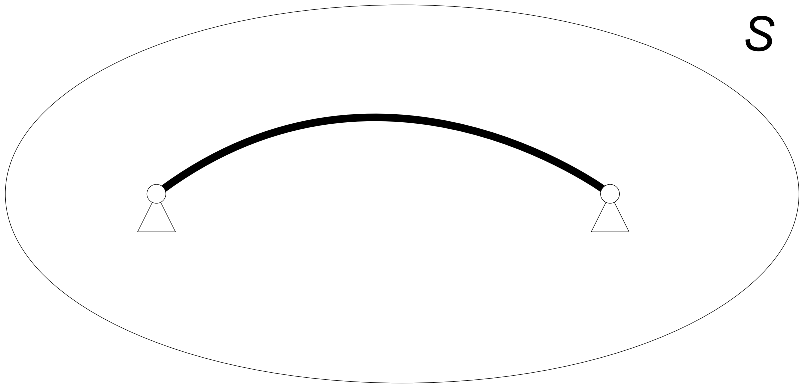
3. Dipole und Multipole

- Dipole und Multipole sind einfache Beispiele für gerichtete akustische Strahler, bei denen der Schalldruck außer vom Abstand auch von der Richtung abhängt.
- Inhalt:
  1. Dipole
  2. Multipole

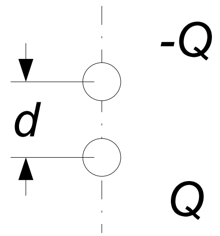
3.1 Dipole

- Eine kleine schwingende Membran oder Platte schiebt die sie umgebende Luft hin und her.
- Der Volumenfluss durch jede die Platte umgebende geschlossene Fläche *S* ist null.



3.1 Dipole

- Definition:
  - Ein einfaches Modell für eine Schallquelle, deren resultierender Volumenfluss verschwindet, besteht aus zwei nahe beieinander liegenden Punktschallquellen, deren Volumenflüsse entgegengesetzt gleich groß sind.
  - Eine solche Anordnung von Schallquellen wird als Dipol bezeichnet.



$$d \ll \lambda$$

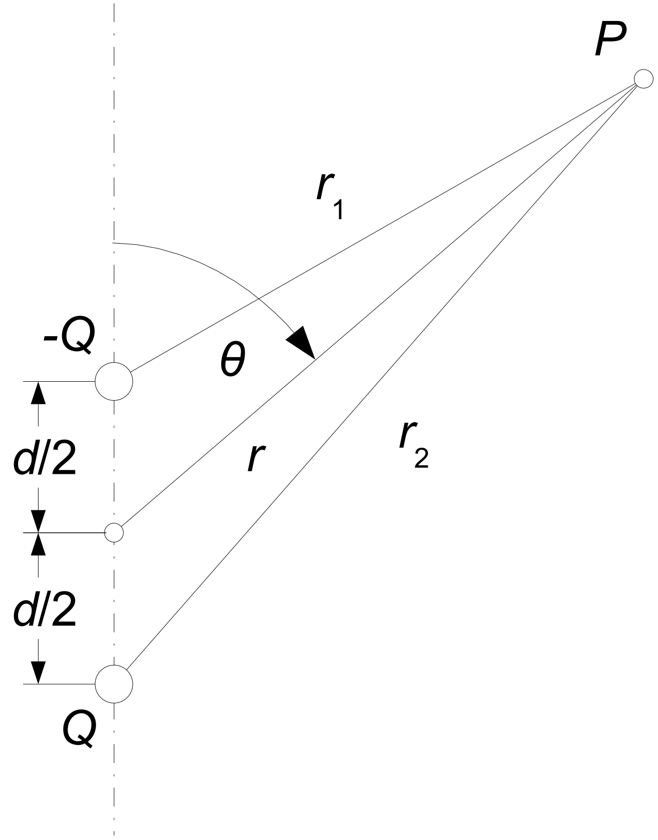
3.1 Dipole

- Schallfeld:
  - Für den Schalldruck im Punkt *P* gilt:

$$P(r,\theta)=\frac{i\omega\rho_0 Q}{4\pi}\left(\frac{e^{-ikr_2}}{r_2}-\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}\right)$$

  - Aus der Geometrie folgt:

$$r_1^2=r^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2-r\,d\cos(\theta)$$
$$=r^2\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{d}{r}\right)^2-\left(\frac{d}{r}\right)\cos(\theta)\right]$$



3.1 Dipole

- Für $d/r \ll 1$ vereinfacht sich die Beziehung zu

$$r_1 \approx r\sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)\cos(\theta)} \approx r\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)\cos(\theta)\right) = r - \frac{d}{2}\cos(\theta)$$

- Aus $r_2^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - r\,d\cos(180° - \theta) = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r\,d\cos(\theta)$

folgt entsprechend: $r_2 \approx r + \frac{d}{2}\cos(\theta)$

3.1 Dipole

- Für die Exponentialfunktion gilt in erster Näherung:

$$\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\frac{d}{2}\cos(\theta)$$

$$\frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\frac{d}{2}\cos(\theta)$$

- Für die Differenz folgt:

$$\frac{e^{-ikr_2}}{r_2} - \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \approx \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) d\cos(\theta) = -(ikr+1)\frac{e^{-ikr}}{r^2} d\cos(\theta)$$

