

1. Anfangswertprobleme 1. Ordnung

1.1 Grundlagen

1.2 Euler-Vorwärts-Verfahren

1.3 Runge-Kutta-Verfahren

1.4 Stabilität

1.5 Euler-Rückwärts-Verfahren

1.6 Differentialgleichungssysteme

1.1 Grundlagen

- Für ein Anfangswertproblem 1. Ordnung müssen folgende Daten gegeben sein:
 - Eine Differentialgleichung 1. Ordnung: $\dot{x}(t) = f[x(t), t]$
 - Die Anfangsbedingung: $x(0) = x_0$
 - Das zu untersuchende Zeitintervall: $t \in [0, t_E]$

1.1 Grundlagen

- Beispiel:

- Für den Fall mit Luftwiderstand lautet die Bewegungsgleichung:

$$m\dot{v} = mg - C_W v^2 \rightarrow \dot{v} = g - \frac{C_W}{m} v^2$$

- Mit $x = v$ gilt also: $f[x(t), t] = f[v(t), t] = g - \frac{C_W}{m} v^2$
- Um die Geschwindigkeit im Intervall $[0, t_E]$ berechnen zu können, muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben sein.

1.1 Grundlagen

- Grundidee:
 - Bei allen numerischen Verfahren wird der Wert der gesuchten Funktion für diskrete Zeitpunkte ermittelt.
 - Dazu wird das Zeitintervall in äquidistante Zeitschritte Δt unterteilt:



1.1 Grundlagen

- Es bestehen folgende Zusammenhänge:

$$\Delta t = \frac{t_n - t_0}{n} = \frac{t_E}{n}, \quad t_i = t_0 + i \Delta t, \quad i = 0, \dots, n$$

- Abkürzungen: $x(t_i) = x_i, \quad \dot{x}(t_i) = \dot{x}_i$

- Integration der Differentialgleichung von t_i bis t_{i+1} ergibt:

$$x_{i+1} - x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f[x(t), t] dt \rightarrow$$

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f[x(t), t] dt$$

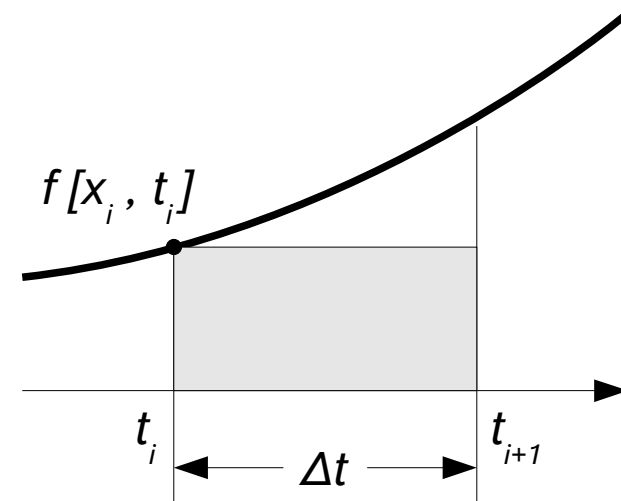
1.1 Grundlagen

- Diese Gleichung ist der Ausgangspunkt aller numerischen Verfahren.
- Bei den numerischen Verfahren wird das Integral näherungsweise berechnet.

1.2 Euler-Vorwärts-Verfahren

- Idee:
 - Beim Euler-Vorwärts-Verfahren wird das Integral approximiert durch

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f[x(t), t] dt \approx f[x_i, t_i] \Delta t$$



1.2 Euler-Vorwärts-Verfahren

- Algorithmus:
 - Die Approximation des Integrals führt unmittelbar auf folgende Berechnungsvorschrift:

$$x_{i+1} = x_i + f[x_i, t_i] \Delta t$$

- Der Wert zum Zeitpunkt t_{i+1} lässt sich durch eine einfache Funktionsauswertung zum Zeitpunkt t_i berechnen.
- Derartige Verfahren werden als explizite Verfahren bezeichnet.

