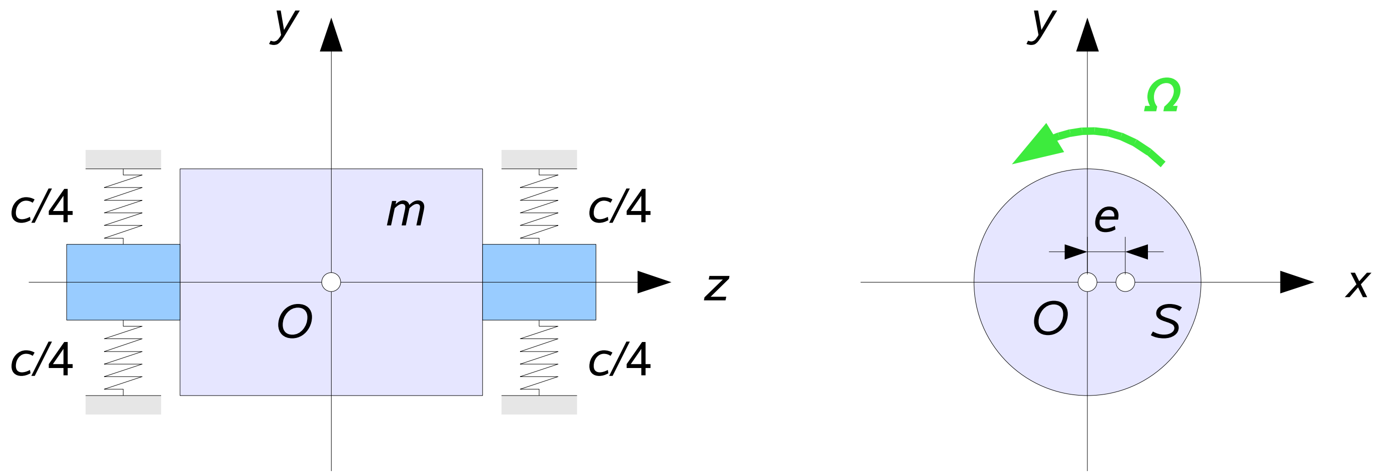
5. Kritische Drehzahl

- Aufgabenstellung:



5. Kritische Drehzahl

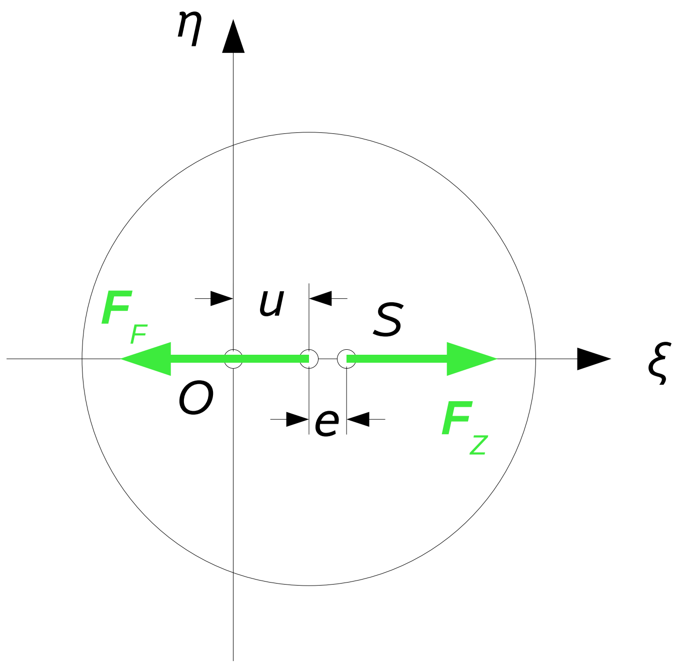
- Der starre Körper mit der Masse m dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um die ortsfeste z-Achse.
- Der Körper ist elastisch gelagert, wobei die Steifigkeit der Lagerung in allen Richtungen in der xy-Ebene den gleichen Wert hat.
- Der Schwerpunkt des Körpers hat den Abstand e von der Drehachse.
- Gesucht ist die Auslenkung u des starren Körpers im statischen Gleichgewicht.