3.1 Dipole

- Damit berechnet sich der Schalldruck zu

$$P(r,\theta) = -\frac{i\omega\rho_0 Q}{4\pi}(ikr+1)\frac{e^{-ikr}}{r^2}d\cos(\theta)$$

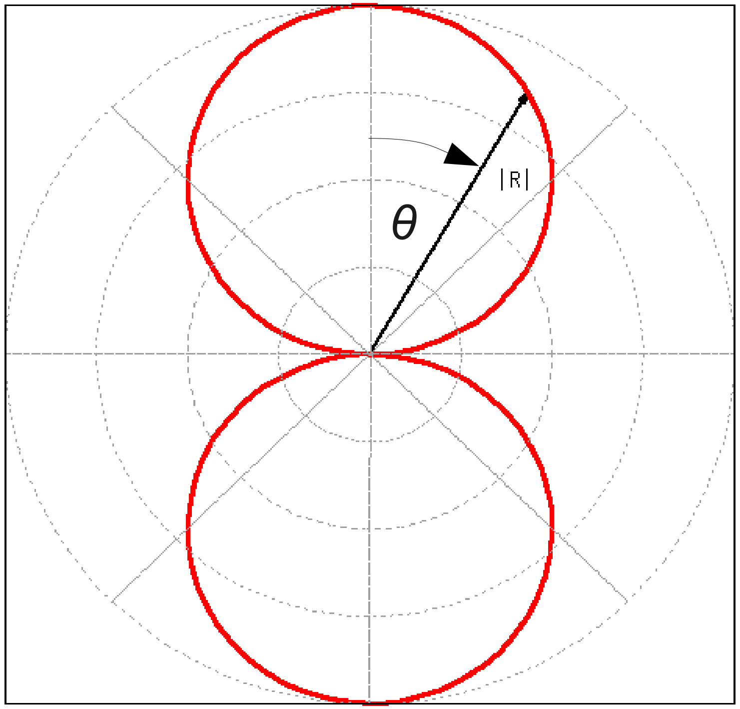
$$= \frac{k^2\rho_0 c\, d\, Q}{4\pi}\left(1+\frac{1}{ikr}\right)\cos(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}$$

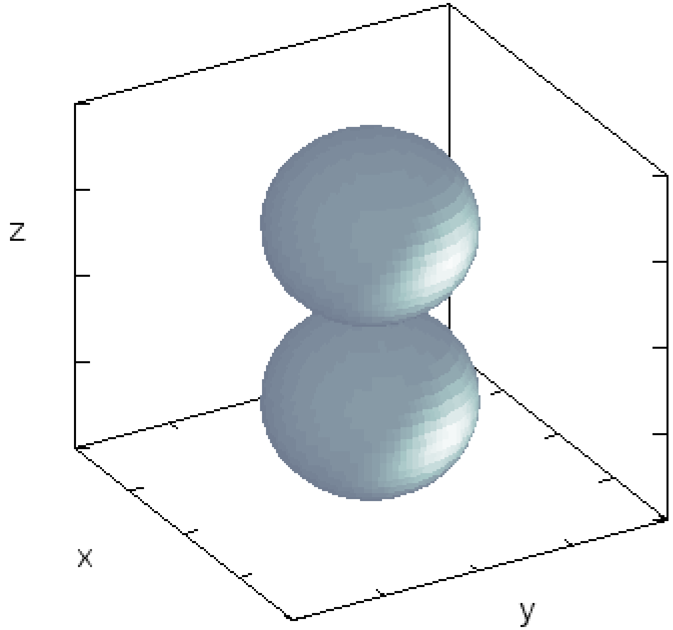
- Mit dem Dipolmoment $D = Q\,d$ gilt:

$$\boxed{P(r,\theta) = \frac{k^2\rho_0 c\, D}{4\pi}\left(1+\frac{1}{ikr}\right)\cos(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}}$$

3.1 Dipole

- Die Richtungsabhängigkeit des Schalldrucks wird beschrieben durch die Richtcharakteristik $R(\theta)=\cos(\theta)$:





3.1 Dipole

- Die Schallschnelle berechnet sich zu

$$V_r(r,\theta)=\frac{i}{\omega\rho_0}\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{i}{k\rho_0 c}\frac{k^2\rho_0 c D}{4\pi}\cos(\theta)\frac{d}{dr}\left[\left(1+\frac{1}{ikr}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\right]$$

$$=\frac{ikD}{4\pi}\cos(\theta)\left[-\frac{1}{ikr^2}\frac{e^{-ikr}}{r}-\left(1+\frac{1}{ikr}\right)(1+ikr)\frac{e^{-ikr}}{r^2}\right]$$

$$=\frac{k^2 D}{4\pi}\left(\frac{1}{(ikr)^2}+\frac{1}{ikr}+\frac{1}{(ikr)^2}+1+\frac{1}{ikr}\right)\cos(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$=\frac{k^2 D}{4\pi}\left(1+\frac{2}{ikr}+\frac{2}{(ikr)^2}\right)\cos(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}$$

