4. Stoßvorgänge

- Stoßvorgänge sind Vorgänge von sehr kurzer Dauer, bei denen zwischen den beteiligten Körpern große Kräfte auftreten.
- Gesucht wird ein Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten vor dem Stoß und den Geschwindigkeiten nach dem Stoß.
- Der genaue zeitliche Verlauf der Kräfte ist nicht bekannt.
- Stoßvorgänge werden daher mithilfe des integrierten Impulssatzes beschrieben.
- Dabei müssen Annahmen zum Kraftstoß getroffen werden.

4. Stoßvorgänge

4.1 Idealisierungen

4.2 Stoß eines Massenpunktes

4.3 Stoß zwischen zwei Massenpunkten

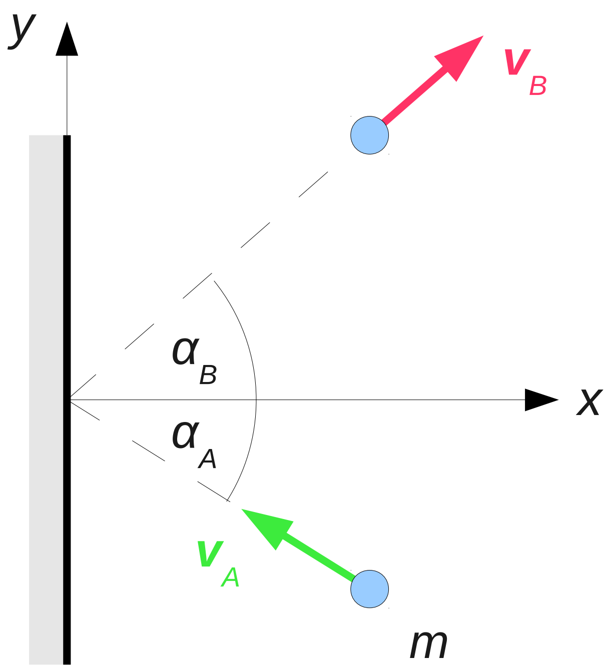
4.1 Idealisierungen

- Idealisierungen sind vereinfachende Annahmen, die getroffen werden, damit ein Problem rechnerisch untersucht werden kann.
- Bei Stoßvorgängen werden folgende Annahmen getroffen:
  - Die Stoßdauer t_S ist so klein, dass Lageänderungen der beteiligten Körper während der Stoßdauer vernachlässigt werden können.
  - Es müssen nur die durch den Stoß verursachten Kraftstöße berücksichtigt werden. Wegen der sehr kleinen Stoßdauer sind die Kraftstöße aller anderen Kräfte vernachlässigbar.

4.1 Idealisierungen

- Die Verformungen der beiden Körper sind so klein, dass die Bewegungsgesetze für starre Körper angewendet werden können.

4.2 Stoß eines Massenpunktes



- Ein Massenpunkt trifft schräg auf eine glatte Wand.
  - Bekannt:
    - Masse *m*
    - Geschwindigkeit v_A, α_A vor dem Auftreffen
  - Gesucht:
    - Geschwindigkeit v_B, α_B nach dem Auftreffen

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Geometrie: $v_{Ax} = -v_A \cos(\alpha_A), \quad v_{Ay} = v_A \sin(\alpha_A)$

  $v_{Bx} = v_B \cos(\alpha_B), \quad v_{By} = v_B \sin(\alpha_B)$

- Integrierter Impulssatz in *y*-Richtung:
  - Da die Wand glatt ist, werden keine Kräfte in *y*-Richtung übertragen.
  - Damit gilt: $m v_{By} - m v_{Ay} = 0 \;\rightarrow\; v_{By} = v_{Ay}$
- Integrierter Impulssatz in *x*-Richtung:
  - Der Stoßvorgang wird in zwei Phasen unterteilt, die Kompressionsphase und die Restitutionsphase.

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Kompressionsphase:
  - Der Massenpunkt wird zusammengedrückt, bis die Geschwindigkeit senkrecht zur Wand null ist.
  - Dazu muss auf die Masse der Kraftstoß $\hat{F}_K$ wirken:

$$m \cdot 0 - m v_{Ax} = \hat{F}_K \quad \rightarrow \quad -m v_{Ax} = \hat{F}_K$$