5. Kritische Drehzahl

- Statisches Gleichgewicht:
  - Das statische Gleichgewicht wird in einem mitrotierenden Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ untersucht, dessen ζ-Achse mit der ortsfesten z-Achse übereinstimmt.
  - Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Schwerpunkt auf der ξ-Achse liegt.
  - Der Ursprung des mitrotierenden Koordinatensystems liegt auf der Drehachse.

5. Kritische Drehzahl

– Gleichgewicht in der ausgelenkten Lage:



- Zentrifugalkraft:

$$F_Z = m\,\Omega^2 (u+e)$$

- Federkraft:

$$F_F = c\,u$$

- Gleichgewicht:

$$-F_F + F_Z = 0$$

5. Kritische Drehzahl

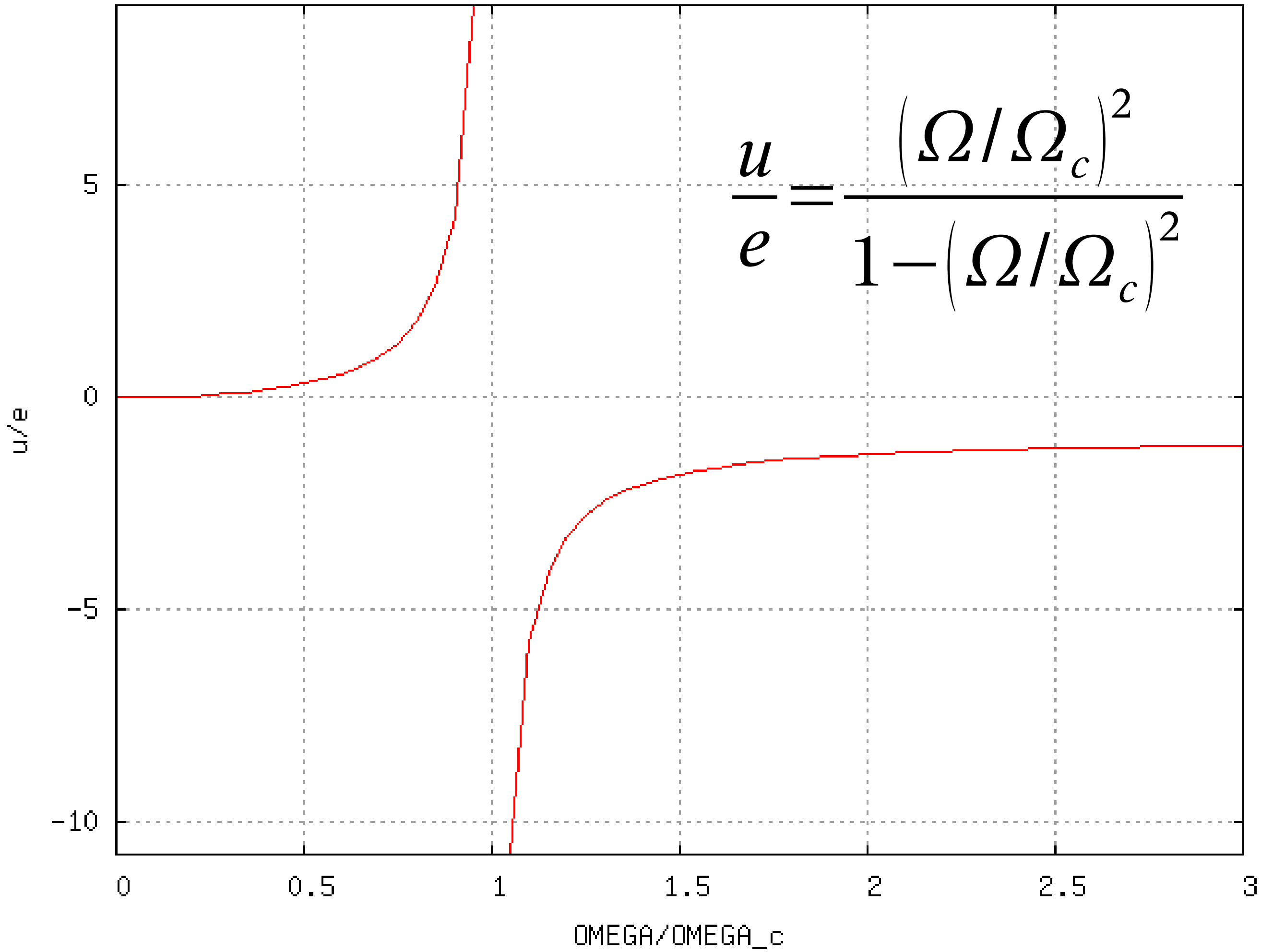
– Aus der Gleichgewichtsbedingung folgt für die statische Auslenkung:

$$-c\,u+m\,\Omega^2\left(u+e\right)=0 \;\rightarrow\; u=\frac{m\,\Omega^2 e}{c-m\,\Omega^2}$$