3.1 Dipole

- Für den quadratischen Mittelwert des Schalldrucks gilt:

$$\left\langle p(r,\theta)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} P \bar{P} = \left(\rho_0 c\right)^2 \frac{k^4 D \bar{D}}{32\pi^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{(k r)^2}\right) \cos^2(\theta)$$

- Intensität und abgestrahlte Schallleistung:
  - Die Intensität berechnet sich zu

$$\left\langle I_r \right\rangle_T = \frac{1}{2} \Re\left(P \bar{V}_r\right) = \rho_0 c \frac{k^4 D \bar{D}}{32\pi^2 r^2} \left(1 - \frac{2}{(k r)^2} + \frac{2}{(k r)^2}\right) \cos^2(\theta)$$

$$= \rho_0 c \frac{k^4 D \bar{D}}{32\pi^2 r^2} \cos^2(\theta) = \frac{\left\langle p^2 \right\rangle}{\rho_0 c} \frac{(k r)^2}{1 + (k r)^2}$$

3.1 Dipole

- Integration über eine Kugelfläche mit Radius *r* ergibt die Schallleistung:

$$\langle \dot{W} \rangle_T = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \langle I_r \rangle_T r^2 \sin(\theta) \, d\theta \right) d\phi$$

$$= \rho_0 c \frac{k^4 D \bar{D}}{16\pi} \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) \, d\theta$$

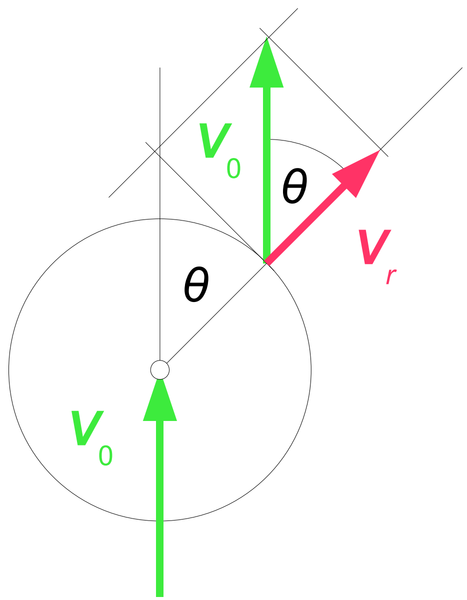
$$= \rho_0 c \frac{k^4 D \bar{D}}{16\pi} \cdot \frac{2}{3} = \rho_0 c \frac{k^4 D \bar{D}}{24\pi}$$

$$= \frac{4\pi r^2}{3\rho_0 c} \frac{(k r)^2}{1+(k r)^2} \frac{\langle p(r,\theta)^2 \rangle}{\cos^2(\theta)}$$

3.1 Dipole

- Schwingende Kugel:
  - Betrachtet wird eine starre Kugel mit Radius *a*, die mit der Geschwindigkeitsamplitude V_0 in einer Richtung schwingt.
  - Für die Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung gilt:

$$V_r(a) = V_0 \cos(\theta)$$



3.1 Dipole

- Das erzeugte Schallfeld ist das Schallfeld eines Dipols mit dem Dipolmoment

$$D = 4\pi V_0 a \frac{e^{ika}}{k^2} \frac{(ika)^2}{(ika)^2 + 2(ika) + 2}$$

- Mit dem Kugelvolumen $V_K = 4\pi a^3/3$ folgt:

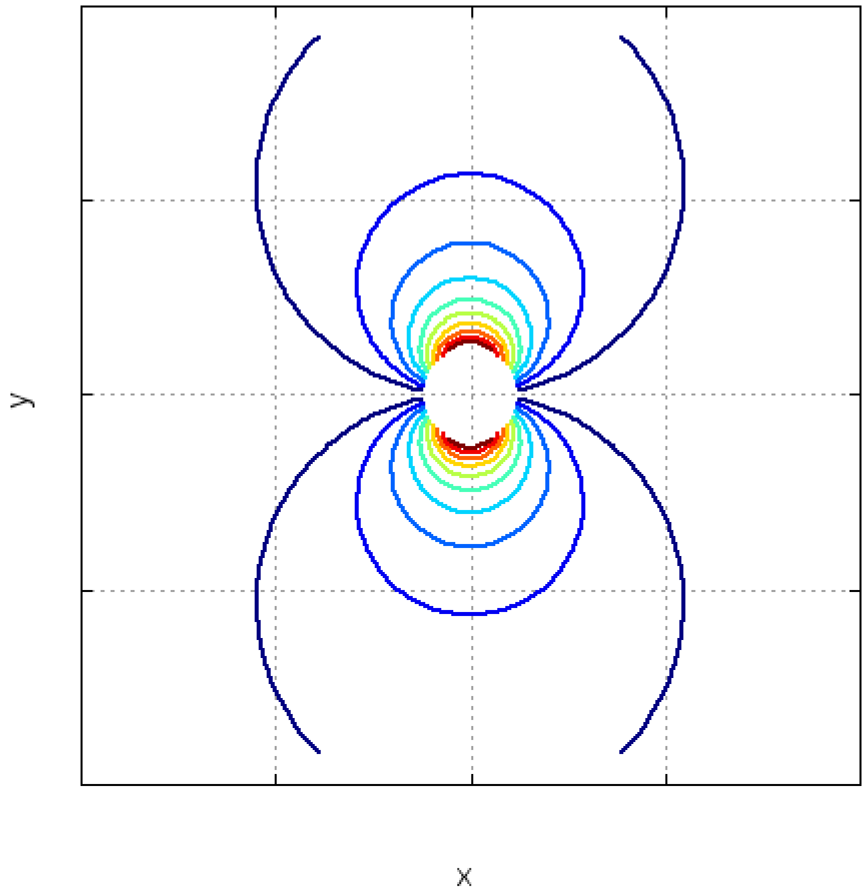
$$D = -3 V_0 V_K \frac{e^{ika}}{(ika)^2 + 2(ika) + 2}$$