1.2 Euler-Vorwärts-Verfahren

- Beispiel: Fall mit Luftwiderstand

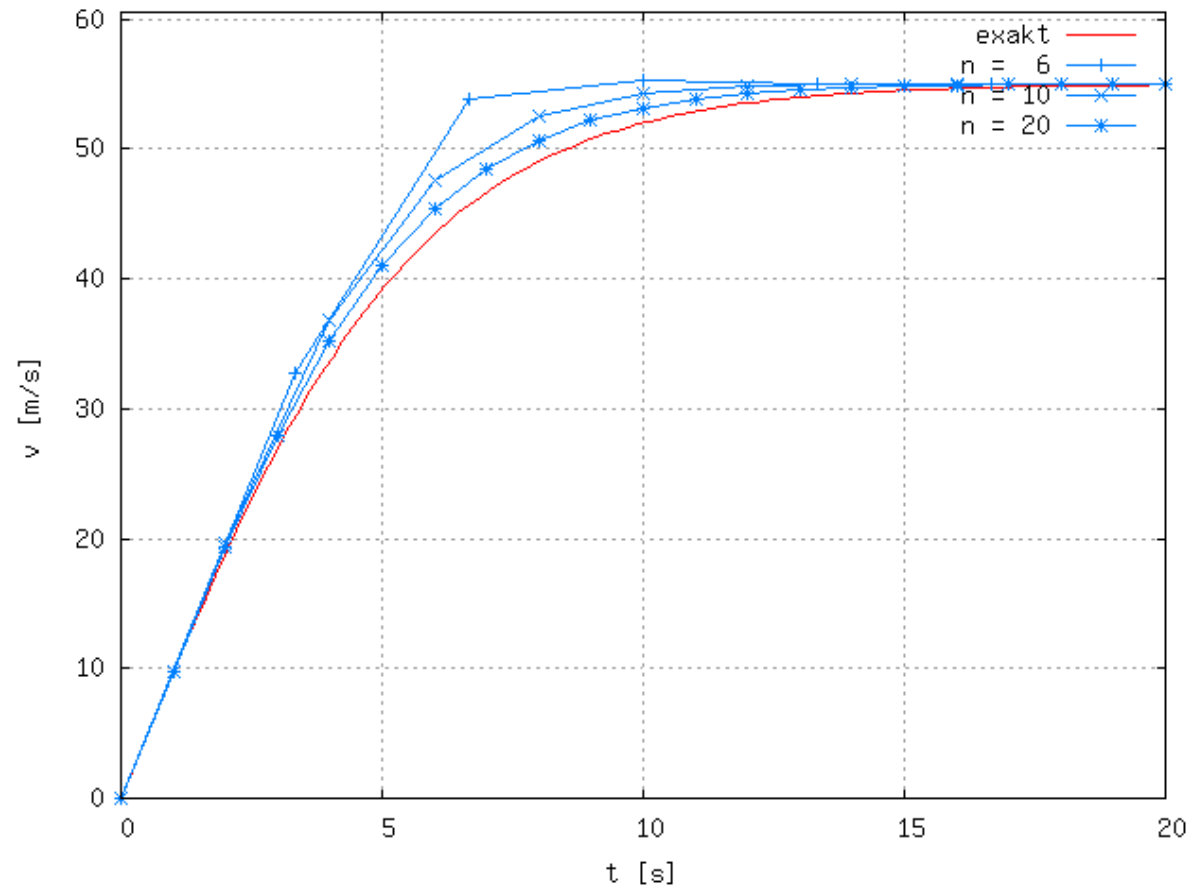
- Funktion: $f[t, v(t)] = g - \frac{C_w}{m} v^2$

- Daten:

- $m = 5\text{kg}$, $C_w = 0,0162\text{kg/m}$
- $t_0 = 0\text{s}$, $t_E = 20\text{s}$
- $v_0 = 0\text{m/s}$