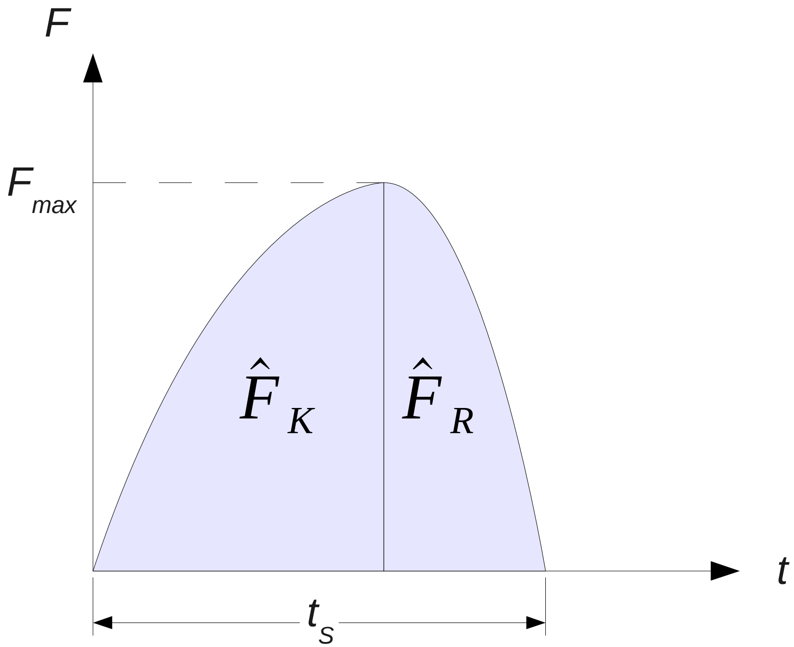
- Restitutionsphase:
  - Während der Restitutionsphase bildet sich die Verformung ganz oder teilweise zurück.
  - Dabei nimmt die von der Wand auf den Massenpunkt ausgeübte Kraft ab und ist am Ende der Restitutionsphase null.

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Für den Kraftstoß $\hat{F}_R$ während der Restitutionsphase gilt:

$$m v_{Bx} - m \cdot 0 = \hat{F}_R \quad \rightarrow \quad m v_{Bx} = \hat{F}_R$$

- Zeitlicher Verlauf der Kraft auf den Massenpunkt:



4.2 Stoß eines Massenpunktes

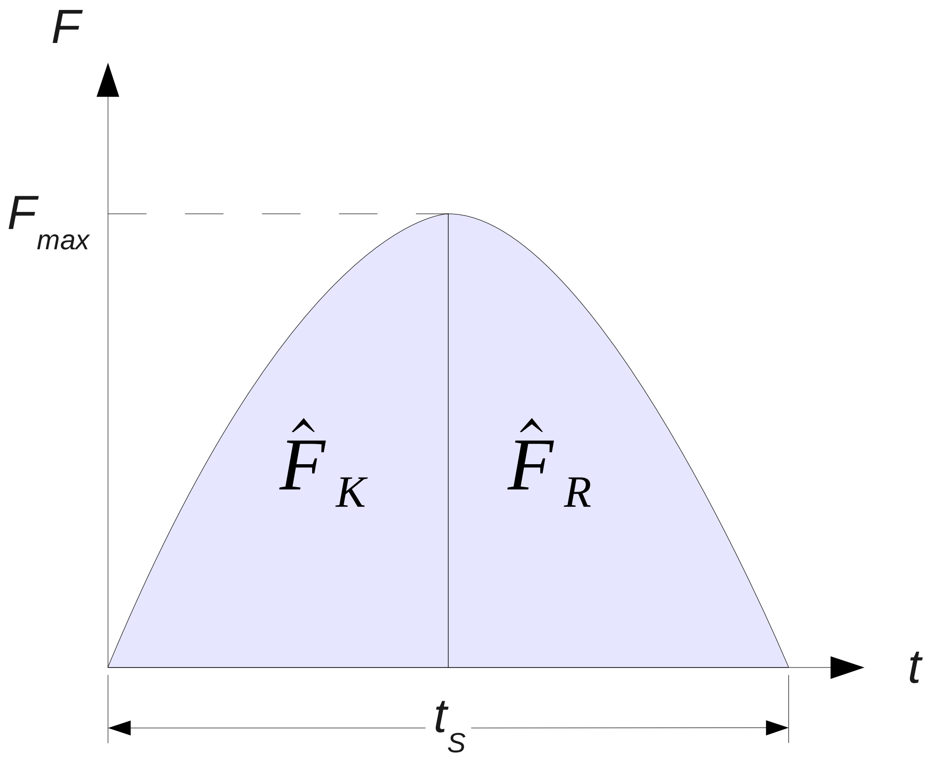
- Stoßhypothese:
  - Mit $-m\,v_{Ax}=\hat{F}_K\,,\quad m\,v_{Bx}=\hat{F}_R$

    stehen zwei Gleichungen zur Ermittlung der drei Unbekannten $v_{Bx}\,,\hat{F}_K\,,\hat{F}_R$ zur Verfügung.
  - Zur Lösung wird noch eine Hypothese über das Verformungsverhalten benötigt.
  - Diese Hypothese stellt einen Zusammenhang zwischen den beiden Kraftstößen her.