- Für kleine Kugeln mit $a \ll \lambda$ vereinfacht sich die Beziehung zu

$$D = -\frac{3}{2} V_0 V_K$$

3.1 Dipole

- Effektiver Schalldruck in der *xy*-Ebene:



3.1 Dipole

- Näherungen für das Fernfeld:
  - Im Fernfeld gilt $r \gg \lambda$ und damit $1/(k\,r) = \lambda/(2\pi\,r) \ll 1$.
  - Damit ergeben sich die folgenden Vereinfachungen:
    - Schalldruck: $$P(r,\theta) = \frac{k^2 \rho_0 c\, D}{4\pi} \cos(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r}$$
    - Quadratischer Mittelwert: $$\left\langle p(r,\theta)^2 \right\rangle = \left(\rho_0 c\right)^2 \frac{k^4 D \bar{D}}{32\pi^2 r^2} \cos^2(\theta)$$
    - Schallschnelle: $$V_r(r,\theta) = \frac{k^2 D}{4\pi} \cos(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{P(r,\theta)}{\rho_0 c}$$

3.1 Dipole

- Intensität: $\left\langle I_r(r,\theta)\right\rangle_T = \dfrac{\left\langle p(r,\theta)^2\right\rangle}{\rho_0 c}$

- Abgestrahlte Schallleistung: $\left\langle \dot{W}\right\rangle_T = \dfrac{4\pi r^2}{3\rho_0 c}\dfrac{\left\langle p(r,\theta)^2\right\rangle}{\cos^2(\theta)}$

- Schalldruckpegel:
  - Im Fernfeld gilt für den Leistungspegel:

$$L_W = 10\log\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 20\log\left(\frac{r}{1\,m}\right) + L_p - 10\log\left(\cos^2(\theta)\right)$$

3.1 Dipole

- Auflösen nach dem Schalldruckpegel ergibt

$$L_p = L_W - 20\log\left(\frac{r}{1\,m}\right) + 10\log\left(\cos^2(\theta)\right) - 6{,}22\,dB$$

- Die Pegeldifferenz berechnet sich zu

$$L_p(r_1, \theta_1) - L_p(r_2, \theta_2) = 20\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - 10\log\left(\frac{\cos^2(\theta_2)}{\cos^2(\theta_1)}\right)$$

- Entlang eines Radials verhält sich der Schalldruckpegel eines Dipols wie der Schalldruckpegel eines Kugelstrahlers.

3.2 Multipole

- Die Punktquelle $$P_P(r)=\frac{i\,\omega\,\rho_0 Q}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}=\rho_0 c\,\frac{i\,k\,Q}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}$$

  ist eine Lösung der Wellengleichung, die die Abstrahlbedingung von Sommerfeld erfüllt.
- Da die Wellengleichung und die Abstrahlbedingung linear sind, ist auch die Richtungsableitung der Punktquelle eine Lösung.
- Weitere Lösungen erhält man durch Bildung weiterer Richtungsableitungen.
- Diese Lösungen werden als Multipole bezeichnet.

3.2 Multipole

- Gradient des Radius:
  - Der Gradient des Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ berechnet sich zu

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y} \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z} \boldsymbol{e}_z = \frac{x}{r} \boldsymbol{e}_x + \frac{y}{r} \boldsymbol{e}_y + \frac{z}{r} \boldsymbol{e}_z$$

  - Mit $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$ gilt: $\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$

- Dipole:
  - Für einen beliebigen Vektor ***d*** berechnet sich die Richtungsableitung der Punktquelle zu

$$P_D(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{d} \cdot \nabla P_P(r) = \frac{dP_P}{dr} \boldsymbol{d} \cdot \nabla r = -\rho_0 c \frac{i k Q}{4\pi} (i k r + 1) \frac{e^{-ikr}}{r^2} \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{r}}{r}$$

$$= \rho_0 c \frac{k^2}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{i k r}\right) \frac{Q \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{r}}{r} \frac{e^{-ikr}}{r}$$

  - Mit dem Dipolmoment $\boldsymbol{D} = Q \boldsymbol{d}$ gilt:

$$P_D(\boldsymbol{r}) = \rho_0 c \frac{k^2 \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{i k r}\right) \frac{e^{-ikr}}{r}$$