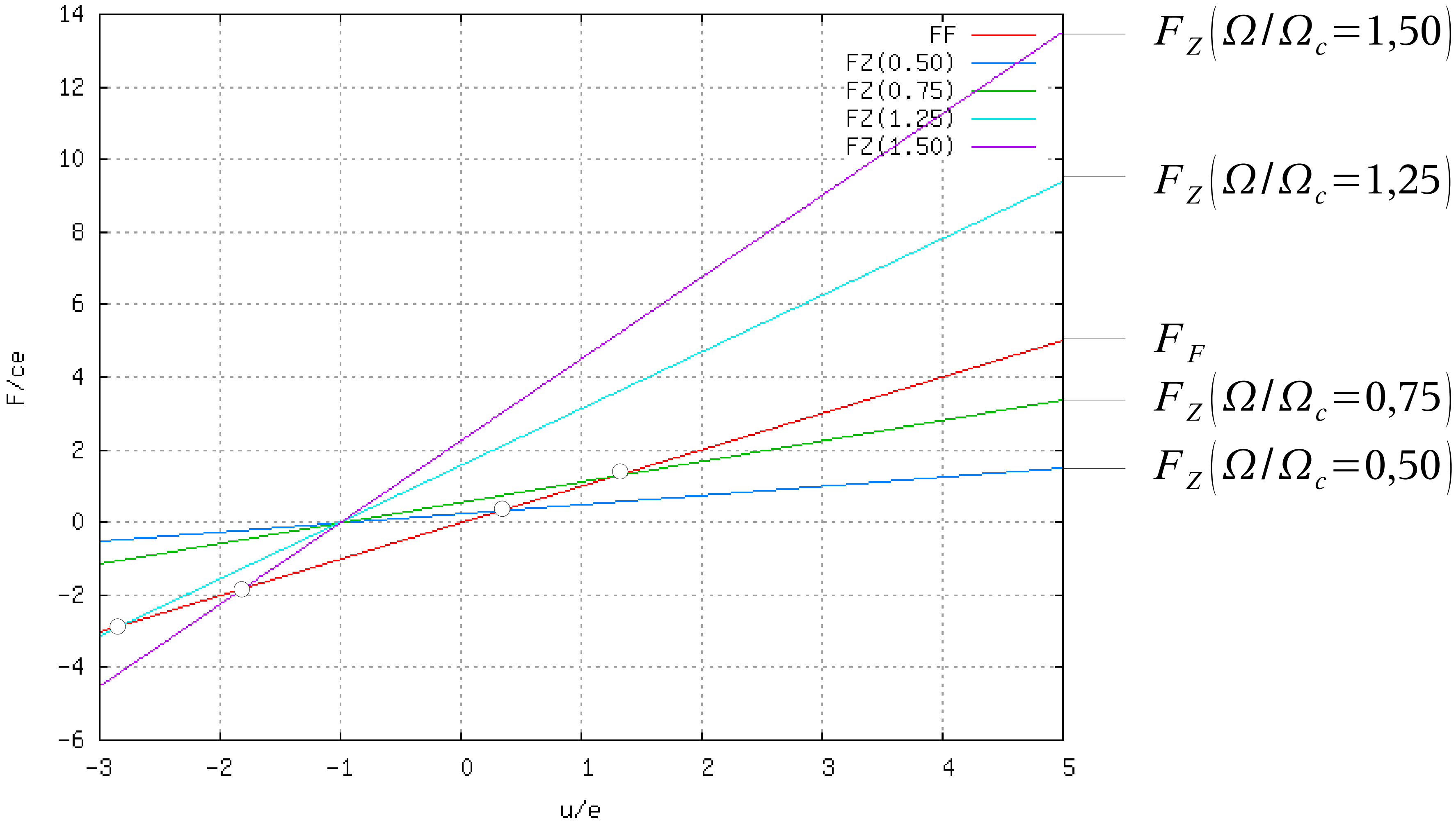
– Mit $\Omega_c^2=\dfrac{c}{m}$ gilt:

$$\boxed{\frac{u}{e}=\frac{\left(\Omega/\Omega_c\right)^2}{1-\left(\Omega/\Omega_c\right)^2}}$$