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Vollkommen elastischer Stoß:
  - Verformungen und Kräfte in der Restitutionsphase verlaufen spiegelbildlich zur Kompressionsphase.
  - Nach dem Stoßende hat die Masse wieder ihre ursprüngliche Form.
  - Für die Kraftstöße gilt:

$$\hat{F}_R = \hat{F}_K$$



4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Damit folgt: $$\begin{aligned} -m v_{Ax} &= \hat{F}_K \\ m v_{Bx} &= \hat{F}_K \end{aligned} \rightarrow m v_{Ax} + m v_{Bx} = 0$$

- Ergebnis: $$\begin{aligned} v_{Bx} &= -v_{Ax} \\ v_{By} &= v_{Ay} \end{aligned} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} v_B &= v_A \\ \alpha_B &= \alpha_A \end{aligned}}$$

– Vollkommen plastischer Stoß:

- Die gesamte Verformung bleibt erhalten.
- Der Kraftstoß während der Restitutionsphase verschwindet:

$$\hat{F}_R = 0$$

- Damit folgt: $v_{Bx} = 0$

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Mit $v_{Bx} = v_B \cos(\alpha_B)$, $v_{By} = v_B \sin(\alpha_B)$ und $v_{By} = v_{Ay}$ folgt weiter:

  $$\alpha_B = 90°$$

  $$v_B = v_{By} = v_{Ay} = v_A \sin(\alpha_A)$$

- Der Massenpunkt rutscht an der Wand entlang.

– Teilelastischer Stoß:

- Die Verformungen bilden sich teilweise zurück.
- Für die Kraftstöße gilt: $$\boxed{\hat{F}_R = k \hat{F}_K}$$
- Die dimensionslose Konstante *k* wird als Stoßzahl bezeichnet.
- Der Wert der Stoßzahl liegt zwischen 0 (vollkommen plastischer Stoß) und 1 (vollkommen elastischer Stoß).

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Damit folgt:

$$\begin{aligned} -m v_{Ax} &= \hat{F}_K \\ m v_{Bx} &= k \hat{F}_K \end{aligned} \quad \rightarrow \quad k m v_{Ax} + m v_{Bx} = 0$$

- Ergebnis:

$$v_{Bx} = -k v_{Ax}$$

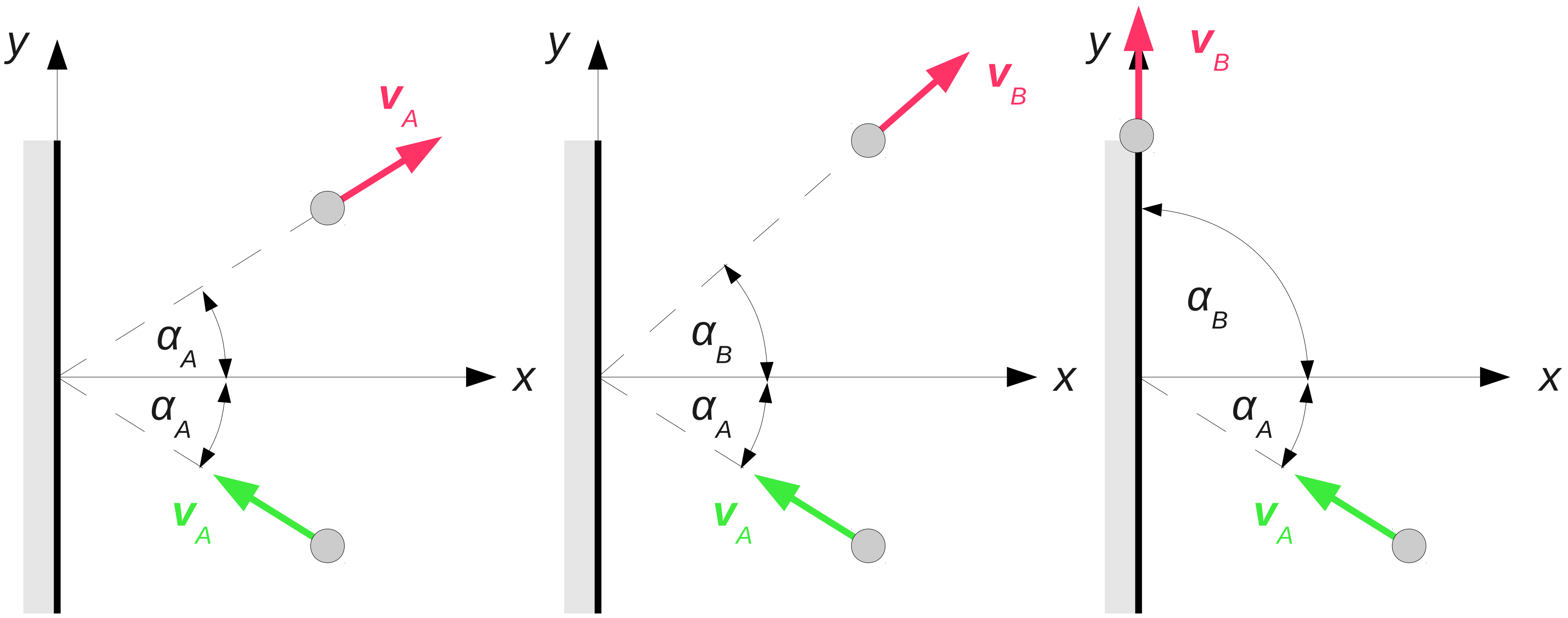
$$\tan(\alpha_B) = \frac{v_{By}}{v_{Bx}} = \frac{v_{Ay}}{-k v_{Ax}} = \frac{1}{k} \tan(\alpha_A)$$