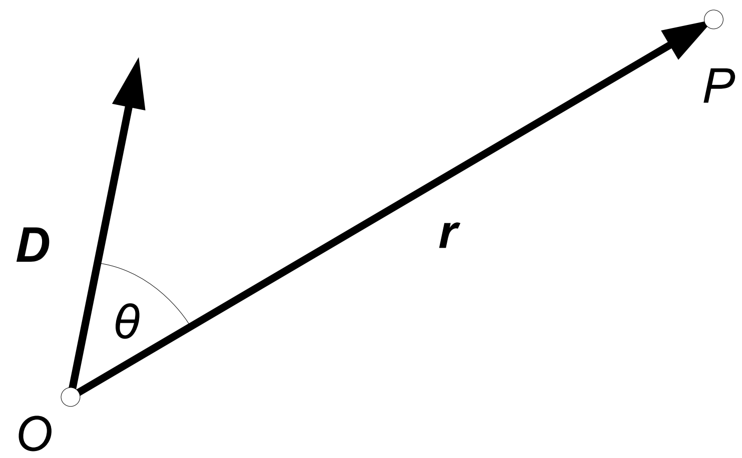
3.2 Multipole

- Die Richtungsableitung einer Punktquelle ergibt einen Dipol:

$$\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{r}}{r} = D\cos(\theta)$$

- Das Dipolmoment ***D*** definiert die Dipolachse und die Dipolstärke.
- Im Fernfeld gilt die Näherung:

$$P_D(\boldsymbol{r}) = \rho_0 c \frac{k^2 \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r} \frac{e^{-ikr}}{r}$$



3.2 Multipole

- Quadrupole:
  - Die Richtungsableitung eines Dipols nach einem weiteren Vektor $\boldsymbol{d}_2$ berechnet sich zu

$$P_Q(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{d}_2 \cdot \nabla P_D(\boldsymbol{r}) = \rho_0 c \frac{k^2 Q}{4\pi} \boldsymbol{d}_2 \cdot \nabla \left[\frac{\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{r}}{r} \left(1 + \frac{1}{i k r} \right) \frac{e^{-i k r}}{r} \right]$$

$$= \rho_0 c \frac{k^2 Q}{4\pi} \left[\left(\frac{\boldsymbol{d}_2 \cdot \boldsymbol{d}_1}{r} - \left(\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{r} \right) \frac{\boldsymbol{d}_2 \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \right) \left(1 + \frac{1}{i k r} \right) \frac{e^{-i k r}}{r} \right.$$

$$\left. + \frac{\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{r}}{r} \frac{\boldsymbol{d}_2 \cdot \boldsymbol{r}}{r} \frac{d}{dr} \left[\left(1 + \frac{1}{i k r} \right) \frac{e^{-i k r}}{r} \right] \right]$$

3.2 Multipole

- Mit

$$\frac{d}{dr}\left[\left(1+\frac{1}{ikr}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\right]=-\frac{1}{ikr^2}\frac{e^{-ikr}}{r}-\left(1+\frac{1}{ikr}\right)(ikr+1)\frac{e^{-ikr}}{r^2}$$

$$=-\left(\frac{1}{ikr^2}+ik+\frac{2}{r}+\frac{1}{ikr^2}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}=-ik\left(1+\frac{2}{ikr}+\frac{2}{(ikr)^2}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}$$

folgt:

$$P_Q(\boldsymbol{r})=\rho_0 c\,\frac{ik^3Q}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{ikr}+\frac{1}{(ikr)^2}\right)\boldsymbol{d_1}\cdot\boldsymbol{d_2}\right.$$

$$\left.-\frac{\boldsymbol{d_1}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\frac{\boldsymbol{d_2}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\left(1+\frac{3}{ikr}+\frac{3}{(ikr)^2}\right)\right]\frac{e^{-ikr}}{r}$$

3.2 Multipole

- Die Richtungsableitung eines Dipols wird als Quadrupol bezeichnet.
- Im Fernfeld $(k r \gg 1)$ vereinfacht sich die Formel für das Schallfeld zu

$$P_Q(\boldsymbol{r}) = -\rho_0 c \frac{i k^3 Q}{4\pi} \left(\frac{\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{r}}{r} \right) \left(\frac{\boldsymbol{d}_2 \cdot \boldsymbol{r}}{r} \right) \frac{e^{-i k r}}{r}$$

- Bei longitudinalen Quadrupolen sind die Vektoren $\boldsymbol{d}_1$ und $\boldsymbol{d}_2$ parallel.
- Bei lateralen Quadrupolen stehen die Vektoren $\boldsymbol{d}_1$ und $\boldsymbol{d}_2$ senkrecht aufeinander.

3.2 Multipole

- Beispiel: Longitudinaler Quadrupol
  - $\boldsymbol{d_1} = d_1 \boldsymbol{e_z}, \quad \boldsymbol{d_2} = d_2 \boldsymbol{e_z} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d_1} \cdot \boldsymbol{d_2} = d_1 d_2, \quad \boldsymbol{d_1} \cdot \boldsymbol{r} = d_1 z, \quad \boldsymbol{d_2} \cdot \boldsymbol{r} = d_2 z$
  - Schallfeld:

$$P_Q(\boldsymbol{r}) = \rho_0 c \frac{i k^3 Q d_1 d_2}{4\pi} \left[\frac{1}{i k r} + \frac{1}{(i k r)^2} - \left(\frac{z}{r}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{i k r} + \frac{3}{(i k r)^2}\right) \right] \frac{e^{-i k r}}{r}$$