5. Kritische Drehzahl



5. Kritische Drehzahl



5. Kritische Drehzahl

- Kritische Drehzahl:
  - Die Drehzahl

$$\boxed{n_c = \frac{\Omega_c}{2\pi}}$$

    wird als kritische Drehzahl bezeichnet.
  - Die kritische Winkelgeschwindigkeit Ω_c stimmt mit der Eigenkreisfrequenz des elastisch gelagerten starren Körpers überein.

5. Kritische Drehzahl

– Unterkritischer Bereich:
  - Die Drehzahl ist kleiner als die kritische Drehzahl.
  - Die statische Auslenkung ist positiv.
  - Die statische Auslenkung nimmt mit zunehmender Drehzahl zu.

– Kritische Drehzahl:
  - Wenn die Drehzahl mit der kritischen Drehzahl überein-stimmt, wird die statische Auslenkung unendlich groß.
  - Ein Betrieb mit der kritischen Drehzahl führt zur Zerstörung des Bauteils.

5. Kritische Drehzahl

- Überkritischer Bereich:
  - Die Drehzahl ist größer als die kritische Drehzahl.
  - Die statische Auslenkung ist negativ.
  - Die statische Auslenkung nimmt mit zunehmender Drehzahl ab.

5. Kritische Drehzahl

- Selbstzentrierung:
  - Für sehr große Drehzahlen gilt:

$$\lim_{\Omega \to \infty} \frac{u}{e} = \lim_{\Omega \to \infty} \frac{\left(\Omega / \Omega_c\right)^2}{1 - \left(\Omega / \Omega_c\right)^2} = -1$$

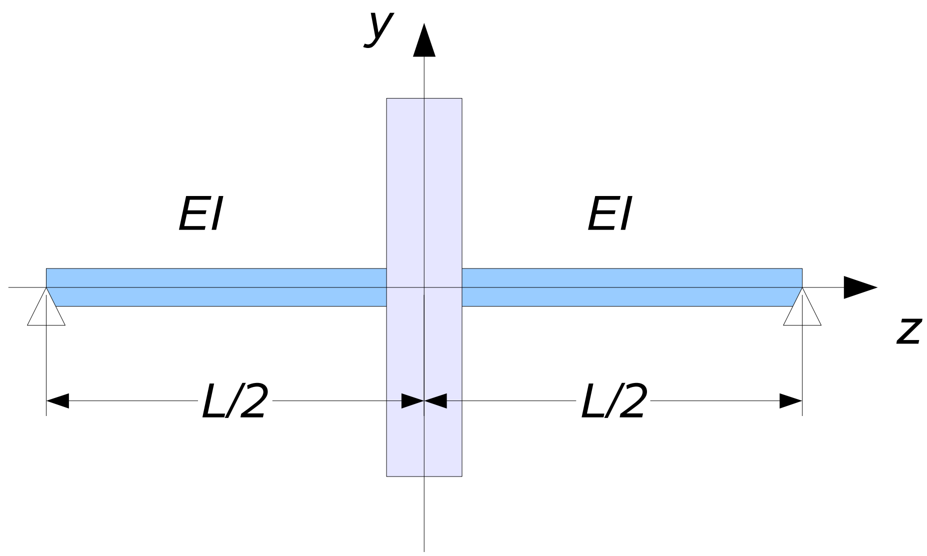
  - Die statische Verschiebung stellt sich so ein, dass der Schwerpunkt auf der Drehachse liegt.
  - Dieser Effekt wird als Selbstzentrierung bezeichnet.

5. Kritische Drehzahl

- Bauteile, bei denen sich eine statische Unwucht nicht vermeiden lässt, werden weich gelagert und überkritisch betrieben.
- Beim Ein- und Ausschalten muss der kritische Bereich schnell durchfahren werden.
- Beispiel: Waschmaschine

5. Kritische Drehzahl

- Biegewellen:
  - Eine starre Scheibe sitzt auf einer elastischen Welle, die um die *z*-Achse rotiert.