- Wegen $k < 1$ gilt: $\tan(\alpha_B) > \tan(\alpha_A) \quad \rightarrow \quad \alpha_B > \alpha_A$
- Die Stoßzahl kann aus dem Verhältnis der Geschwindigkeiten berechnet werden:

$$k = -\frac{v_{Bx}}{v_{Ax}}$$

- Die Stoßzahl hängt von den Eigenschaften des Körpers und von den Eigenschaften der Wand ab.

4.2 Stoß eines Massenpunktes



$k = 1$ — vollkommen elastisch

$0 < k < 1$ — teilelastisch

$k = 0$ — vollkommen plastisch

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Bestimmung der Stoßzahl im Fallversuch:
  - Eine Masse fällt aus der Höhe h_A senkrecht auf eine waagerechte Unterlage.
  - Nach dem Stoß erreicht sie die Höhe h_B.
  - Geschwindigkeiten nach oben werden positiv gezählt.
  - Dann gilt für die Geschwindigkeit v_A : $v_A = -\sqrt{2\,g\,h_A}$
  - Für die Höhe h_B gilt: $h_B = \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} \rightarrow v_B = \sqrt{2\,g\,h_B}$
  - Damit folgt für die Stoßzahl: $k = -\frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{h_B}{h_A}}$

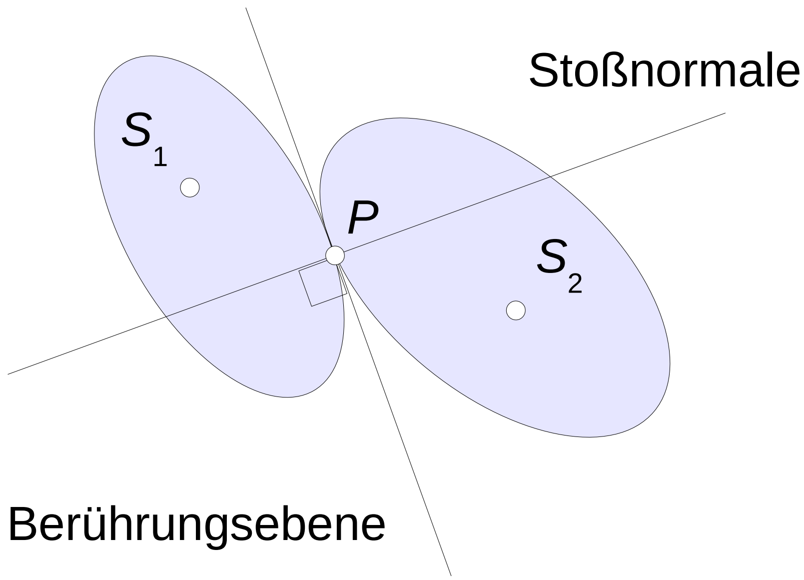
4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Typische Werte der Stoßzahl:
  - Glas auf Glas: 0,94
  - Stahl auf Stahl: 0,8
  - Holz auf Holz: 0,5
  - Kork auf Kork: 0,56
- Außer vom Material hängt die Stoßzahl auch von der Geometrie des Körpers und von der Größe des Kraftstoßes ab.

4.3 Stoß zwischen zwei Massenpunkten

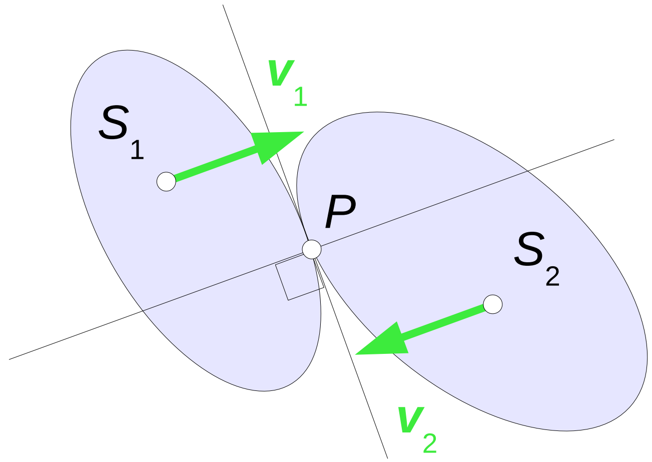
4.3.1 Definitionen

- Berührungsebene und Stoßnormale:
  - Die Berührungsebene liegt tangential zu den beiden Körpern.
  - Der Stoßpunkt *P* liegt in der Berührungsebene.
  - Die Stoßnormale geht durch den Stoßpunkt *P* und steht senkrecht auf der Berührungsebene.