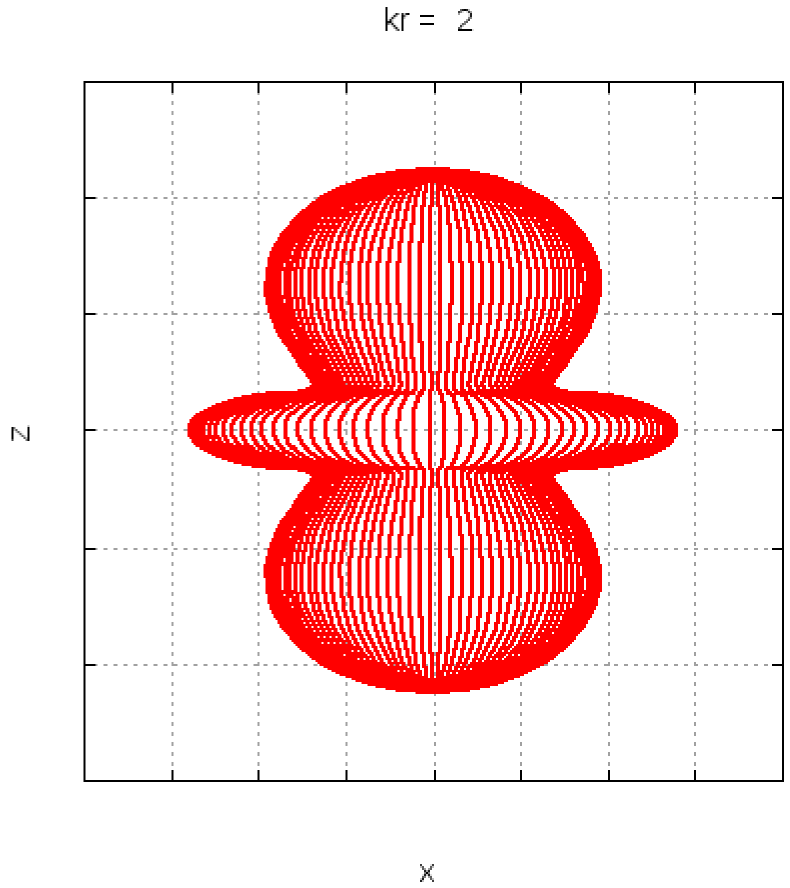
  - Im Fernfeld gilt die Näherung

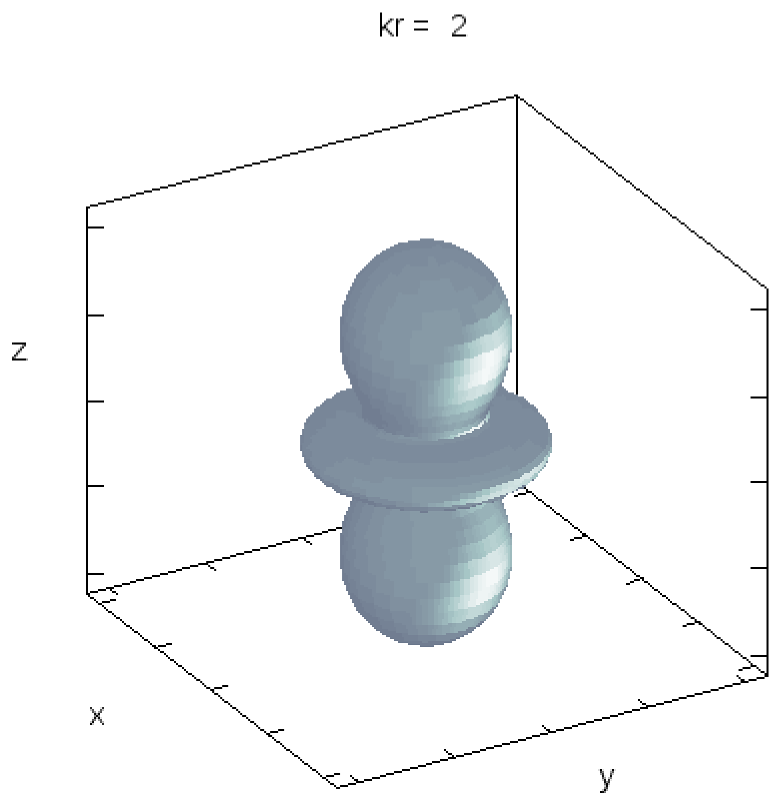
$$P_Q(\boldsymbol{r}) = -\rho_0 c \frac{i k^3 Q d_1 d_2}{4\pi} \left(\frac{z}{r}\right)^2 \frac{e^{-i k r}}{r}$$

  - Im Fernfeld gilt für die Richtcharakteristik: $R(\theta) = \left(\frac{z}{r}\right)^2 = \cos^2(\theta)$