5. Kritische Drehzahl

- Anstelle der Lagersteifigkeit ist die Biegesteifigkeit für die Auslenkung der Welle an der Stelle, an der sich die Scheibe befindet, zu nehmen.
- Für eine beidseitig gelenkig gelagerte Welle, bei der sich die Scheibe in der Mitte befindet, gilt z.B.

$$c=48\frac{EI}{L^3}$$

- Die kritische Drehzahl bei Biegewellen wird als biegekritische Drehzahl bezeichnet.

5. Kritische Drehzahl

- Überkritisch laufende Wellen wurden zuerst von Gustav de Laval im Jahre 1883 experimentell untersucht.
- Der theoretische Nachweis für die Stabilität wurde von Föppl (1895) und Stodola (1904) erbracht.

5. Kritische Drehzahl

- Stabilität:
  - Zur Untersuchung der Stabilität wird die Bewegungsgleichung im mitrotierenden Bezugssystem verwendet.
  - Es muss untersucht werden, wie das System auf eine kleine Störung der statischen Ruhelage reagiert.
  - Im mitrotierenden Bezugssystem lautet die Bewegungsgleichung:

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_f + \boldsymbol{F}_c$$

  - Für die Relativbeschleunigung gilt: $\boldsymbol{a}_r = \ddot{u}\,\boldsymbol{b}_\xi + \ddot{v}\,\boldsymbol{b}_\eta$
  - Die einzige äußere Kraft ist die Federkraft:

$$\boldsymbol{F} = -c\left(u\,\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta\right)$$

5. Kritische Drehzahl

- Wenn das Bauteil mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit rotiert, stimmt die Führungskraft mit der Zentrifugalkraft überein:

$$\boldsymbol{F}_f = -m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_S\right)$$

- Für die Winkelgeschwindigkeit gilt: $\boldsymbol{\omega} = \Omega\,\boldsymbol{b}_\zeta$
- Für den Ortsvektor des Schwerpunkts gilt:

$$\boldsymbol{r}_S = (e+u)\,\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta$$

- Damit berechnet sich die Zentrifugalkraft zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_f &= -m\,\Omega^2\,\boldsymbol{b}_\zeta\times\left[\boldsymbol{b}_\zeta\times\left((e+u)\,\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta\right)\right]\\ &= -m\,\Omega^2\,\boldsymbol{b}_\zeta\times\left[(e+u)\,\boldsymbol{b}_\eta - v\,\boldsymbol{b}_\xi\right]\\ &= m\,\Omega^2\left[(e+u)\,\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta\right]\end{aligned}$$

5. Kritische Drehzahl

– Für die Corioliskraft gilt:

$$\boldsymbol{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega}\times{}^B\boldsymbol{v}_S = -2m\Omega\,\boldsymbol{b}_\zeta\times\left(\dot{u}\,\boldsymbol{b}_\xi + \dot{v}\,\boldsymbol{b}_\eta\right) = -2m\Omega\left(\dot{u}\,\boldsymbol{b}_\eta - \dot{v}\,\boldsymbol{b}_\xi\right)$$

– Damit lautet die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} m\ddot{u} &= -\left(c - m\Omega^2\right)u + 2m\Omega\dot{v} + m\Omega^2 e \\ m\ddot{v} &= -\left(c - m\Omega^2\right)v - 2m\Omega\dot{u} \end{aligned}$$

– In der statischen Ruhelage gilt: $u = u_S = const.$ und $v = 0$

– Für den gestörten Zustand gilt:

$$u(t) = u_S + \Delta u(t) \text{ und } v(t) = \Delta v(t)$$

5. Kritische Drehzahl

- Mit $\left(c-m\Omega^2\right)u_S=m\Omega^2 e$ folgt:

$$\begin{aligned} m\Delta\ddot{u} &- 2m\Omega\Delta\dot{v} + \left(c-m\Omega^2\right)\Delta u = 0 \\ m\Delta\ddot{v} &+ 2m\Omega\Delta\dot{u} + \left(c-m\Omega^2\right)\Delta v = 0 \end{aligned}$$