1.2 Euler-Vorwärts-Verfahren

– Ergebnis:



1.2 Euler-Vorwärts-Verfahren

- Programmierung in Octave:

```
# Daten

m = 5      ; % Masse in kg
CW = 0.0162; % Widerstandskonstante in kg/m
v0 = 0     ; % Anfangsgeschwindigkeit in m/s

t0 = 0     ; % Anfangszeit in s
tE = 20    ; % Endzeit in s

n = 20     ; % Zeitintervalle

global g = 9.81 ; % Erdbeschleunigung in m/s^2
```

1.2 Euler-Vorwärts-Verfahren

```
# Definition der Funktion

global c = CW / m;

function y = f(x, t)
    global g; global c;
    y = g - c * x^2;
end

# Euler-Vorwärts-Verfahren

v = zeros(1, n + 1);
t = linspace(t0, tE, n + 1);
dt = (tE - t0) / n;

v(1) = v0;

for i = 1 : n
    v(i + 1) = v(i) + f(v(i), t(i)) * dt;
end
```

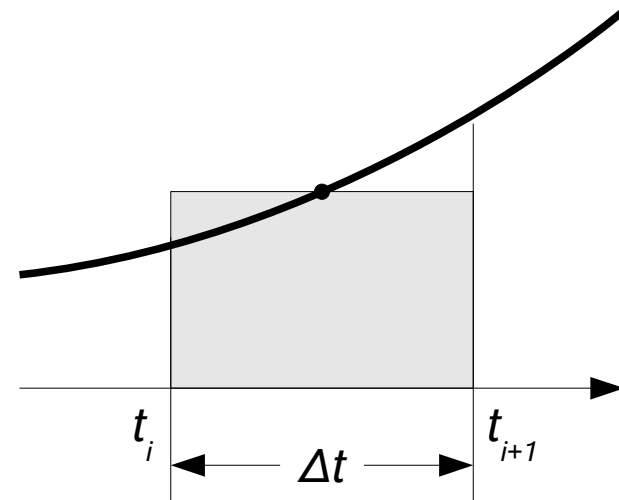
1.2 Euler-Vorwärts-Verfahren

- Bewertung:
 - Das Verfahren ist einfach zu programmieren.
 - Der Rechenaufwand für einen Zeitschritt ist gering.
 - Das Verfahren ist genau von 1. Ordnung.
 - Um eine hinreichend genaue Näherung zu erhalten, muss der Zeitschritt klein sein.
 - Das Verfahren wird hauptsächlich zur Berechnung kurzzeitiger Vorgänge (Stoßvorgänge, Crash, Explosionen) verwendet.

1.3 Runge-Kutta-Verfahren

- Idee:
 - Beim zweistufigen Runge-Kutta-Verfahren wird das Integral mit dem Funktionswert in der Mitte des Intervalls approximiert:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f[x(t), t] dt$$
$$\approx f\left[x_{i+1/2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right] \Delta t$$



1.3 Runge-Kutta-Verfahren

- Der Funktionswert $x_{i+1/2}$ wird durch einen Euler-Schritt berechnet:

$$x_{i+1/2} = x_i + f[x_i, t_i] \frac{\Delta t}{2}$$

- Das klassische Verfahren ist das vierstufige Runge-Kutta-Verfahren.
- Dabei fallen vier Euler-Schritte an.