3.2 Multipole

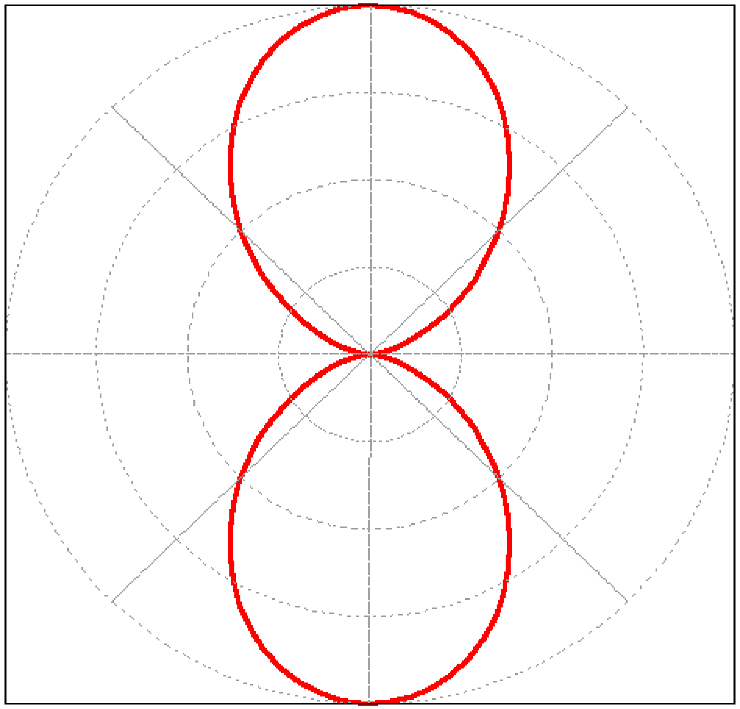
- Richtcharakteristik im Nahfeld:

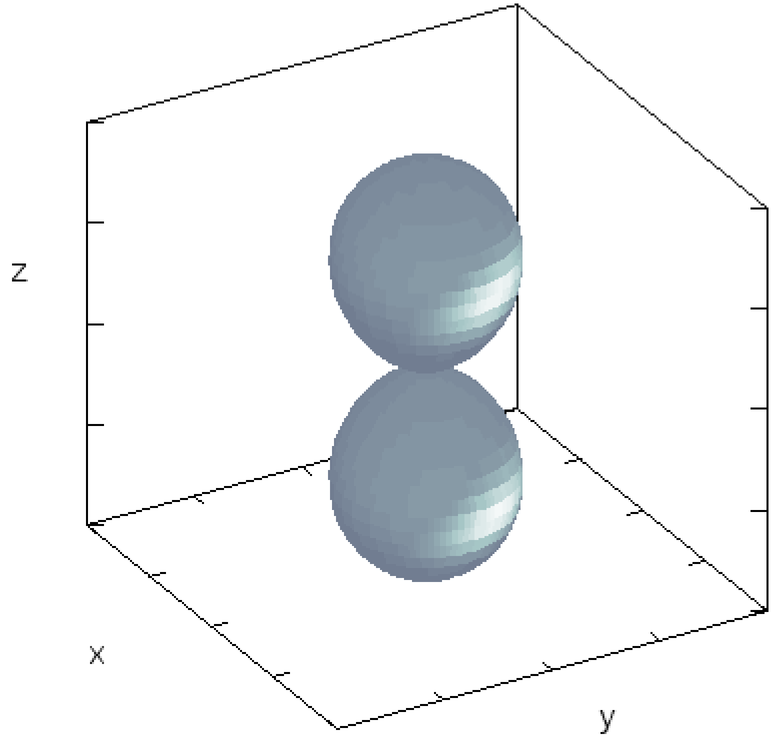




3.2 Multipole

- Richtcharakteristik im Fernfeld:





3.2 Multipole

- Beispiel: Lateraler Quadrupol
  - $\boldsymbol{d_1} = d_1 \boldsymbol{e_z}, \quad \boldsymbol{d_2} = d_2 \boldsymbol{e_x} \rightarrow \boldsymbol{d_1} \cdot \boldsymbol{d_2} = 0, \quad \boldsymbol{d_1} \cdot \boldsymbol{r} = d_1 z, \quad \boldsymbol{d_2} \cdot \boldsymbol{r} = d_2 x$
  - Schallfeld:

$$P_Q(\boldsymbol{r}) = -\rho_0 c \frac{i k^3 Q d_1 d_2}{4\pi} \left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\left(1 + \frac{3}{ikr} + \frac{3}{(ikr)^2}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}$$

  - Im Fernfeld gilt die Näherung:

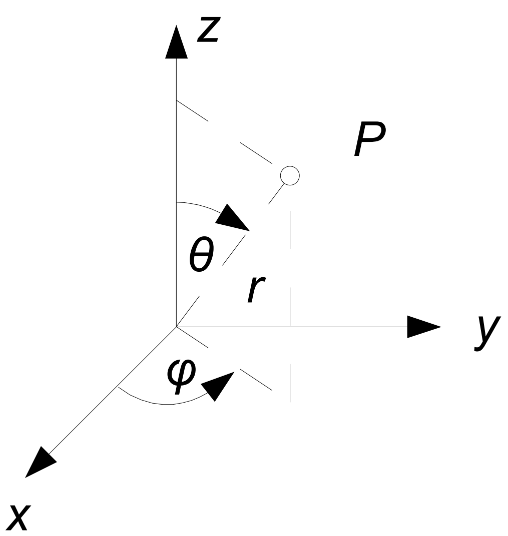
$$P_Q(\boldsymbol{r}) = -\rho_0 c \frac{i k^3 Q d_1 d_2}{4\pi} \left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}$$