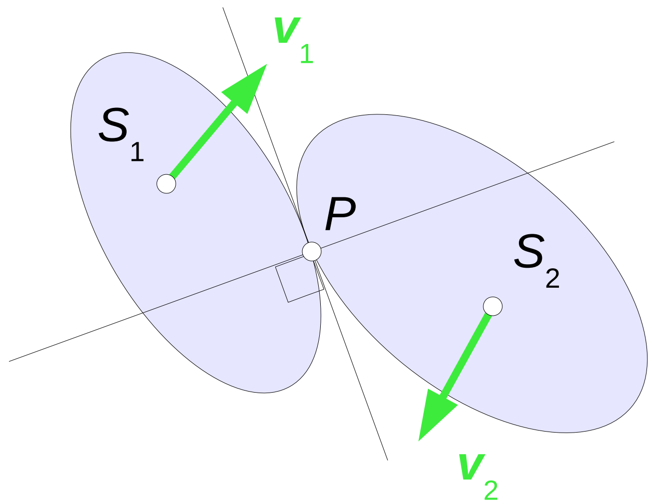


4.3.1 Definitionen

- Gerader Stoß:
  - Die Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß haben die Richtung der Stoßnormalen.

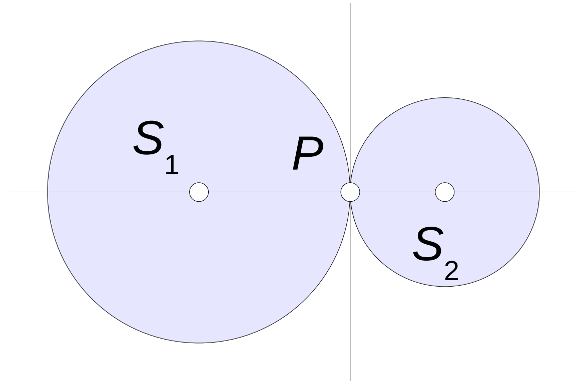


- Schiefer Stoß:
  - Die Richtungen der Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß stimmen nicht mit der Stoßnormalen überein.

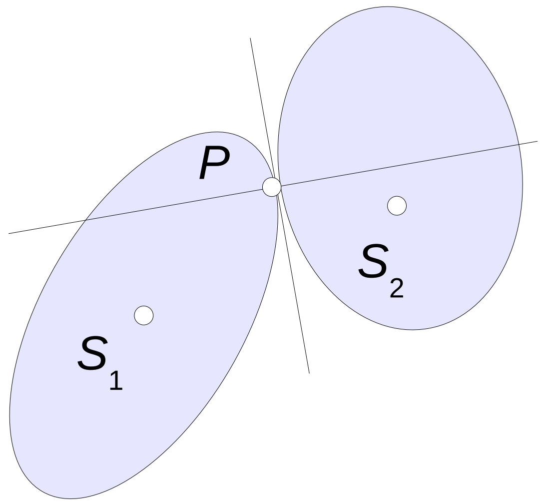


4.3.1 Definitionen

- Zentrischer Stoß:
  - Die Stoßnormale geht durch die beiden Schwerpunkte.
  - Beim zentrischen Stoß können die beteiligten Körper als Massenpunkte betrachtet werden

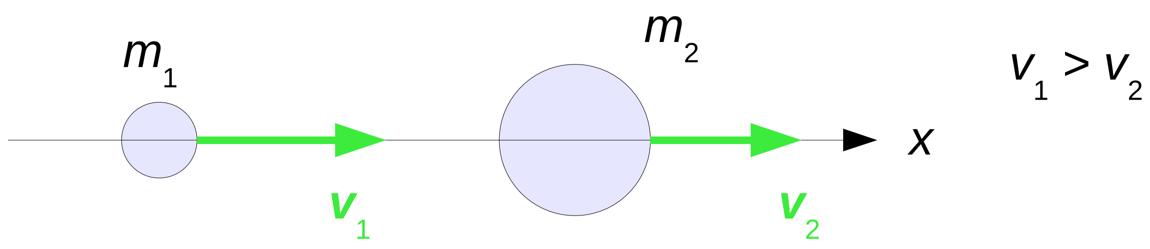


- Exzentrischer Stoß:
  - Die Stoßnormale geht nicht durch die beiden Schwerpunkte.



