1. Freie ungedämpfte Schwingungen

1.1 Schwingungsgleichung

1.2 Statische Vorlast

1.3 Einheiten

1.4 Energiebilanz

1.5 Federsysteme

1.1 Schwingungsgleichung

- Bewegungsgleichung: $m\ddot{x}+c\,x=0$
- Lösungsansatz: $x(t)=A_1\sin(\omega t)+A_2\cos(\omega t)$

$$\dot{x}(t)=\omega\left(A_1\cos(\omega t)-A_2\sin(\omega t)\right)$$

$$\ddot{x}(t)=-\omega^2\left(A_1\sin(\omega t)+A_2\cos(\omega t)\right)$$

$$=-\omega^2 x(t)$$

- Einsetzen: $\left(-m\omega^2+c\right)x(t)=0$
- Nichttriviale Lösung für: $-m\omega^2+c=0 \rightarrow$ $\boxed{\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}}$

1.1 Schwingungsgleichung

- Schwingungskenngrößen:
  - Kreisfrequenz:

$$\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$$

  - Frequenz:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$$

  - Periode:

$$T=\frac{1}{f}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

- Bestimmung von A_1 und A_2 aus Anfangsbedingungen
- Beispiel:
  - Auslenkung x_0 und Geschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben

$$x_0=x(0)=A_2\rightarrow A_2=x_0$$

$$v_0=\dot{x}(0)=\omega A_1\rightarrow A_1=\frac{v_0}{\omega}$$

1.1 Schwingungsgleichung

- Ergebnis:

$$x(t)=x_0\cos(\omega t)+(v_0/\omega)\sin(\omega t)=A\sin(\omega t+\phi)$$

  - Zusammenhang:

$$A\sin(\omega t+\phi)=A\sin(\omega t)\cos\phi+A\cos(\omega t)\sin\phi$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} x_0=A\sin\phi & A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2} \\ \dfrac{v_0}{\omega}=A\cos\phi & \tan\phi=\dfrac{\omega x_0}{v_0} \end{array}}$$

1.1 Schwingungsgleichung

- Zusammenfassung:
  - Zeitverläufe:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

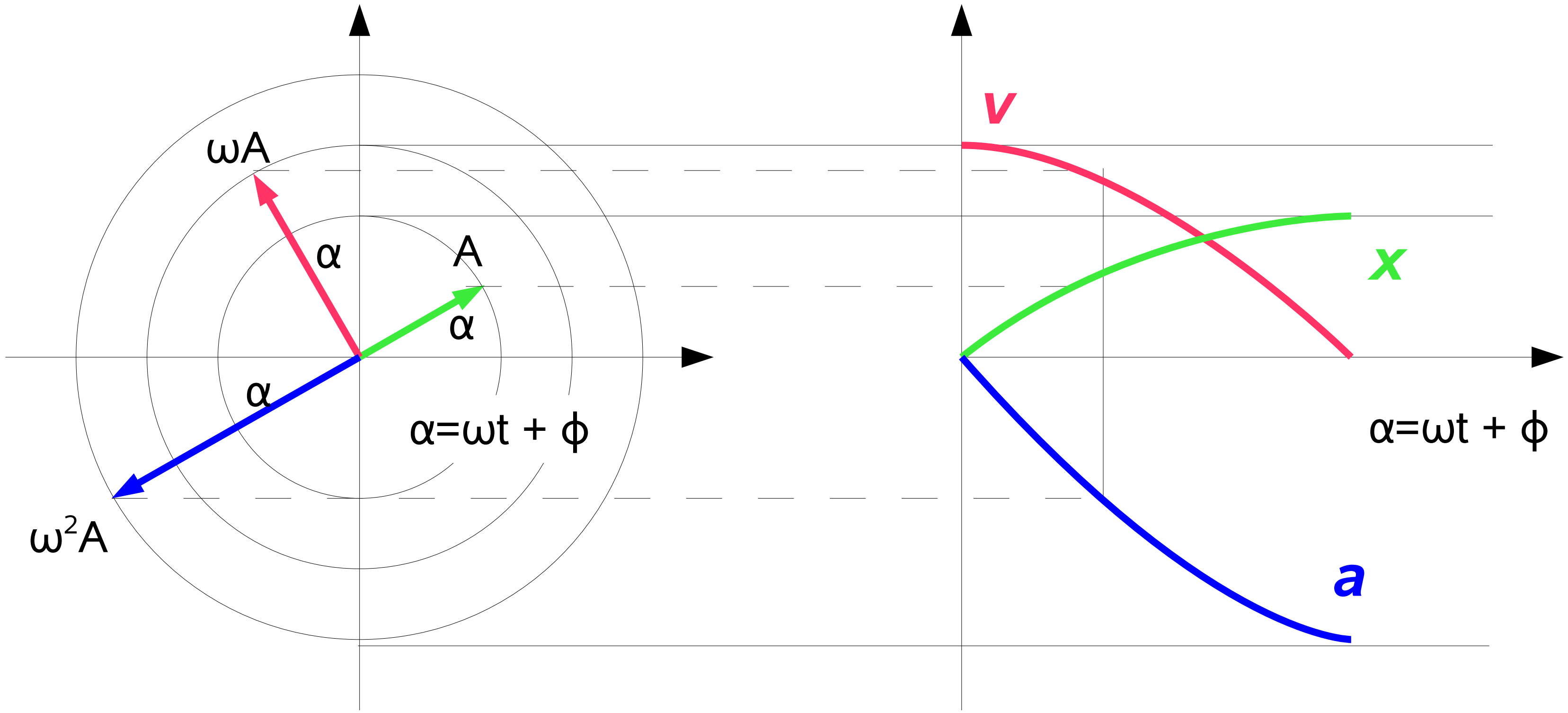
$$\dot{x}(t) = v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi) = \omega A \sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = \omega^2 A \sin(\omega t + \phi + \pi)$$