1.3 Runge-Kutta-Verfahren

- Algorithmen:
 - Zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren:

$$k_1 = f[x_i, t_i]$$

$$k_2 = f\left[x_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right]$$

$$x_{i+1} = x_i + k_2 \Delta t$$

1.3 Runge-Kutta-Verfahren

- Vierstufiges Runge-Kutta-Verfahren:

$$k_1 = f\left[x_i, t_i\right], \quad k_2 = f\left[x_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right]$$

$$k_3 = f\left[x_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right], \quad k_4 = f\left[x_i + k_3 \Delta t, t_i + \Delta t\right]$$

$$k = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

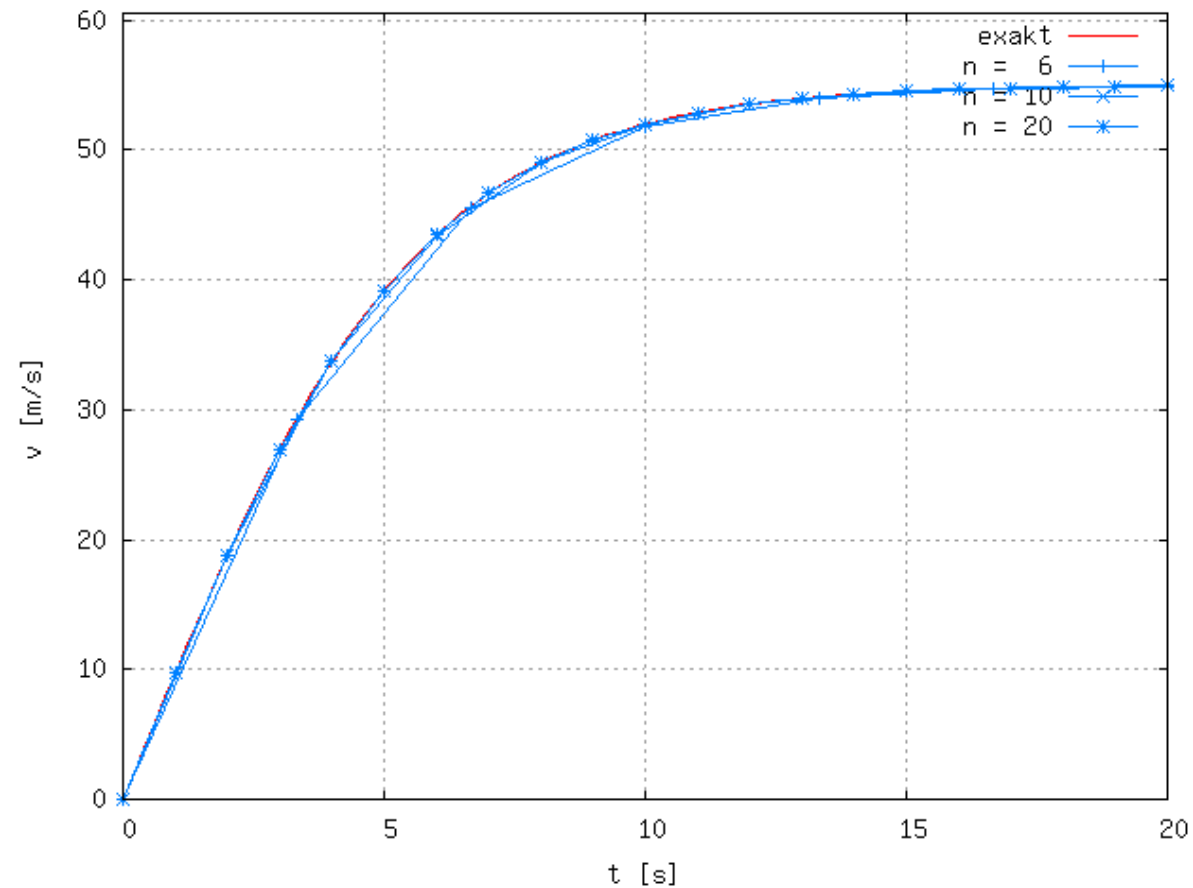
$$x_{i+1} = x_i + k \Delta t$$

1.3 Runge-Kutta-Verfahren

- Beispiel: Fall mit Luftwiderstand
 - Die Gleichung wird mit dem vierstufigen Runge-Kutta-Verfahren gelöst.
 - Die Daten sind die gleichen wie beim Vorwärts-Euler-Verfahren.