3.2 Multipole

- Mit $x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$
  $z = r \cos(\theta)$

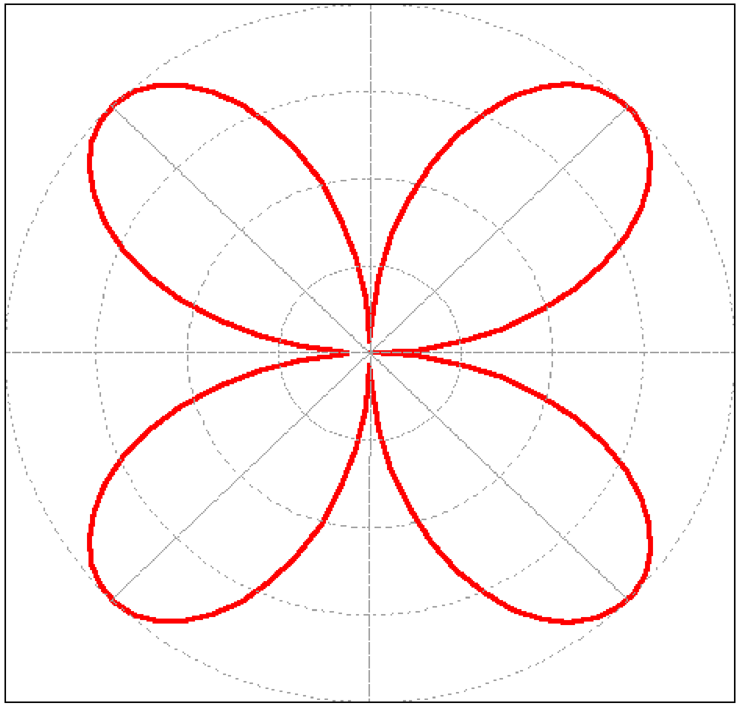
  gilt für die Richtcharakteristik:

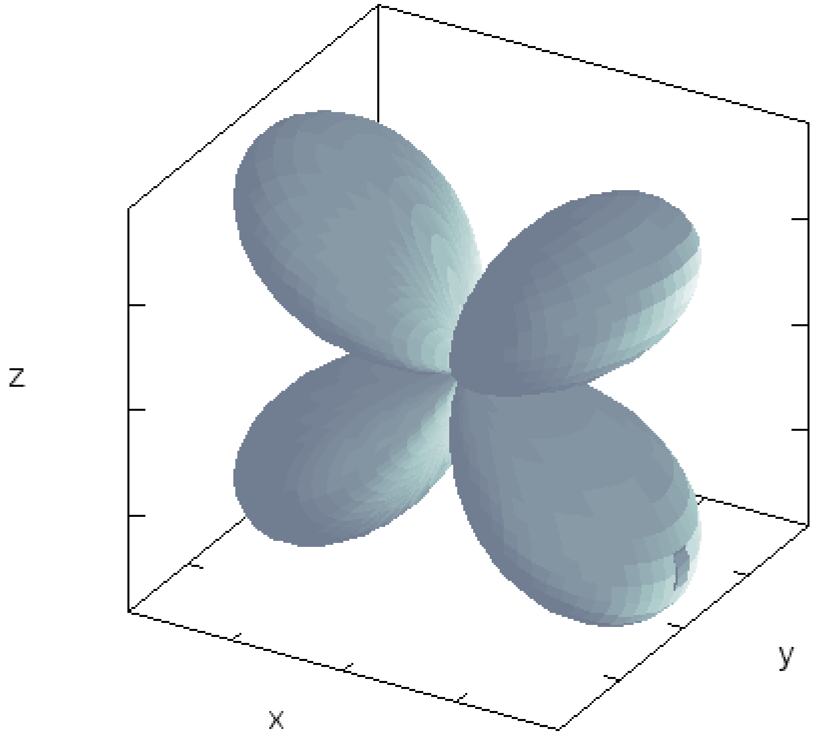
$$R(\theta, \phi) = \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi)$$
$$= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \cos(\phi)$$



3.2 Multipole

- Richtcharakteristik eines lateralen Quadrupols:





3.2 Multipole

- Zusammenfassung:
  - Im Fernfeld gilt für alle Multipole: $P(\boldsymbol{r}) = C\, R(\theta, \phi)\dfrac{e^{-ikr}}{r}$
  - Dabei wird die Richtcharakteristik für Pole höherer Ordnung immer komplizierter.
  - Im Nahfeld gilt: $P(\boldsymbol{r}) = f(ikr, \theta, \phi)\dfrac{e^{-ikr}}{r}$
  - Für Pole höherer Ordnung hängt die Funktion f von höheren Potenzen von $(ikr)^{-1}$ ab.
  - Quadrupole beschreiben z.B. die Entstehung von Schall in einer turbulenten Strömung.

3.2 Multipole

- Ausblick:
  - Die Integration von infinitesimalen Punktquellen und Dipolen über Flächen führt auf eine Integraldarstellung des Schallfelds für beliebige Oberflächen.
  - Diese Integraldarstellung ist der Ausgangspunkt für die Methode der Randelemente.
  - Die besonders schnelle Fast Multipole BEM arbeitet zusätzlich mit Multipolen.