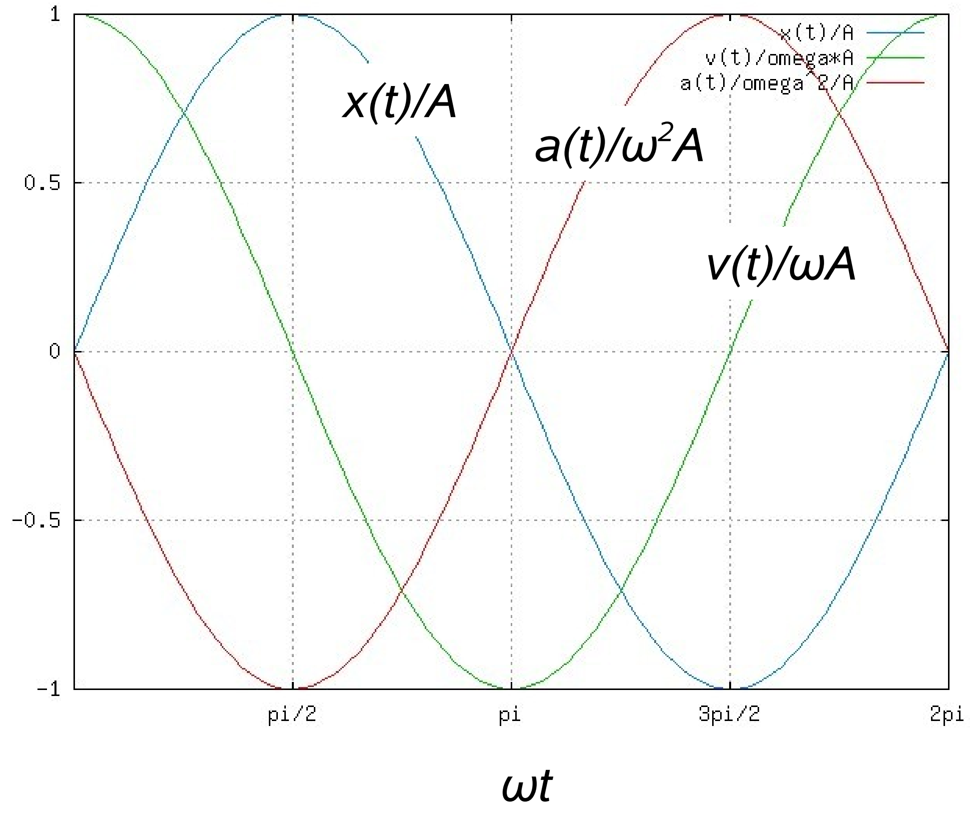
  - Maxima:

$$x_{max} = A, \quad v_{max} = \omega A, \quad a_{max} = \omega^2 A$$

1.1 Schwingungsgleichung

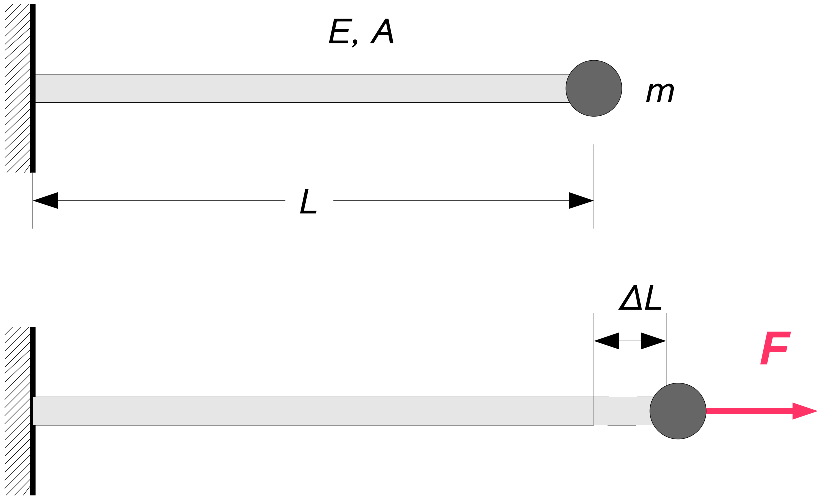


1.1 Schwingungsgleichung



1.1 Schwingungsgleichung

- Beispiel: Zugstab mit Einzelmasse



  – Ermittlung der Federkonstante *c*:
    - Auslenken der Masse um ΔL
    - Bestimmung der dazu nötigen Kraft *F*:

$$F = \sigma A = E \epsilon A = EA \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

    - Für die Federkonstante *c* folgt:

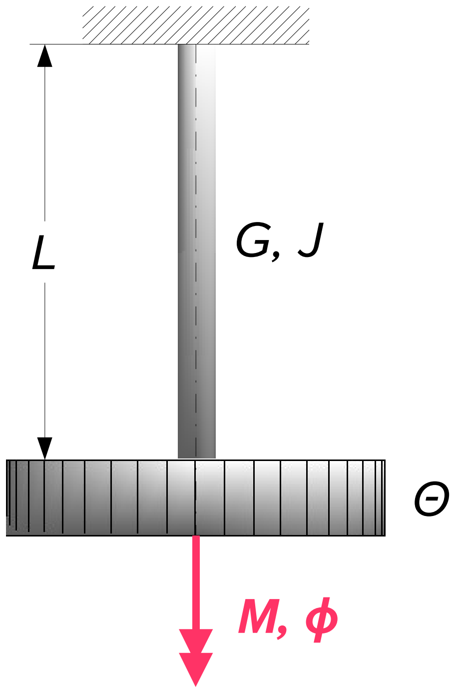
$$c = \frac{F}{\Delta L} = \frac{EA}{L}$$