- Lösungsansatz: $\Delta u(t)=U\exp(i\omega t)$, $\Delta v(t)=V\exp(i\omega t)$
- Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \left[c-m\left(\omega^2+\Omega^2\right)\right]U &- 2im\Omega\omega V = 0 \\ 2im\Omega\omega U &+ \left[c-m\left(\omega^2+\Omega^2\right)\right]V = 0 \end{aligned}$$

5. Kritische Drehzahl

- Mit $c/m = \Omega_c^2$ folgt:

$$\begin{bmatrix} \Omega_c^2 - \Omega^2 - \omega^2 & -2i\Omega\omega \\ 2i\Omega\omega & \Omega_c^2 - \Omega^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Dieses homogene Gleichungssystem hat nur dann von Null verschiedene Lösungen, wenn die Determinante Null ist:

$$\begin{vmatrix} \Omega_c^2 - \Omega^2 - \omega^2 & -2i\Omega\omega \\ 2i\Omega\omega & \Omega_c^2 - \Omega^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

- Daraus folgt die charakteristische Gleichung

$$\left[\left(\Omega_c^2 - \Omega^2 \right) - \omega^2 \right]^2 - 4\Omega^2 \omega^2 = 0$$

5. Kritische Drehzahl

- Die charakteristische Gleichung lässt sich umformen zu

$$\left[\left(\Omega_c^2-\Omega^2\right)-\omega^2\right]^2=4\,\Omega^2\,\omega^2$$

- Die ersten beiden Lösungen berechnen sich aus

$$\Omega_c^2-\Omega^2-\omega^2=2\,\Omega\,\omega \;\rightarrow\; \omega^2+2\,\Omega\,\omega-\left(\Omega_c^2-\Omega^2\right)=0$$

zu $\omega_{1/2}=-\Omega\pm\sqrt{\Omega^2+\Omega_c^2-\Omega^2}=-\Omega\pm\Omega_c$

- Die verbleibenden beiden Lösungen berechnen sich aus

$$\Omega_c^2-\Omega^2-\omega^2=-2\,\Omega\,\omega \;\rightarrow\; \omega^2-2\,\Omega\,\omega-\left(\Omega_c^2-\Omega^2\right)=0$$

zu $\omega_{3/4}=\Omega\pm\sqrt{\Omega^2+\Omega_c^2-\Omega^2}=\Omega\pm\Omega_c$

5. Kritische Drehzahl

- Für $\Omega \neq \Omega_c$ existieren immer vier verschiedene reelle Lösungen.
- Damit bleibt die Störung beschränkt. Das System ist stabil.
- Für $\Omega = \Omega_c$ gibt es keine statische Gleichgewichtslage. Die Bewegungsgleichungen vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= 2\Omega_c \dot{v} + \Omega_c^2 e \\ \ddot{v} &= -2\Omega_c \dot{u} \end{aligned}$$

- Integration der zweiten Gleichung ergibt:

$$\dot{v} = -2\Omega_c u + C_1$$

5. Kritische Drehzahl

- Einsetzen in die erste Gleichung führt auf

$$\ddot{u}=2\Omega_c\left(-2\Omega_c u+C_1\right)+\Omega_c^2 e \;\rightarrow\; \ddot{u}+4\Omega_c^2 u=2\Omega_c C_1+\Omega_c^2 e$$

- Diese Gleichung hat die Lösung

$$u(t)=U_s\sin(2\Omega_c t)+U_c\cos(2\Omega_c t)+\frac{2\Omega_c C_1+\Omega_c^2 e}{4\Omega_c^2}$$

- Daraus folgt:

$$v(t)=U_s\cos(2\Omega_C t)-U_c\sin(2\Omega_c t)-\frac{2\Omega_c C_1+\Omega_c^2 e}{2\Omega_c}t+C_2$$

5. Kritische Drehzahl

- Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$-2\Omega_C C_1 - \Omega_c^2 e + \Omega_c^2 e = 0 \;\rightarrow\; C_1 = 0$$

- Aus $v(0)=0$ folgt: $C_2 = -U_s$
- Damit lautet die Lösung:

$$u(t) = U_s \sin(2\Omega_c t) + U_c \cos(2\Omega_c t) + \frac{e}{4}$$

$$v(t) = U_s\left(\cos(2\Omega_c t) - 1\right) - U_c \sin(2\Omega_c t) - \frac{e}{2}\Omega_c t$$

- Die Verschiebung $v(t)$ nimmt unbeschränkt zu.