt *j* auf den Massenpunkt *i* ausübt, wird mit $\boldsymbol{F}_{ij}$ bezeichnet.
- Wegen Actio = Reactio sind $\boldsymbol{F}_{ij}$ und $\boldsymbol{F}_{ji}$ entgegengesetzt gleich groß:
$$\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{F}_{ji}=\boldsymbol{0}$$

- Bewegungsgleichungen für die Massenpunkte:
  - Für jeden Massenpunkt *i* gilt: $$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}$$
  - Die Summe erstreckt sich über alle inneren Kräfte, die am Massenpunkt *i* angreifen.

1.5 Schwerpunktsatz

- Summation über alle Massenpunkte ergibt:

$$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_i \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} + \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ij}}$$

- Die Summe der äußeren Kräfte ergibt die resultierende äußere Kraft:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{F}$$

- In der doppelten Summe über die inneren Kräfte gibt es zu jedem Summand $\boldsymbol{F}_{ij}$ den entsprechenden Summanden $\boldsymbol{F}_{ji}$.
- Daher verschwindet die Summe über die inneren Kräfte, so dass gilt:

$$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{F}$$

1.5 Schwerpunktsatz

- Schwerpunkt:
  - Der Ortsvektor $\boldsymbol{r}_S$ des Schwerpunktes ist definiert durch

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{1}{m} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i$$

  - Dabei ist $m = \sum_i m_i$ die gesamte Masse des Systems.
  - Aus der Definition des Schwerpunktes folgt

$$m\,\boldsymbol{r}_S = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i$$

  - Zweimaliges Ableiten nach der Zeit führt auf

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

1.5 Schwerpunktsatz

- Damit ist gezeigt:

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \boldsymbol{F}}$$

> Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angriffen.

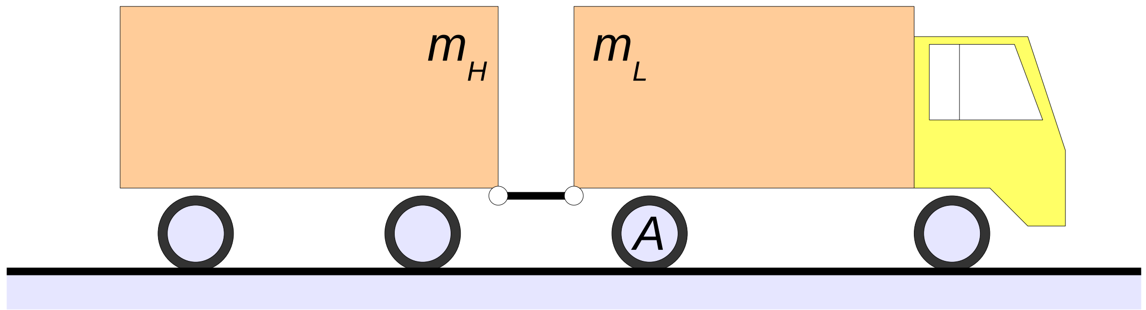
  - Die Art der Bindungen spielt dabei keine Rolle:
    - starre Bindungen
    - Federn
    - Gravitationskräfte zwischen den Massenpunkten

1.5 Schwerpunktsatz

- Dynamisches Gleichgewicht:
  - Mit $\boldsymbol{F}_T = -m\,\boldsymbol{a}_S$ lautet der Schwerpunktsatz: $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_T = \boldsymbol{0}$
  - Die d'Alembertsche Trägheitskraft eines Systems von Massenpunkten wird mit der Beschleunigung des Schwerpunkts berechnet.
  - Sie wird im Freischnitt am Schwerpunkt eingetragen.
  - Später wird gezeigt: Wenn sich das System von Massenpunkten dreht, kann zusätzlich ein d'Alembertsches Trägheitsmoment um den Schwerpunkt auftreten.

1.5 Schwerpunktsatz

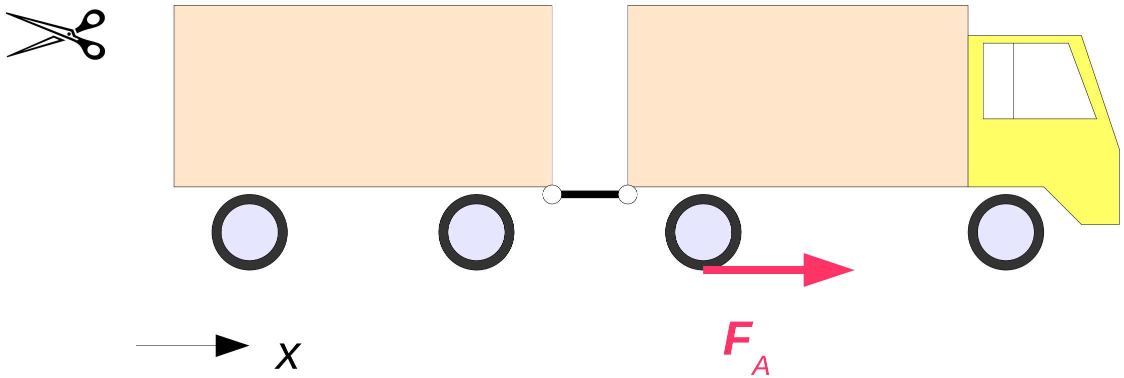
- Beispiel:



  - Aufgabenstellung:
    - Der LKW der Masse m_L zieht einen Anhänger der Masse m_H.
    - Der LKW fährt mit der konstanten Beschleunigung a_0 an.
    - Wie groß ist die Kraft F_A, die an den Antriebsrädern angreifen muss?
    - Wie groß ist die Kraft F_D in der Deichsel?

1.5 Schwerpunktsatz

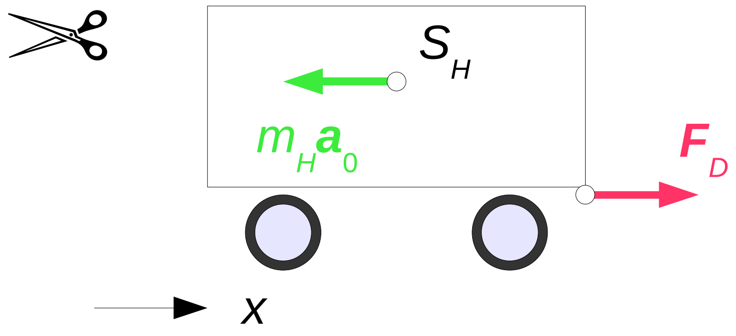
- Zahlenwerte:
  - $m_L = 20t,\ m_H = 15t,\ a_0 = 2m/s^2$
- Antriebskraft:



  - Schwerpunktsatz: $$\left(m_H + m_L\right) a_0 = F_A$$
  - Zahlenwert: $$F_A = \left(15000 + 20000\right) kg \cdot 2\, m/s^2 = \underline{70\, kN}$$

1.5 Schwerpunktsatz

- Deichselkraft:



- Dynamisches Gleichgewicht am Anhänger:

$$\sum_D F_x = 0 \;:\; -m_H a_0 + F_D = 0 \;\rightarrow\; F_D = m_H a_0$$

- Zahlenwert: $F_D = 15000\,kg \cdot 2\,m/s^2 = \underline{30\,kN}$