  – Frequenz:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$

1.1 Schwingungsgleichung

- Beispiel: Torsionsstab mit Einzelmasse



- Torsionsstab:
  - Länge L
  - Torsionssteifigkeit GJ
  - masselos
- Scheibe:
  - Massenträgheitsmoment Θ
- Freiheitsgrad:
  - Verdrehung ϕ

1.1 Schwingungsgleichung

– Ermittlung der Feder-konstante *c*:
  - Verdrehen der Scheibe um Winkel ϕ
  - Bestimmung des dazu nötigen Moments *M*:

$$M=\frac{GJ}{L}\phi$$

  - Für die Federkonstante folgt:

$$c=\frac{GJ}{L}$$

– Schwingungsgleichung:

$$\Theta\ddot{\phi}+c\,\phi=0$$

– Kreisfrequenz:

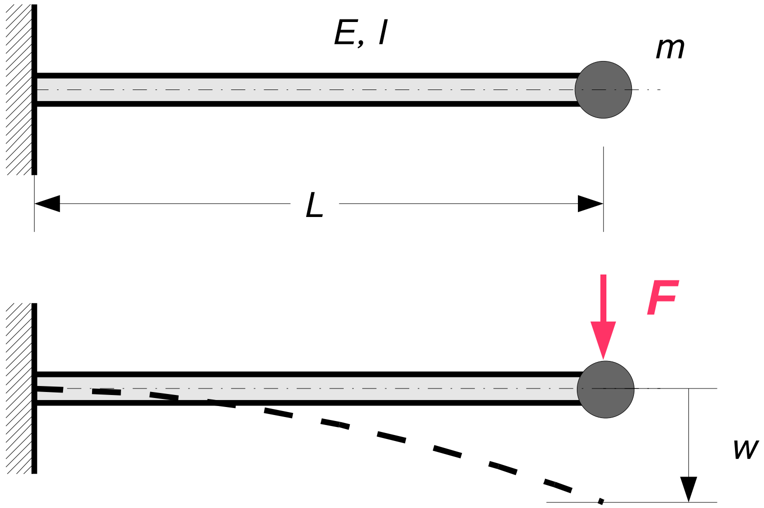
$$\omega=\sqrt{\frac{c}{\Theta}}=\sqrt{\frac{GJ}{L\,\Theta}}$$

– Frequenz:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GJ}{L\,\Theta}}$$

1.1 Schwingungsgleichung

- Beispiel: Kragbalken mit Einzelmasse



  – Ermittlung der Feder-konstante *c*:
    - Auslenken der Masse um *w*
    - Bestimmung der dazu nötigen Kraft *F*:

$$F = 3\frac{EI}{L^3}w$$

    - Für die Federkonstante *c* folgt:

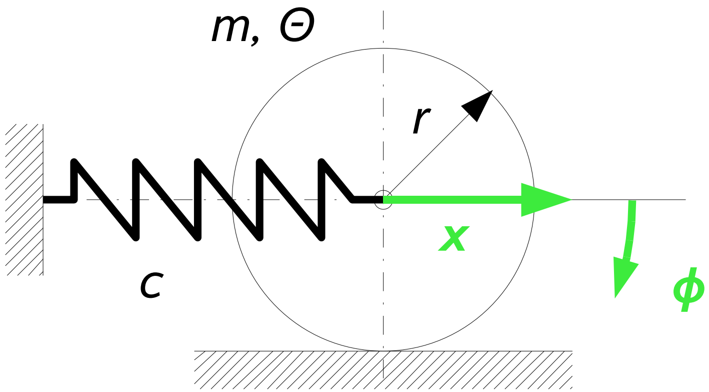
$$c = 3\frac{EI}{L^3}$$

  – Frequenz:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{3\frac{EI}{mL^3}}$$

1.1 Schwingungsgleichung

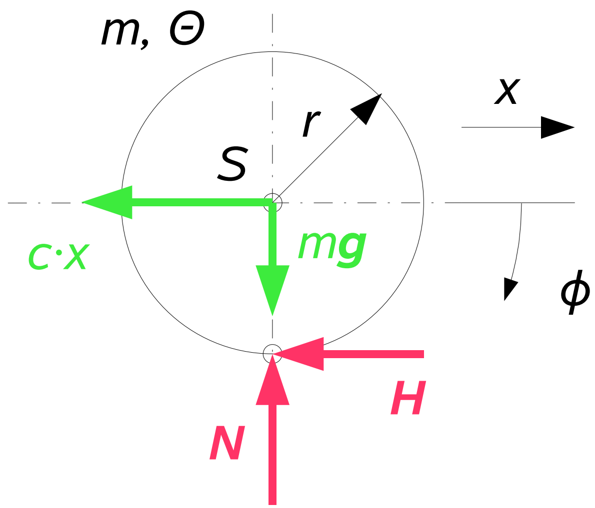
- Beispiel: Rollschwinger



  - Eine zylindrische Walze mit Masse m und Massenträgheitsmoment Θ bezüglich des Schwerpunktes wird durch eine im Schwerpunkt befestigte Feder der Steifigkeit c gehalten.
  - Die Walze kann auf einer horizontalen Ebene rollen.