1.3 Runge-Kutta-Verfahren

– Ergebnis:



1.3 Runge-Kutta-Verfahren

- Programmierung in Octave:

```
# Daten

m = 5      ; % Masse in kg
CW = 0.0162; % Widerstandskonstante in kg/m
v0 = 0     ; % Anfangsgeschwindigkeit in m/s

t0 = 0     ; % Anfangszeit in s
tE = 20    ; % Endzeit in s

n = 6      ; % Zeitintervalle

global g = 9.81 ; % Erdbeschleunigung in m/s^2
```

1.3 Runge-Kutta-Verfahren

```
# Definition der Funktion
```

```
global c = CW / m;
```

```
function y = f(x, t)
```

```
    global g; global c;
```

```
    y = g - c * x^2;
```

```
end
```

```
# Runge-Kutta-Verfahren
```

```
v = zeros(1, n + 1);
```

```
t = linspace(t0, tE, n + 1);
```

```
dt = (tE - t0) / n;
```

```
v(1) = v0;
```

```
for i = 1 : n
```

```
    k1 = f(v(i), t(i));
```

```
    k2 = f(v(i) + k1 * dt / 2, t(i) + dt / 2);
```

```
    k3 = f(v(i) + k2 * dt / 2, t(i) + dt / 2);
```

```
    k4 = f(v(i) + k3 * dt, t(i) + dt);
```

```
    k = (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
```

```
    v(i + 1) = v(i) + k * dt;
```

```
end
```

1.3 Runge-Kutta-Verfahren

- Bewertung:
 - Die Runge-Kutta-Verfahren sind wie das Vorwärts-Euler-Verfahren explizite Verfahren.
 - Das zweistufige Runge-Kutta-Verfahren ist genau von 2. Ordnung und das vierstufige Verfahren ist genau von 4. Ordnung.
 - Voraussetzung für die Genauigkeit ist, dass die Funktion 3 bzw. 5 mal stetig nach der Zeit differenzierbar ist.

1.4 Stabilität

- Definition:
 - Ein numerisches Verfahren heißt stabil, wenn Fehler, die im Laufe der Berechnung anfallen, nicht anwachsen.
 - Dann bleibt die numerische Lösung beschränkt, wenn die exakte Lösung beschränkt ist.

1.4 Stabilität

- Stabilität des Euler-Vorwärts-Verfahrens:

- Betrachtet wird die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -c x(t)$

- Die Rechenvorschrift für das Euler-Vorwärts-Verfahren lautet:

$$x_{i+1} = x_i - c x_i \Delta t = (1 - c \Delta t) x_i$$

- In diesem Fall lässt sich der Wert x_{i+1} auch direkt aus dem Anfangswert berechnen:

$$x_{i+1} = (1 - c \Delta t)^i x_0$$

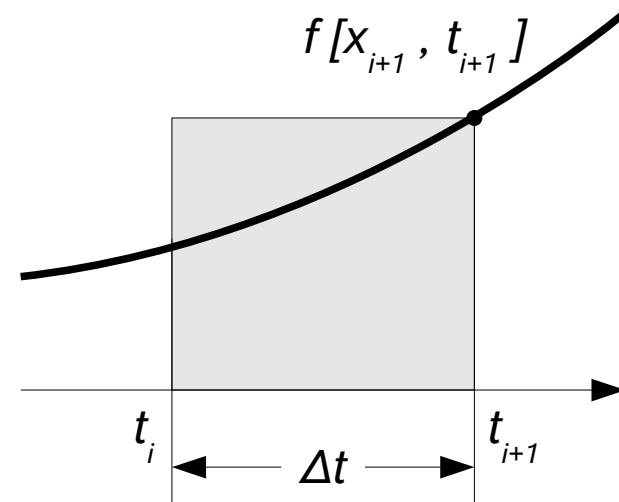
1.4 Stabilität

- Für $|1 - c \Delta t| < 1$ strebt diese Folge gegen Null. Das entspricht dem asymptotischen Verhalten der exakten Lösung
$$x(t) = x_0 \exp(-c t)$$
- Für $|1 - c \Delta t| > 1$ wächst die Folge über alle Grenzen. Das Verfahren ist instabil.
- Die Stabilität des Vorwärts-Euler-Verfahrens hängt also von der Größe des Zeitschrittes ab.
- Für das angegebene Beispiel ist das Verfahren stabil für
$$\Delta t < 2/c$$
- Bei allen expliziten Verfahren darf der Zeitschritt einen bestimmten Wert nicht überschreiten, damit das Verfahren stabil ist.

1.5 Euler-Rückwärts-Verfahren

- Idee:
 - Beim Euler-Rückwärts-Verfahren wird das Integral approximiert durch

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f[x(t), t] dt \approx f[x_{i+1}, t_{i+1}] \Delta t$$



1.5 Euler-Rückwärts-Verfahren

- Algorithmus:
 - Die Approximation des Integrals führt auf folgende Berechnungsvorschrift:
$$x_{i+1} = x_i + f[x_{i+1}, t_{i+1}] \Delta t$$
 - Zur Berechnung des Wertes zum Zeitpunkt t_{i+1} muss eine im allgemeinen nichtlineare Gleichung gelöst werden.
 - Die nichtlineare Gleichung kann z.B. mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst werden.
 - Verfahren, bei denen in jedem Zeitschritt eine Gleichung gelöst werden muss, werden als implizite Verfahren bezeichnet.

1.5 Euler-Rückwärts-Verfahren

- Beispiel: Fall mit Luftwiderstand
 - Die Daten sind die gleichen wie beim Euler-Vorwärts-Verfahren.
 - Die Gleichung für einen Zeitschritt lautet:

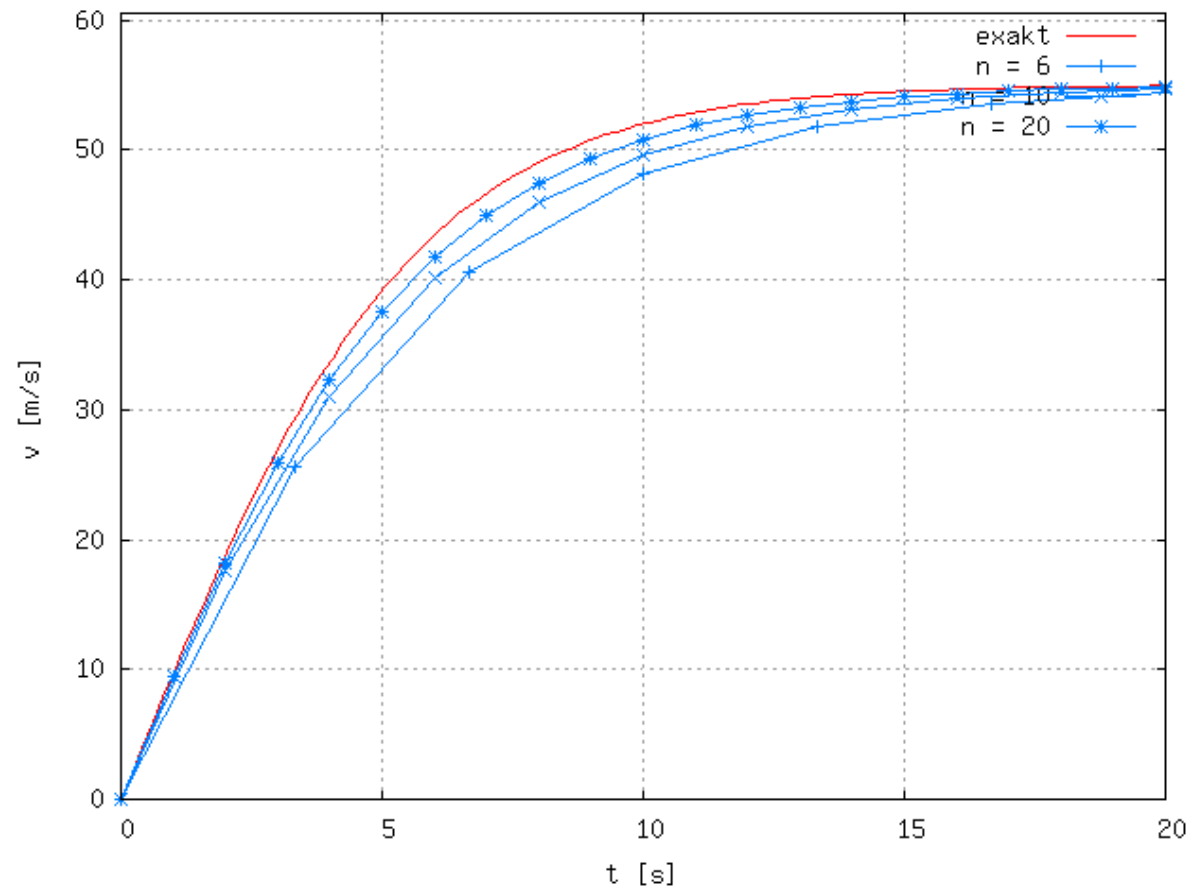
$$v_{i+1} = v_i + \left(g - \frac{C_W}{m} v_{i+1}^2 \right) \Delta t$$