4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Vor dem Stoß:



  - Die Massen m_1 und m_2 bewegen sich mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 entlang einer Geraden, die mit der Stoßnormalen übereinstimmt.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Während des Stoßes:

  - Zum Zeitpunkt $t = 0$ treffen die beiden Massen aufeinander.
  - Sie üben eine Kraft $\boldsymbol{F}(t)$ aufeinander aus.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Kompressionsphase:
  - Während der Kompressionsphase werden die beiden Massen zusammengedrückt.
  - Am Ende der Kompressionsphase (Zeitpunkt t_0) haben die beiden Massen die gleiche Geschwindigkeit v_0.
  - Die Kontaktkraft $F(t)$ erreicht zum Ende der Kompressionsphase ihr Maximum.
  - Für den Kraftstoß während der Kompressionsphase gilt:

$$\hat{F}_K = \int_0^{t_0} F(t)\,dt$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Restitutionsphase:
  - Während der Restitutionsphase bilden sich die Verformungen teilweise oder vollkommen zurück.
  - Dabei fällt die Kontaktkraft $F(t)$ ab und ist am Ende (Zeitpunkt t_S) null.
  - Für den Kraftstoß während der Restitutionsphase gilt:

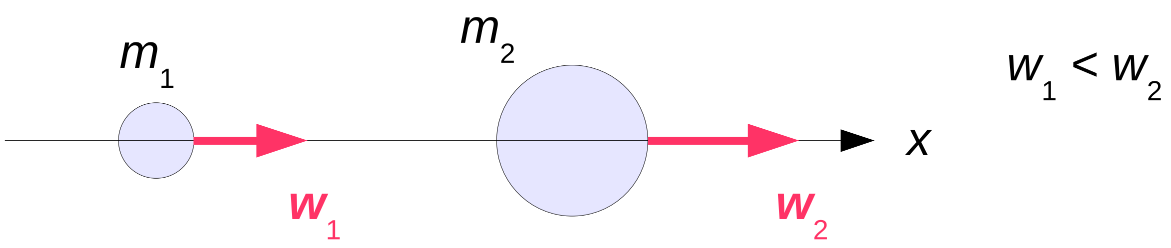
$$\hat{F}_R = \int_{t_0}^{t_S} F(t)\,dt$$

- Stoßhypothese:
  - Zwischen den Kraftstößen besteht die Beziehung

$$\hat{F}_R = k\,\hat{F}_K$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Nach dem Stoß:



  - Die Massen m_1 und m_2 bewegen sich mit den Geschwindigkeiten w_1 und w_2 entlang einer Geraden, die mit der Stoßnormalen übereinstimmt.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Geschwindigkeiten nach dem Stoß:
  - Der integrierte Impulssatz für jede der beiden Massen während der Kompressionsphase lautet:

$$m_1 \left(v_0 - v_1 \right) = -\hat{F}_K , \quad m_2 \left(v_0 - v_2 \right) = \hat{F}_K$$

  - Der integrierte Impulssatz für jede der beiden Massen während der Restitutionsphase lautet:

$$m_1 \left(w_1 - v_0 \right) = -k \hat{F}_K , \quad m_2 \left(w_2 - v_0 \right) = k \hat{F}_K$$

  - Damit stehen vier Gleichungen zur Verfügung, mit denen die vier Unbekannten w_1, w_2, v_0 und $\hat{F}_K$ berechnet werden können.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Addition der beiden Gleichungen für die Kompressionsphase ergibt:

$$m_1 \left(v_0 - v_1 \right) + m_2 \left(v_0 - v_2 \right) = 0 \quad \rightarrow \quad v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

- Damit folgt für den Kraftstoß:

$$\hat{F}_K = m_2 \left(v_0 - v_2 \right) = m_2 \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 \right)$$

$$= m_2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - \left(m_1 + m_2 \right) v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(v_1 - v_2 \right)$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Aus den Gleichungen für die Restitutionsphase folgt:

$$w_1 = v_0 - k\,\frac{\hat{F}_K}{m_1} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - k\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)$$

$$w_2 = v_0 + k\,\frac{\hat{F}_K}{m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + k\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)$$

- Ergebnis:

$$\boxed{\begin{aligned} w_1 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - k\,m_2\left(v_1 - v_2\right)}{m_1 + m_2} \\ w_2 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k\,m_1\left(v_1 - v_2\right)}{m_1 + m_2} \end{aligned}}$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Spezialfälle:
  - Ideal plastischer Stoß: $k = 0$ $\quad \rightarrow \quad w_1 = w_2 = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$
  - Ideal elastischer Stoß: $k = 1$

$$w_1 = \frac{2 m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}, \quad w_2 = \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$$

  - Gleich große Massen: $m_1 = m_2$

$$w_1 = \frac{1}{2}\left[(1-k) v_1 + (1+k) v_2\right], \quad w_2 = \frac{1}{2}\left[(1+k) v_1 + (1-k) v_2\right]$$

  - Ideal elastisch mit gleich großen Massen: $w_1 = v_2, \quad w_2 = v_1$
  - Ideal plastisch mit gleich großen Massen: $w_1 = w_2 = \dfrac{1}{2}(v_1 + v_2)$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Impulserhaltung:
  - Da wegen der sehr kurzen Stoßzeit der Kraftstoß der äußeren Kräfte auf das Gesamtsystem vernachlässigbar ist, muss der Impuls des Gesamtsystems erhalten bleiben.
  - Addition der integrierten Impulssätze für die Kompressionsphase ergibt:

$$m_1\left(v_0-v_1\right)+m_2\left(v_0-v_2\right)=0$$

  - Addition der integrierten Impulssätze für die Restitutionsphase ergibt:

$$m_1\left(w_1-v_0\right)+m_2\left(w_2-v_0\right)=0$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Addition dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$m_1 \left(w_1 - v_1 \right) + m_2 \left(w_2 - v_2 \right) = 0$$

- Daraus folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} & m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ & \quad = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{aligned}}$$

- Diese Beziehung gilt unabhängig von der Stoßzahl.

- Stoßbedingung:
  - Für die Geschwindigkeitsdifferenz $w_2 - w_1$ folgt:

$$\begin{aligned} & w_2 - w_1 \\ & = \frac{k\, m_1 \left(v_1 - v_2 \right) + k\, m_2 \left(v_1 - v_2 \right)}{m_1 + m_2} \\ & = k \left(v_1 - v_2 \right) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{k = -\frac{w_2 - w_1}{v_2 - v_1}}$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Die Stoßzahl ist gleich dem Verhältnis von relativer Trennungsgeschwindigkeit zu relativer Annäherungsgeschwindigkeit.
- Mit Impulserhaltungssatz und Stoßbedingung stehen zwei Gleichungen zur Verfügung, die nach w_1 und w_2 oder nach v_1 und v_2 aufgelöst werden können.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Energiebilanz:
  - Die mechanische Energie, die dem System durch Verformung und Erwärmung verloren geht, berechnet sich aus der Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß:

$$\Delta E = E_v^K - E_n^K = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2\right)$$

  - Daraus folgt zunächst:

$$\begin{aligned} 2\Delta E &= m_1\left(v_1^2 - w_1^2\right) + m_2\left(v_2^2 - w_2^2\right) \\ &= m_1\left(v_1 - w_1\right)\left(v_1 + w_1\right) + m_2\left(v_2 - w_2\right)\left(v_2 + w_2\right) \end{aligned}$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Mit $m_2(v_2 - w_2) = -m_1(v_1 - w_1)$ folgt weiter:

$$\begin{aligned} 2\Delta E &= m_1(v_1 - w_1)(v_1 + w_1) - m_1(v_1 - w_1)(v_2 + w_2) \\ &= m_1(v_1 - w_1)(v_1 + w_1 - v_2 - w_2) \\ &= m_1(v_1 - w_1)(v_1 - v_2 - k(v_1 - v_2)) \end{aligned}$$

- Aus den Stoßgleichungen folgt:

$$v_1 - w_1 = \frac{(m_1 + m_2)v_1 - m_1 v_1 - m_2 v_2 + k\, m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_2(v_1 - v_2) + k\, m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + k)(v_1 - v_2)$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Damit folgt:

$$2\,\Delta E=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(1+k\right)\left(v_1-v_2\right)\left(1-k\right)\left(v_1-v_2\right)$$

- Ergebnis:

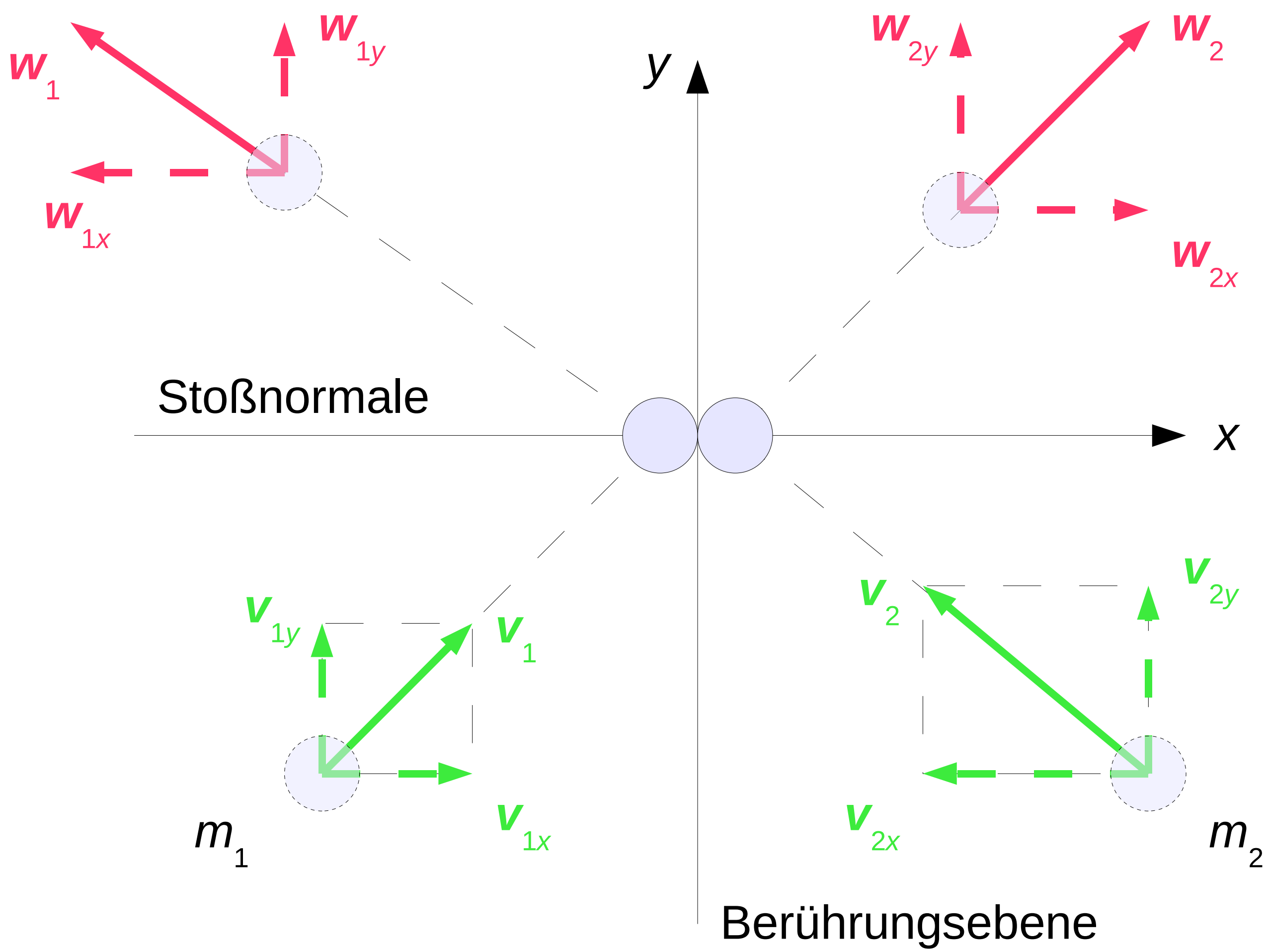
$$\boxed{\Delta E=\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(1-k^2\right)\left(v_1-v_2\right)^2}$$

- Beim ideal elastischen Stoß ist wegen k = 1 der Energieverlust null.
- Beim ideal plastischen Stoß ist wegen k = 0 der Energieverlust am größten.

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß

- Betrachtet wird nur der schiefe zentrische Stoß zweier Massen in der Ebene.
- Dabei wird angenommen, dass die Oberflächen der Massen glatt sind.

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß



Geschwindigkeiten entgegen der *x*-Achse sind negativ.

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß

- Impulserhaltungssatz in *y*-Richtung:
  - Da die Oberflächen der beiden Massen als glatt vorausgesetzt werden, werden in der Berührungsebene keine Kräfte übertragen.
  - Der Impulserhaltungssatz in *y*-Richtung für jede der beiden Massen liefert:

$$m_1 v_{1y} = m_1 w_{1y} \quad \rightarrow \quad v_{1y} = w_{1y}$$

$$m_2 v_{2y} = m_2 w_{2y} \quad \rightarrow \quad v_{2y} = w_{2y}$$

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß

- Integrierter Impulssatz in *x*-Richtung:
  - In Richtung der Stoßnormalen liegen die gleichen Verhältnisse vor wie beim geraden zentrischen Stoß.
  - Der über die gesamte Stoßzeit t_S integrierte Impulssatz für jede der beiden Massen lautet:

$$m_1 w_{1x} - m_1 v_{1x} = -\hat{F}, \quad m_2 w_{2x} - m_2 v_{2x} = \hat{F}$$

$$\hat{F} = \hat{F}_K + \hat{F}_R$$

  - Zusätzlich muss die Stoßbedingung erfüllt sein:

$$k = -\frac{w_{1x} - w_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}$$

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß

- Damit stehen drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten w_{1x}, w_{2x} und $\hat{F}$ zur Verfügung.
- Wie beim geraden zentrischen Stoß folgt:

$$w_{1x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} - k\, m_2 \left(v_{1x} - v_{2x} \right)}{m_1 + m_2}$$

$$w_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + k\, m_1 \left(v_{1x} - v_{2x} \right)}{m_1 + m_2}$$

- Geschwindigkeiten entgegen der *x*-Achse sind negativ.