1.1 Schwingungsgleichung

– Walze freigeschnitten:



– Rollbedingung:

$$x = r\,\phi \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = r\,\ddot{\phi}$$

– Drallsatz bezüglich Schwerpunkt *S*:

$$\Theta\,\ddot{\phi} = r\,H$$

– Impulssatz:

$$m\,\ddot{x} = -c\,x - H$$

$$\rightarrow \quad H = -c\,r\,\phi - m\,r\,\ddot{\phi}$$

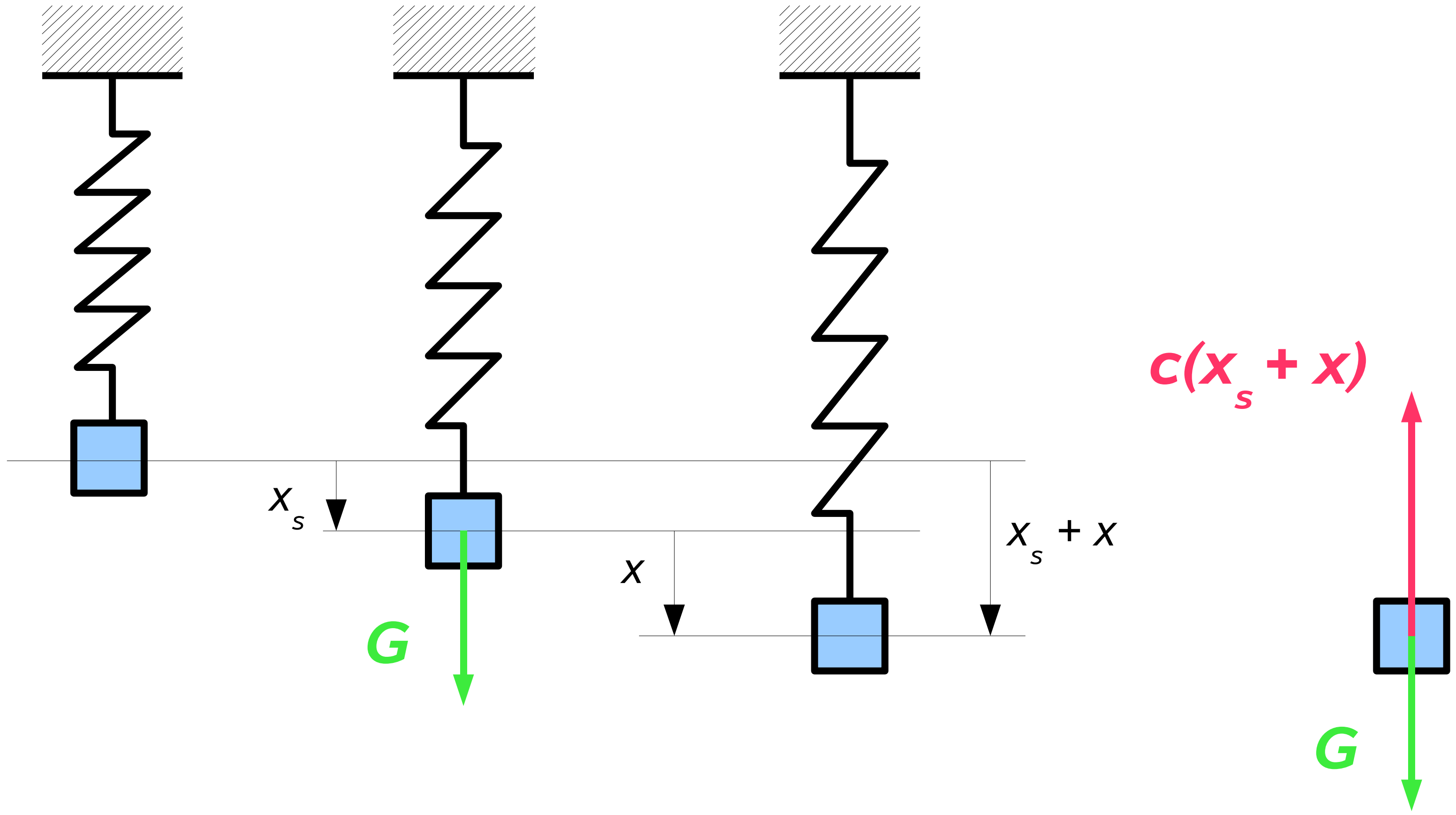
– Schwingungsgleichung:

$$\left(\Theta + m\,r^2\right)\ddot{\phi} + c\,r^2\,\phi = 0$$

– Frequenz:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c\,r^2}{\Theta + m\,r^2}}$$

1.2 Statische Vorlast



1.2 Statische Vorlast

- Statische Ruhelage:

$$c\,x_s = G$$

- Impulssatz:

$$m\,\ddot{x} = G - c\,(x_s + x)$$

$$\rightarrow \quad m\,\ddot{x} + c\,x = 0$$

- Eine Schwingung erfolgt immer um die statische Ruhelage.

- Vorspannkraft und statische Last sind im Gleichgewicht.

- Bei linearen Systemen muss die statische Last nicht berücksichtigt werden, wenn die Auslenkung von der statischen Ruhelage aus gemessen wird.

1.2 Statische Vorlast

- Die Frequenz kann aus der statischen Auslenkung berechnet werden:
  - Gewichtskraft: $G = m\,g$
  - Statische Ruhelage: $c\,x_s = m\,g \rightarrow \dfrac{c}{m} = \dfrac{g}{x_s}$
  - Frequenz: $\boxed{f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{x_s}}}$

1.3 Einheiten

- Die Einheiten von Steifigkeit und Masse müssen konsistent sein.
  - Beispiel:

$$[c]=\frac{N}{m},\quad [m]=kg$$

$$\left[\frac{c}{m}\right]=\frac{N}{m\cdot kg}=\frac{kg\cdot m}{s^2\cdot m\cdot kg}=\frac{1}{s^2}$$

$$[f]=\sqrt{\left[\frac{c}{m}\right]}=\frac{1}{s}=1\,Hz$$

- In der Praxis werden in der Regel folgende Einheiten verwendet:
  - Längeneinheit: *mm*
  - Krafteinheit: *N*
  - Elastizitätsmodul: N/mm^2
- Damit ist die Einheit für die Masse eine abgeleitete Einheit.