- Sie hat die Lösung

$$v_{i+1} = -\frac{m}{2C_W \Delta t} + \sqrt{\left(\frac{m}{2C_W \Delta t} \right)^2 + \frac{m}{C_W \Delta t} (v_i + g \Delta t)}$$

1.5 Euler-Rückwärts-Verfahren

– Ergebnis:



1.5 Euler-Rückwärts-Verfahren

- Stabilität:

- Für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -c x(t)$

- lautet die Rechenvorschrift: $x_{i+1} = x_i - c x_{i+1} \Delta t$

- Daraus folgt: $x_{i+1} = \frac{1}{1 + c \Delta t} x_i$

- Der Faktor, mit dem der Wert x_i multipliziert wird, ist unabhängig vom Zeitschritt immer kleiner als 1.

- Das Euler-Rückwärts-Verfahren ist für alle Zeitschritte stabil.

1.5 Euler-Rückwärts-Verfahren

- Implizite Verfahren sind in der Regel stabiler als explizite Verfahren, d.h. sie bleiben auch für größere Zeitschritte stabil.
- Die Genauigkeit nimmt jedoch genauso wie bei expliziten Verfahren mit größeren Zeitschritten ab.

1.5 Euler-Rückwärts-Verfahren

- Bewertung:
 - Das Verfahren ist aufwändiger zu programmieren als das Euler-Vorwärts-Verfahren.
 - Bei nichtlinearen Gleichungen ist der Rechenaufwand für einen Zeitschritt deutlich größer als beim Euler-Vorwärts-Verfahren, da eine nichtlineare Gleichung gelöst werden muss.
 - Das Verfahren bleibt auch für größere Zeitschritte stabil.
 - Das Verfahren ist genau von 1. Ordnung.
 - Um eine hinreichend genaue Näherung zu erhalten, muss der Zeitschritt klein sein.

1.6 Differentialgleichungssysteme

- Grundlagen:
 - Ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1[x_1(t), \dots, x_m(t), t] \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= f_m[x_1(t), \dots, x_m(t), t]\end{aligned}$$

- Dazu kommen die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = x_{01}, \quad \dots, \quad x_m(0) = x_{0m}$$

1.6 Differentialgleichungssysteme

- Mit den Matrizen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] = \begin{bmatrix} f_1[\mathbf{x}(t), t] \\ \vdots \\ f_m[\mathbf{x}(t), t] \end{bmatrix}$$

lässt sich das Anfangswertproblem in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t], \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

schreiben.