1.3 Einheiten

- Einheit für die Masse:

$$1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2} = 1\,\frac{kg \cdot 10^3\,mm}{s^2}$$

$$1\,N = 1000\,\frac{kg \cdot mm}{s^2}$$

$$1\,kg = 10^{-3}\,\frac{N\,s^2}{mm}$$

$$\boxed{1\,\frac{N\,s^2}{mm} = 1000\,kg = 1\,t}$$

- Konsistente Einheiten:
  - *N, kg, m*
  - *N, t, mm*
- Falsch:
  - *N, kg, mm*

1.3 Einheiten

- Beispiel: Kragbalken mit Einzelmasse
  - Für die folgenden Zahlenwerte ist die Frequenz zu bestimmen:
    - $E = 2 \cdot 10^5 N/mm^2$
    - $I = 2 \cdot 10^5 mm^4$
    - $L = 1000 mm$
    - $m = 1 kg$
  - Umrechnung der Masse:
    - $m = 1 \cdot 10^{-3} t$

1.3 Einheiten

– Frequenz:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{3\frac{EI}{mL^3}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\cdot 2\cdot 10^5\,N/mm^2\cdot 2\cdot 10^5\,mm^4}{10^{-3}\,Ns^2/mm\cdot 1000^3\,mm^3}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\cdot 3\cdot 10^{10}\,Nmm^2}{10^6\,Ns^2\,mm^2}}$$

$$= \frac{100}{\pi}\sqrt{3}\,\frac{1}{s} = \underline{55{,}13\,Hz}$$

1.4 Energiebilanz

- Kinetische Energie:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

- Elastische Energie:

$$E_p = \frac{1}{2} c x^2 = \frac{1}{2} c A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

- Energieerhaltung:

$$E_k + E_p = E = const.$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} A^2 \left[m \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + c \sin^2(\omega t + \phi) \right] = const.$$

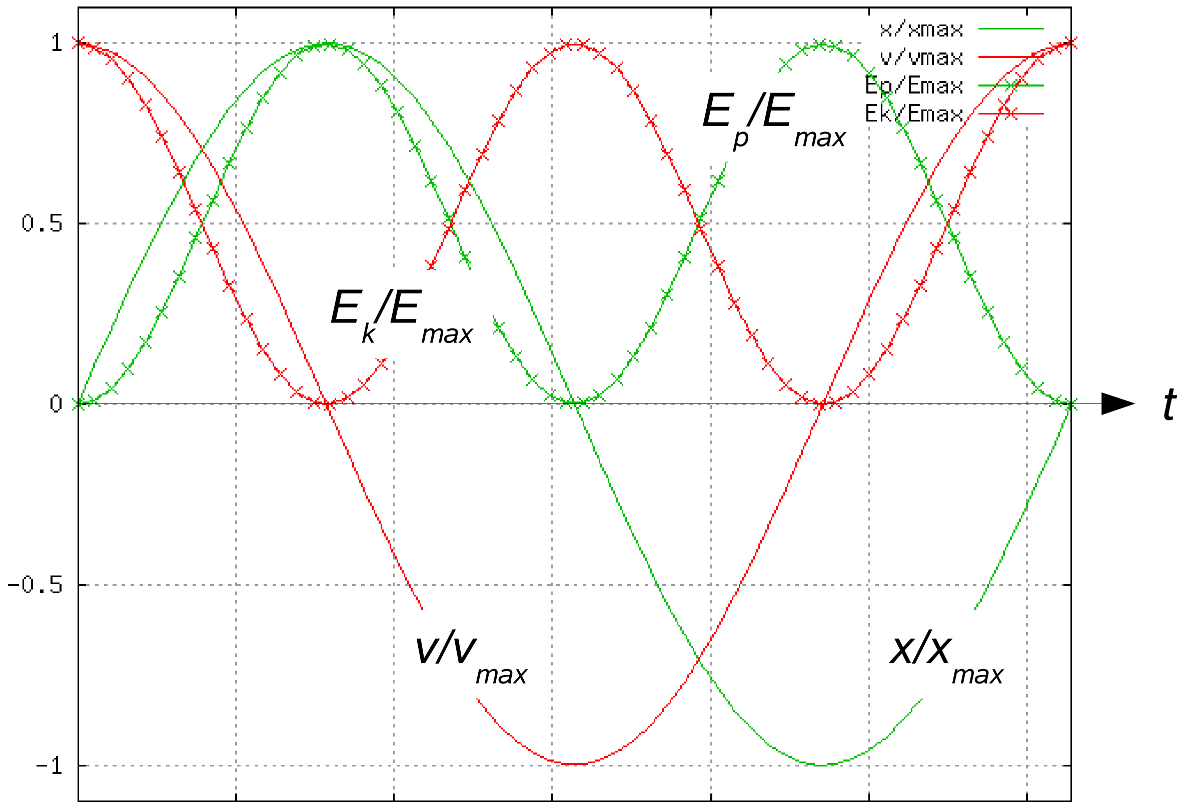
1.4 Energiebilanz

- Aus der Energieerhaltung folgt: $m\omega^2 = c$
- Gesamtenergie: $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} c A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$
- Mit $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right)$, $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right)$

  folgt:

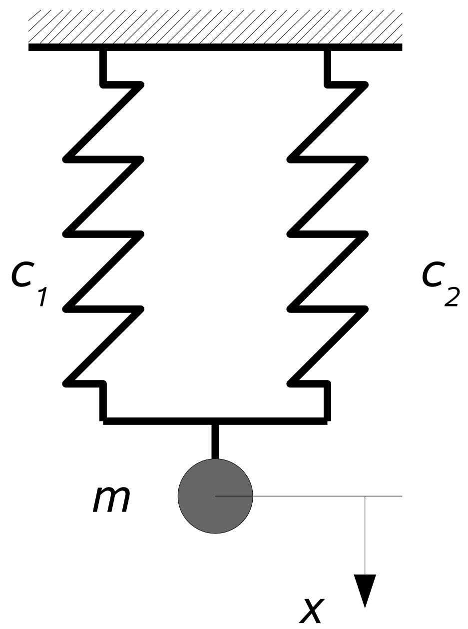
$$\boxed{\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} E \left(1+\cos\left(2\omega t + 2\phi\right)\right) \\ E_p &= \frac{1}{2} E \left(1-\cos\left(2\omega t + 2\phi\right)\right) \end{aligned}}$$

1.4 Energiebilanz

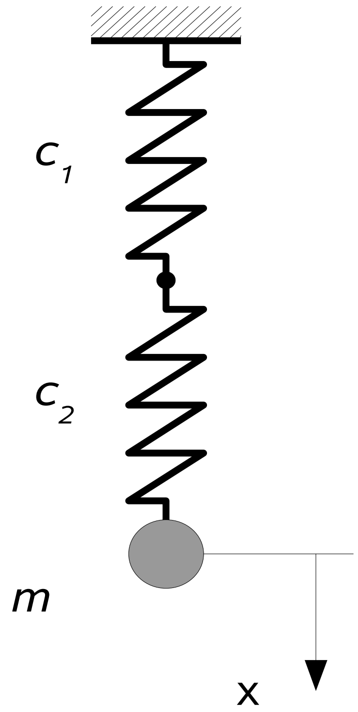


1.5 Federsysteme

- Parallelschaltung:

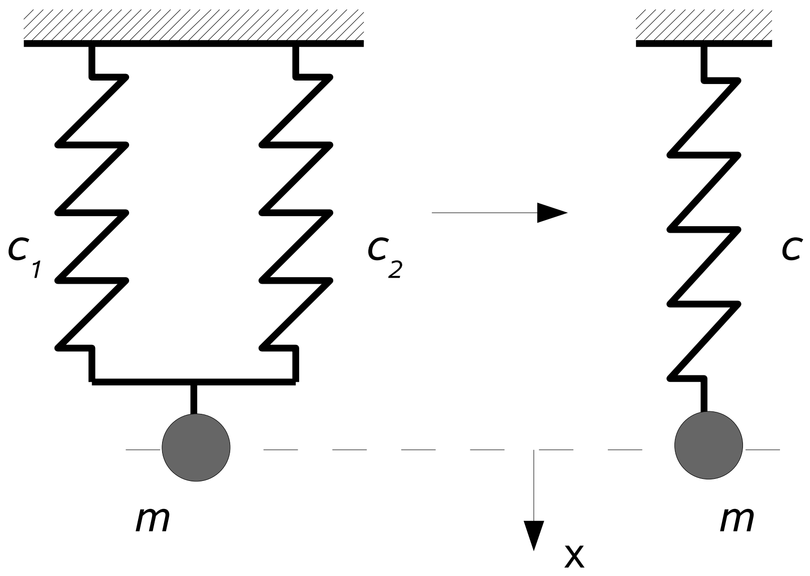


- Reihenschaltung:



1.5 Federsysteme

- Parallelschaltung:



  – Beide Federn haben die gleiche Auslenkung *x*.

– Die Federkräfte addieren sich:

$$F = F_1 + F_2 = c_1 x + c_2 x$$
$$= (c_1 + c_2) x = c\, x$$

– Damit folgt für die Steifigkeit der Ersatzfeder:

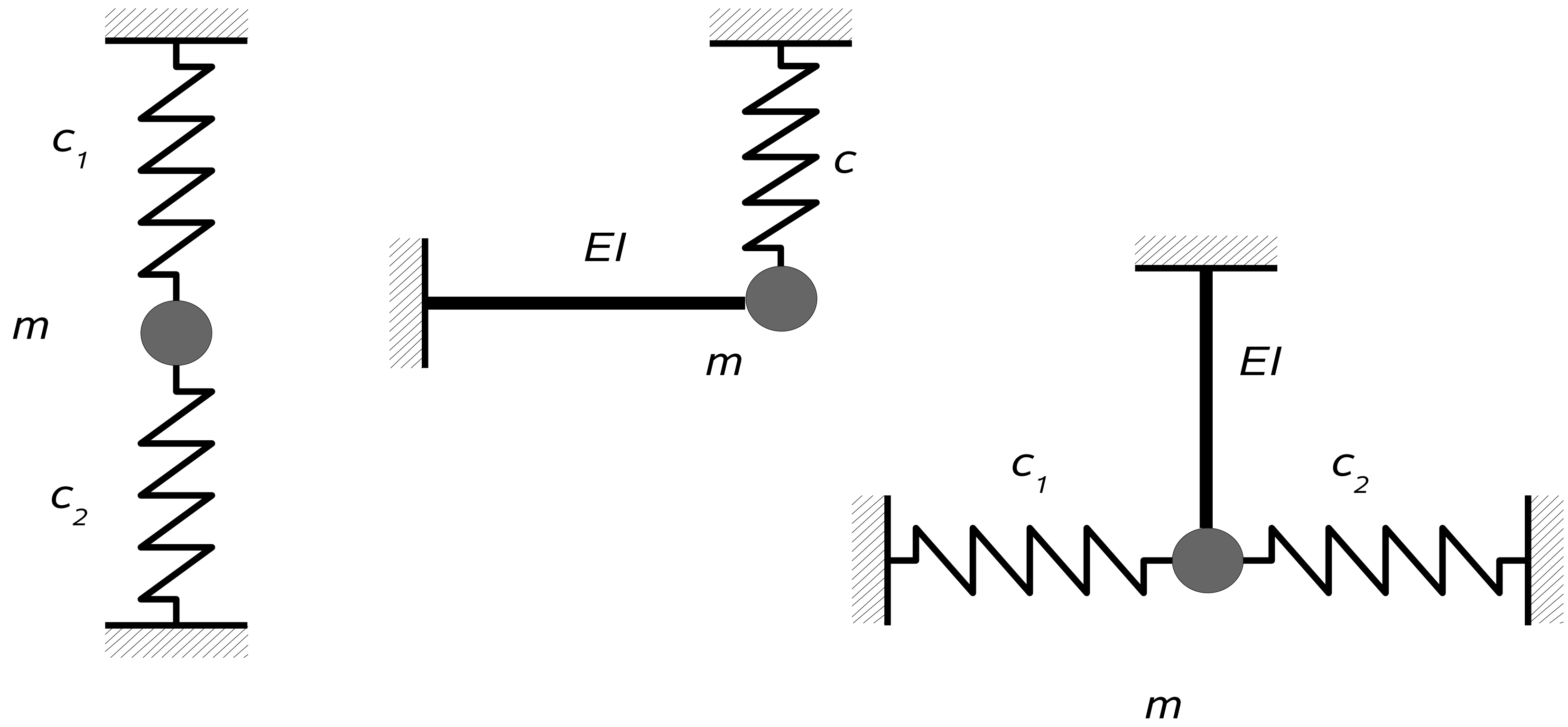
$$c = c_1 + c_2$$

– Bei mehr als zwei Federn gilt:

$$c = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

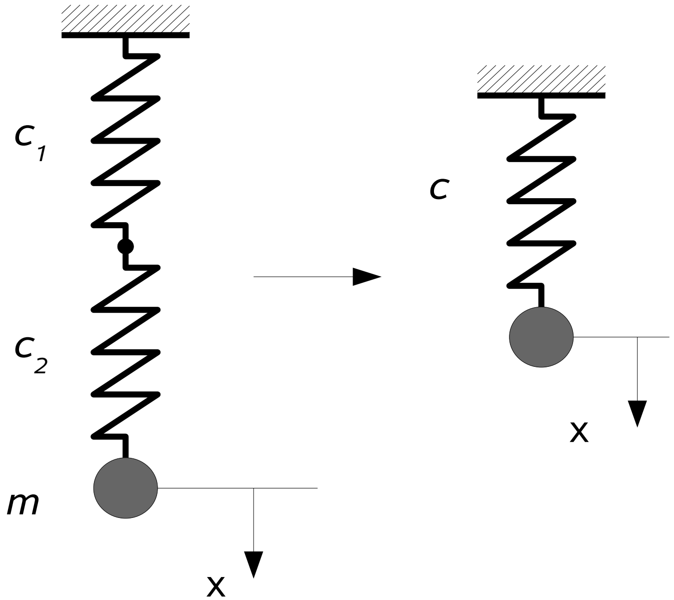
1.5 Federsysteme

– Beispiele:



1.5 Federsysteme

- Reihenschaltung:



  - Beide Federn haben die gleiche Kraft *F*.

  - Die Wege addieren sich:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2}$$

$$= F\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)$$

  - Damit folgt für die Steifigkeit der Ersatzfeder:

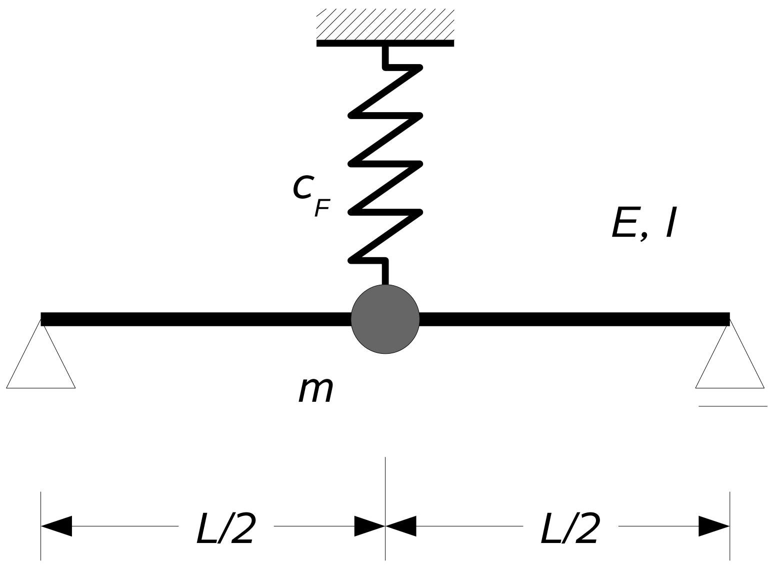
$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \quad \rightarrow \quad c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

  - Bei mehr als zwei Federn gilt:

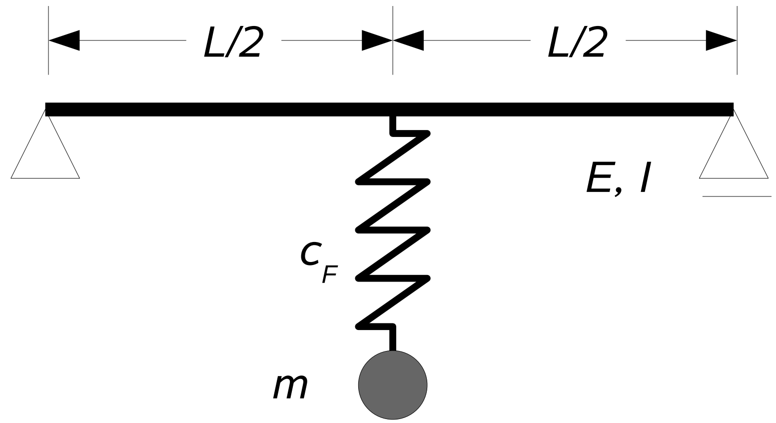
$$\frac{1}{c} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}$$

1.5 Federsysteme

- Beispiel:



System 1



System 2

1.5 Federsysteme

- Die beiden dargestellten Systeme bestehen jeweils aus einem masselosen Balken (Biegesteifigkeit EI), einer Feder (Federkonstante c_F) und einer Masse m.
- Wie groß sind die Eigenfrequenzen?

- Daten:
  - $L = 1m$
  - $m = 5kg$
  - $EI = 4\cdot 10^{10} Nmm^2$
  - $c_F = 500 N/mm$

1.5 Federsysteme

– System 1:
  - Durchbiegung in Balkenmitte und Verlängerung der Feder sind gleich.
  - Es handelt sich um eine Parallelschaltung.
  - Federsteifigkeit des Balkens:

$$c_B = \frac{48\,EI}{L^3}$$

- Ersatzsteifigkeit:

$$c_1 = c_F + c_B = c_F + \frac{48\,EI}{L^3}$$

- Frequenz:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_1}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_F L^3 + 48\,EI}{mL^3}}$$

1.5 Federsysteme

- System 2:
  - Die Auslenkung der Masse ist gleich der Summe der Durchbiegung des Balkens und der Verlängerung der Feder.
  - Es handelt sich um eine Reihenschaltung.

- Ersatzsteifigkeit:

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{c_F} + \frac{L^3}{48\,EI} = \frac{48\,EI + c_F L^3}{48\,c_F\,EI}$$

- Frequenz:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{48\,c_F\,EI}{\left(cL^3 + 48\,EI\right)m}}$$

1.5 Federsysteme

– Zahlenwerte:

- Masse:

$$5\,kg = 5\cdot 10^{-3}\,t = \underline{5\cdot 10^{-3}\,\frac{Ns^2}{mm}}$$

- Balkensteifigkeit:

$$c_B = \frac{48\cdot 4\cdot 10^{10}}{10^9}\,\frac{Nmm^2}{mm^2}$$
$$= \underline{1920\,\frac{N}{mm}}$$

- Ersatzsteifigkeiten:

$$c_1 = 500\,N/mm + 1920\,N/mm$$
$$= \underline{2420\,N/mm}$$

$$c_2 = \frac{c_F\,c_B}{c_F + c_B}$$
$$= \frac{500\cdot 1920}{500+1920}\,\frac{N^2\cdot mm}{mm^2\cdot N}$$
$$= \underline{396{,}7\,N/mm}$$

1.5 Federsysteme

- Frequenzen:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2420}{5 \cdot 10^{-3}} \frac{N \cdot mm}{mm \cdot Ns^2}} = \underline{110{,}7\ Hz}$$

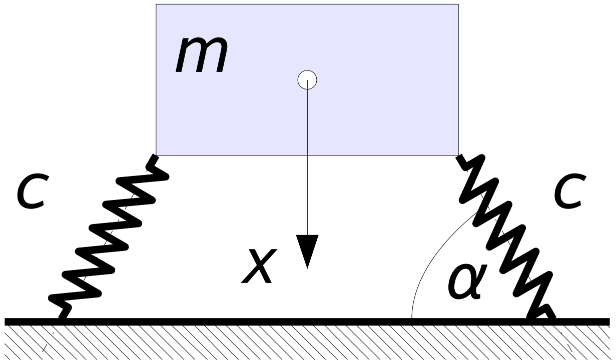
$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{396{,}7}{5 \cdot 10^{-3}} \frac{N \cdot mm}{mm \cdot Ns^2}} = \underline{44{,}8\ Hz}$$

1.5 Federsysteme

- Schräg eingebaute Feder:
  - Bei einer schräg eingebauten Feder ist die Federachse gegenüber der Schwingungsrichtung geneigt.
  - Vorgehen:
    - Die Verschiebung wird in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Federachse zerlegt. Da die Verschiebung als klein vorausgesetzt wird, kann diese Zerlegung am unverformten System durchgeführt werden.
    - Mit Hilfe der Federkonstanten wird die Federkraft parallel zur Federachse ermittelt.
    - Daraus wird die Komponente der Federkraft in Schwingungsrichtung berechnet.

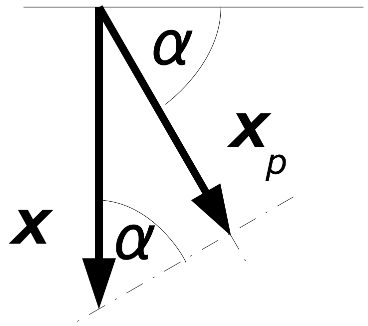
1.5 Federsysteme

– Beispiel:



- Die abgebildete Masse kann sich nur in *x*-Richtung bewegen.
- Sie wird durch zwei Federn gestützt.

- Zerlegung der Verschiebung *x*:



$$x_p = x \sin\alpha$$

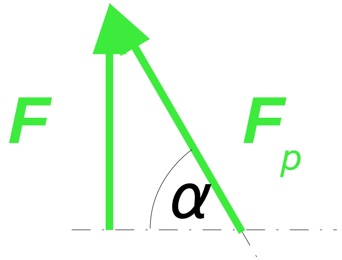
- Federkraft:

$$F_p = c\, x_p = c\, x \sin\alpha$$

1.5 Federsysteme

- Kraft in Schwingungsrichtung:

$$F = F_p \sin\alpha = c \sin^2(\alpha)\, x$$



- Ersatzsteifigkeit der beiden Federn:

$$c_{ges} = 2c \sin^2(\alpha)$$