1.6 Differentialgleichungssysteme

- Lösungsverfahren:
 - Die vorgestellten Lösungsverfahren lassen sich unmittelbar auf Systeme von Differentialgleichungen übertragen, indem die skalaren Größen durch die entsprechenden Matrizen ersetzt werden.
 - Euler-Vorwärts-Verfahren: $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{f}[\mathbf{x}_i, t_i] \Delta t$
 - Euler-Rückwärts-Verfahren: $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{f}[\mathbf{x}_{i+1}, t_{i+1}] \Delta t$
 - Für jeden Zeitschritt muss ein im allgemeinen nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden.

1.6 Differentialgleichungssysteme

- Vierstufiges Runge-Kutta-Verfahren:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \left[\mathbf{x}_i, t_i \right], \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f} \left[\mathbf{x}_i + \mathbf{k}_1 \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2} \right]$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f} \left[\mathbf{x}_i + \mathbf{k}_2 \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2} \right], \quad \mathbf{k}_4 = \mathbf{f} \left[\mathbf{x}_i + \mathbf{k}_3 \Delta t, t_i + \Delta t \right]$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{k} \Delta t$$

1.6 Differentialgleichungssysteme

- Beispiel: Ballistischer Wurf
 - Der ballistische Wurf ist ein schiefer Wurf, bei dem der Luftwiderstand berücksichtigt wird.
 - Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}m \dot{u} &= -C_W u \sqrt{u^2 + w^2} \\m \dot{w} &= -m g - C_W w \sqrt{u^2 + w^2}\end{aligned}$$

mit $u = \dot{x}$, $w = \dot{z}$

1.6 Differentialgleichungssysteme

- In Standardform lautet das System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{C_w}{m} u \sqrt{u^2 + w^2} \\ \dot{w} &= -g - \frac{C_w}{m} w \sqrt{u^2 + w^2} \\ \dot{x} &= u \\ \dot{z} &= w\end{aligned}\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ x \\ z \end{bmatrix}$$

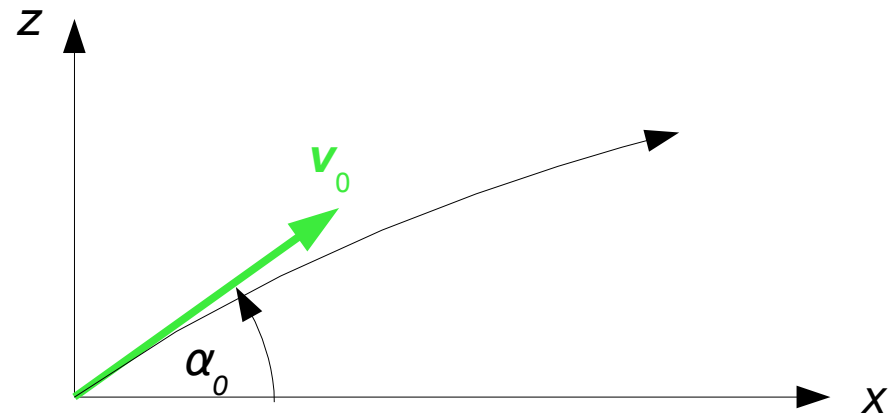
1.6 Differentialgleichungssysteme

– Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0, \quad z(0) = z_0$$

$$u(0) = u_0 = v_0 \cos \alpha_0$$

$$w(0) = w_0 = v_0 \sin \alpha_0$$



– Zahlenwerte:

- $m = 1\text{kg}, C_w = 0,04\text{kg/m}$

- $v_0 = 15\text{m/s}, \alpha_0 = 50^\circ$

- $x_0 = 0\text{m}, z_0 = 0\text{m}$

– Die Flugbahn wird mit dem vierstufigen Runge-Kutta-Verfahren berechnet und mit der Bahn ohne Luftwiderstand verglichen.

1.6 Differentialgleichungssysteme

– Ergebnis:

