Starrkörperdynamik Lösungsblatt 1.1

Aufgabe 1:

Für eine Drehung um die ortsfeste z-Achse lautet der Drehtensor

$$\boldsymbol{R}_z(\phi)=\cos(\phi)\boldsymbol{I}+\left(1-\cos(\phi)\right)\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z+\sin(\phi)\tilde{\boldsymbol{e}}_z \quad .$$

Die Ableitung nach der Zeit berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{R}}_z=\dot{\phi}\left[-\sin(\phi)\boldsymbol{I}+\sin(\phi)\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z+\cos(\phi)\tilde{\boldsymbol{e}}_z\right] \quad .$$

Damit folgt für den Tensor der Winkelgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}&=\dot{\boldsymbol{R}}_z\boldsymbol{R}_z^T\\
&=\dot{\phi}\left[\sin(\phi)\left(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z-\boldsymbol{I}\right)+\cos(\phi)\tilde{\boldsymbol{e}}_z\right]\left[\cos(\phi)\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)+\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z-\sin(\phi)\tilde{\boldsymbol{e}}_z\right]\\
&=\dot{\phi}\Big[-\sin(\phi)\cos(\phi)\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)^2-\sin(\phi)\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z)\\
&\qquad+\sin^2(\phi)\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)\tilde{\boldsymbol{e}}_z+\cos^2(\phi)\tilde{\boldsymbol{e}}_z\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)+\cos(\phi)\tilde{\boldsymbol{e}}_z(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z)\\
&\qquad-\cos(\phi)\sin(\phi)\tilde{\boldsymbol{e}}_z^{\boldsymbol{2}}\Big]\end{aligned}$$

Wegen $\left(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)^2=\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$ gilt

$$\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)^2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z+\left(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)^2=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$$

und

$$\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z)=\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{0} \quad .$$

Mit $\tilde{\boldsymbol{e}}_z(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z)=(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z)\tilde{\boldsymbol{e}}_z=\boldsymbol{0}$ und $\tilde{\boldsymbol{e}}_z^{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z-\boldsymbol{I}$ folgt:

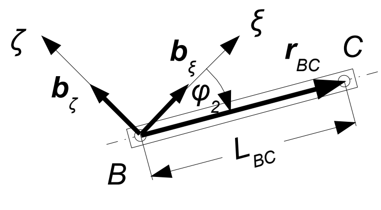
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}&=\dot{\phi}\Big[-\sin(\phi)\cos(\phi)\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)+\left(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)\right)\tilde{\boldsymbol{e}}_z\\
&\qquad+\sin(\phi)\cos(\phi)\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\right)\Big]=\dot{\phi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}$$

Damit gilt auch:

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_z$$

Aufgabe 2:

Ortsvektor von Punkt C im Koordinatensystem $B\xi\eta\zeta$:



$$\boldsymbol{r}_{BC}=L_{BC}\left(\cos(\phi_2)\boldsymbol{b}_\xi-\sin(\phi_2)\boldsymbol{b}_\zeta\right)$$

Winkelgeschwindigkeiten:

$$\boldsymbol{\omega}_1=-\omega_1\boldsymbol{b}_\eta \quad , \quad \boldsymbol{\omega}_2=\omega_2\boldsymbol{b}_\eta$$

a) Relativgeschwindigkeit und Relativbeschleunigung des Punktes *C*:

Die Relativgeschwindigkeit des Punktes C berechnet sich zu

$$\begin{aligned} {}^B\boldsymbol{v}_C &= \frac{{}^B d\,\boldsymbol{r}_{BC}}{dt} = \dot{\phi}_2 L_{BC}\left(-\sin(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\xi - \cos(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\zeta\right) \\ &= -\omega_2 L_{BC}\left(\sin(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\xi + \cos(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\zeta\right) \end{aligned} \quad .$$

Dasselbe Ergebnis erhält man auch aus

$${}^B\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{BC} \quad ,$$

da sich der Punkt *C* für einen mit dem System *Bξηζ* mit bewegten Beobachter mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_2 auf einer Kreisbahn um den Punkt *B* bewegt.

Die Komponenten der Relativgeschwindigkeit im System *Bξηζ* sind also

$${}^B v_{C\xi} = -\omega_2 L_{BC} \sin(\phi_2), \quad {}^B v_{C\zeta} = -\omega_2 L_{BC} \cos(\phi_2) \quad .$$

Für die angegebenen Zahlenwerte folgt:

$$\omega_2 L_{BC} = 0{,}2 \cdot 1{,}8\, m/s = 0{,}36\, m/s$$

$${}^B v_{C\xi} = -0{,}36\, m/s \cdot \sin 30° = \underline{-0{,}1800\, m/s}$$

$${}^B v_{C\zeta} = -0{,}36\, m/s \cdot \cos 30° = \underline{-0{,}3118\, m/s}$$

Die Relativbeschleunigung berechnet sich zu

$${}^B\boldsymbol{a}_C = \frac{{}^B d\,{}^B\boldsymbol{v}_C}{dt} = -\omega_2^2 L_{BC}\left(\cos(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\xi - \sin(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\zeta\right) = -\omega_2^2 \boldsymbol{r}_{BC} \quad .$$

Für einen mit dem System *Bξηζ* mit bewegten Beobachter ist die Beschleunigung des Punktes *C* gleich der Zentripetalbeschleunigung.

Die Komponenten der Relativbeschleunigung im System *Bξηζ* sind also

$${}^B a_{C\xi} = -\omega_2^2 L_{BC} \cos\phi_2, \quad {}^B a_{C\zeta} = \omega_2^2 L_{BC} \sin\phi_2 \quad .$$

Für die angegebenen Zahlenwerte folgt:

$$\omega_2^2 L_{BC} = 0{,}2^2 \cdot 1{,}8\, m/s^2 = 0{,}0720\, m/s^2$$

$${}^B a_{C\xi} = -0{,}072\, m/s^2 \cdot \cos 30° = \underline{-0{,}06235\, m/s^2}$$

$${}^B a_{C\zeta} = 0{,}072\, m/s^2 \cdot \sin 30° = \underline{0{,}03600\, m/s^2}$$

b) Absolutgeschwindigkeit und Absolutbeschleunigung des Punktes *C*:

Die Absolutgeschwindigkeit des Punktes *C* berechnet sich aus

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{BC} + {}^B\boldsymbol{v}_C \quad .$$

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_B$ ist die Geschwindigkeit des Punktes *B* infolge der Rotation um den Punkt *A*, d.h.

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_B \quad .$$

Damit folgt

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(\boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_{BC}\right) + {}^B\boldsymbol{v}_C \quad .$$

Mit $\boldsymbol{r}_B = L_{AB}\,\boldsymbol{b}_\xi$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_C &= -\omega_1\,\boldsymbol{b}_\eta \times \left[\left(L_{AB} + L_{BC}\cos(\phi_2)\right)\boldsymbol{b}_\xi - L_{BC}\sin(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\zeta\right] \\ &\quad -\omega_2\,L_{BC}\left(\sin(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\xi + \cos(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\zeta\right) \\ &= \left[\omega_1\,L_{AB} + \left(\omega_1 - \omega_2\right)L_{BC}\cos(\phi_2)\right]\boldsymbol{b}_\zeta + \left(\omega_1 - \omega_2\right)L_{BC}\sin(\phi_2)\,\boldsymbol{b}_\xi \end{aligned} \quad .$$

Für die angegebenen Zahlenwerte folgt:

$$v_{C\xi} = \left(0{,}1\,s^{-1} - 0{,}2\,s^{-1}\right)\cdot 1{,}8\,m\cdot\sin(30\,°) = \underline{-0{,}09000\,m/s}$$

$$v_{C\zeta} = 0{,}1\,s^{-1}\cdot 2\,m + \left(0{,}1 - 0{,}2\right)s^{-1}\cdot 1{,}8\,m\cdot\cos(30\,°) = \underline{0{,}04412\,m/s}$$

Die Absolutbeschleunigung des Punktes *C* berechnet sich aus

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{BC}\right) + {}^B\boldsymbol{a}_C + 2\,\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^B\boldsymbol{v}_C \quad .$$

Die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_B$ ist die Zentripetalbeschleunigung des Punktes *B* infolge der Rotation um den Punkt *A*, d.h.

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_B\right) \quad .$$

Damit folgt

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[\boldsymbol{\omega}_1 \times \left(\boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_{BC}\right)\right] + {}^B\boldsymbol{a}_C + 2\,\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^B\boldsymbol{v}_C \quad .$$

Mit $\boldsymbol{v}_C - {}^B\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(\boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_{BC}\right)$ (s. o.) folgt weiter

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(\boldsymbol{v}_C - {}^B\boldsymbol{v}_C\right) + 2\,\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^B\boldsymbol{v}_C + {}^B\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(\boldsymbol{v}_C + {}^B\boldsymbol{v}_C\right) + {}^B\boldsymbol{a}_C$$

Für die angegebenen Zahlenwerte gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_C &= -0{,}1\,s^{-2}\,\boldsymbol{b}_\eta \times \left[\left(-0{,}09000 - 0{,}1800\right)m/s\cdot\boldsymbol{b}_\xi + \left(0{,}04412 - 0{,}3118\right)m/s\cdot\boldsymbol{b}_\zeta\right] \\ &\quad -0{,}06235\,m/s^2\cdot\boldsymbol{b}_\xi + 0{,}03600\,m/s^2\cdot\boldsymbol{b}_\zeta \\ &= \left(-0{,}1\cdot 0{,}2700 + 0{,}03600\right)m/s^2\cdot\boldsymbol{b}_\zeta + \left(0{,}1\cdot 0{,}2677 - 0{,}06235\right)m/s^2\cdot\boldsymbol{b}_\xi \\ &= -0{,}03558\,m/s^2\cdot\boldsymbol{b}_\xi + 0{,}009000\,m/s^2\cdot\boldsymbol{b}_\zeta \end{aligned}$$

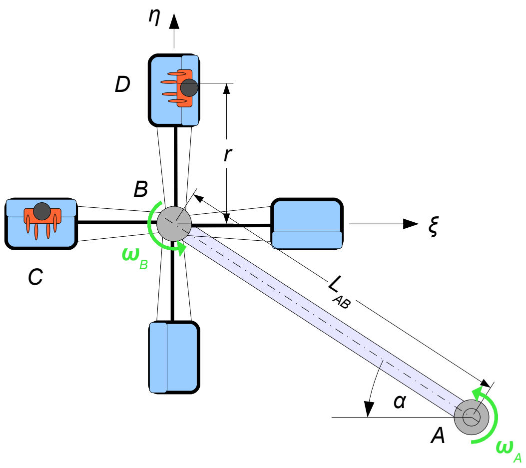
Die Komponenten der Absolutbeschleunigung sind also:

$$a_{C\xi} = \underline{-0{,}03558\,m/s^2} \quad , \quad a_{C\zeta} = \underline{0{,}009000\,m/s^2}$$

Aufgabe 3:

Bewegung bezüglich des bewegten Koordinatensystems $B\xi\eta\zeta$:

Im bewegten System bewegen sich die Fahrgäste C und D auf einer Kreisbahn mit Radius r um den Punkt B. Sie bewegen sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_B.



Ortsvektoren im System $B\xi\eta\zeta$:

$$\boldsymbol{r}_{BC} = -r\,\boldsymbol{b}_\xi \quad , \quad \boldsymbol{r}_{BD} = r\,\boldsymbol{b}_\eta$$

Ortsvektor des Punktes B im ortsfesten System $Axyz$:

$$\boldsymbol{r}_B = L_{AB}\left(-\cos(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\xi + \sin(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\eta\right)$$

Winkelgeschwindigkeiten im System $B\xi\eta\zeta$:

$$\boldsymbol{\omega}_A = \omega_A\,\boldsymbol{b}_\zeta \quad , \quad \boldsymbol{\omega}_B = \omega_B\,\boldsymbol{b}_\zeta$$

Geschwindigkeiten im System $B\xi\eta\zeta$:

$$^B\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}_B \times \boldsymbol{r}_{BC} = -\omega_B r\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\xi$$
$$= -\omega_B r\,\boldsymbol{b}_\eta$$

$$^B\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{\omega}_B \times \boldsymbol{r}_{BD} = \omega_B r\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\eta$$
$$= -\omega_B r\,\boldsymbol{b}_\xi$$

Beschleunigungen im System $B\xi\eta\zeta$:

$$^B\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{v}_C = -\omega_B^2 r\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\eta = \omega_B^2 r\,\boldsymbol{b}_\xi$$

$$^B\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\boldsymbol{v}_D = -\omega_B^2 r\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\xi = -\omega_B^2 r\,\boldsymbol{b}_\eta$$

Bewegung des Punktes B:

Punkt B, der Ursprung des bewegten Systems $B\xi\eta\zeta$, bewegt sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_A auf einer Kreisbahn mit Radius L_{AB} um den Punkt A. Damit gilt:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{r}_B = \omega_A L_{AB}\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \left(-\cos(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\xi + \sin(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\eta\right)$$
$$= -\omega_A L_{AB}\left(\cos(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\eta + \sin(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\xi\right)$$

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{v}_B = -\omega_A^2 L_{AB}\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \left(\cos(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\eta + \sin(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\xi\right)$$
$$= \omega_A^2 L_{AB}\left(\cos(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\xi - \sin(\alpha)\,\boldsymbol{b}_\eta\right)$$

Absolutgeschwindigkeiten:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{r}_{BC} + {}^B\boldsymbol{v}_C$$
$$= -\omega_A L_{AB} \left(\sin(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\xi + \cos(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\eta \right) - \omega_A r\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\xi - \omega_B r\, \boldsymbol{b}_\eta$$
$$= -\omega_A L_{AB} \sin(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\xi - \left[\omega_A L_{AB} \cos(\alpha) + \left(\omega_A + \omega_B \right) r \right] \boldsymbol{b}_\eta$$

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_B + \omega_A \times \boldsymbol{r}_{BD} + {}^B\boldsymbol{v}_D$$
$$= -\omega_A L_{AB} \left(\sin(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\xi + \cos(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\eta \right) + \omega_A r\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\eta - \omega_B r\, \boldsymbol{b}_\xi$$
$$= -\left[\omega_A L_{AB} \sin(\alpha) + \left(\omega_A + \omega_B \right) r \right] \boldsymbol{b}_\xi - \omega_A L_{AB} \cos(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\eta$$

Absolutbeschleunigungen:

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{\omega}_A \times \left(\boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{r}_{BC} \right) + {}^B\boldsymbol{a}_C + 2\, \boldsymbol{\omega}_A \times {}^B\boldsymbol{v}_C$$
$$= \omega_A^2 L_{AB} \left(\cos(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\xi - \sin(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\eta \right) - \omega_A^2 r\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \left(\boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\xi \right) + \omega_B^2 r\, \boldsymbol{b}_\xi - 2\, \omega_A \omega_B r\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\eta$$
$$= \left(\omega_A^2 L_{AB} \cos(\alpha) + \omega_B^2 r \right) \boldsymbol{b}_\xi - \omega_A^2 L_{AB} \sin(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\eta - \left(\omega_A^2 r + 2\, \omega_A \omega_B r \right) \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\eta$$
$$= \left[\omega_A^2 L_{AB} \cos(\alpha) + \left(\omega_A + \omega_B \right)^2 r \right] \boldsymbol{b}_\xi - \omega_A^2 L_{AB} \sin(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\eta$$

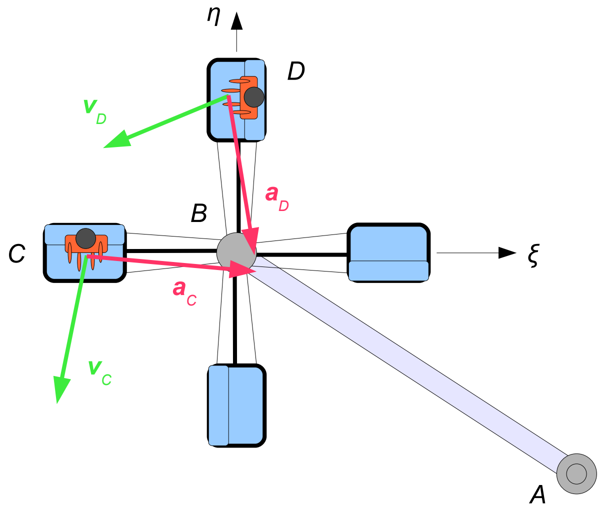
$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{\omega}_A \times \left(\boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{r}_{BD} \right) + {}^B\boldsymbol{a}_D + 2\, \boldsymbol{\omega}_A \times {}^B\boldsymbol{v}_D$$
$$= \omega_A^2 L_{AB} \left(\cos(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\xi - \sin(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\eta \right) + \omega_A^2 r\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \left(\boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\eta \right) - \omega_B^2 r\, \boldsymbol{b}_\eta - 2\, \omega_A \omega_B r\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\xi$$
$$= \omega_A^2 L_{AB} \cos(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\xi - \left(\omega_A^2 L_{AB} \sin(\alpha) + \omega_B^2 r \right) \boldsymbol{b}_\eta - \left(\omega_A^2 + 2\, \omega_A \omega_B \right) r\, \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\xi$$
$$= \omega_A^2 L_{AB} \cos(\alpha)\, \boldsymbol{b}_\xi - \left[\omega_A^2 L_{AB} \sin(\alpha) + \left(\omega_A + \omega_B \right)^2 r \right] \boldsymbol{b}_\eta$$

Zahlenwerte:

$$v_{C\xi} = -1 \cdot 7{,}5\, m/s \cdot \sin(30°) = -3{,}750\, m/s$$
$$v_{C\eta} = -\left(7{,}5\, m/s \cdot \cos(30°) + 3 \cdot 4\, m/s \right) = -18{,}495\, m/s$$
$$v_C = \sqrt{v_{C\xi}^2 + v_{C\eta}^2} = 18{,}871\, m/s$$
$$v_{D\xi} = -\left(7{,}5\, m/s \cdot \sin(30°) + 12\, m/s \right) = -15{,}750\, m/s$$
$$v_{D\eta} = -7{,}5\, m/s \cdot \cos(30°) = -6{,}495\, m/s$$
$$v_D = \sqrt{v_{D\xi}^2 + v_{D\eta}^2} = 17{,}037\, m/s$$
$$a_{C\xi} = 1^2 \cdot 7{,}5\, m/s^2 \cdot \cos(30°) + 3^2 \cdot 4\, m/s^2 = 42{,}495\, m/s^2 = 4{,}33\, g$$
$$a_{C\eta} = -7{,}5\, m/s^2 \sin(30°) = -3{,}750\, m/s = -0{,}38\, g$$
$$a_C = 42{,}660\, m/s^2 = 4{,}35\, g$$
$$a_{D\xi} = 7{,}5\, m/s^2 \cdot \cos(30°) = 6{,}495\, m/s^2 = 0{,}66\, g$$

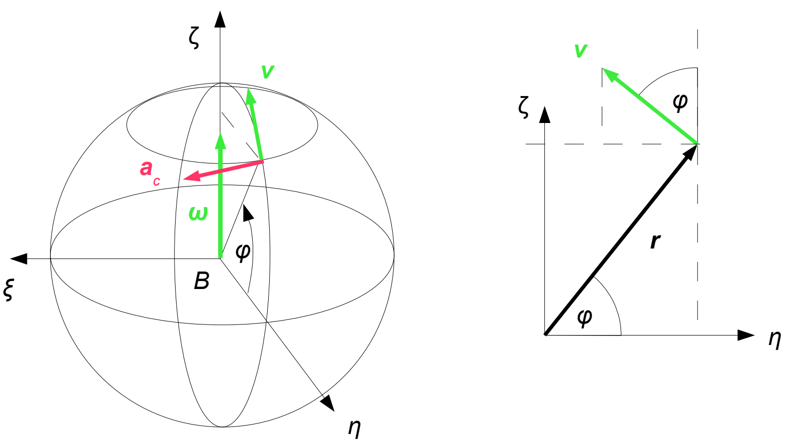
$$a_{D\eta} = -\left(7{,}5\,m/s^2 \cdot \sin(30°) + 36\,m/s^2\right) = -39{,}750\,m/s^2 = -4{,}05\,g$$

$$a_D = 40{,}277\,m/s^2 = 4{,}11\,g$$



Aufgabe 4:

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde beträgt



$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\,s} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,s^{-1} \quad .$$

Im erdfesten $B\xi\eta\zeta$ -System lautet der Geschwindigkeitsvektor

$$\boldsymbol{v} = v\left(-\sin(\phi)\,\boldsymbol{b}_\eta + \cos(\phi)\,\boldsymbol{b}_\zeta\right)$$

und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{b}_\zeta \quad .$$

Damit folgt für die Coriolisbeschleunigung

$$\boldsymbol{a_c}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=2\,\omega\,v\,\boldsymbol{b_\zeta}\times\left(-\sin(\phi)\,\boldsymbol{b_\eta}+\cos(\phi)\,\boldsymbol{b_\zeta}\right)=2\,\omega\,v\sin(\phi)\,\boldsymbol{b_\xi}$$

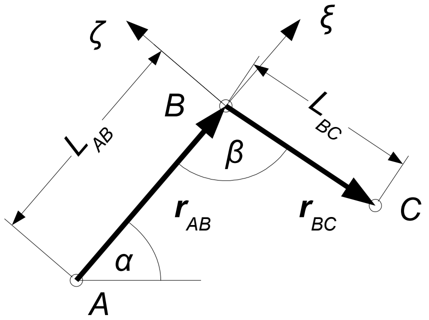
<u>Zahlenwert:</u>

$$a_c=2\cdot 7{,}27\cdot 10^{-5}s^{-1}\cdot 1\,m/s\cdot\sin(\phi)=14{,}54\cdot 10^{-5}m/s^2\cdot\sin(\phi)=1{,}48\cdot 10^{-5}g\cdot\sin(\phi)$$

Die Coriolisbeschleunigung hat ihr Maximum an den Polen. Das Maximum beträgt $1{,}48\cdot 10^{-6}g$.

Aufgabe 5:

Für die Ortsvektoren gilt:



$$\boldsymbol{r_{AB}}=L_{AB}\,\boldsymbol{b_\xi}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r_{BC}}&=L_{BC}\left(\cos(180°-\beta)\,\boldsymbol{b_\xi}-\sin(180°-\beta)\,\boldsymbol{b_\zeta}\right)\\&=-L_{BC}\left(\cos(\beta)\,\boldsymbol{b_\xi}+\sin(\beta)\,\boldsymbol{b_\zeta}\right)\end{aligned}$$

Die Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten lauten

$\boldsymbol{\omega_A}=\omega_A\,\boldsymbol{b_\eta}$ und $\boldsymbol{\omega_B}=\omega_B\,\boldsymbol{b_\eta}$.

Für den Geschwindigkeitsvektor ***v*** des Baggers gilt:

$$\boldsymbol{v}=v\left(\cos(\alpha)\,\boldsymbol{b_\xi}-\sin(\alpha)\,\boldsymbol{b_\zeta}\right)$$

Für einen mit dem System *Bξηζ* mitbewegten Beobachter bewegt sich der Punkt *C* mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_B auf einer Kreisbahn um den Punkt *B*. Für diesen Beobachter hat der Punkt *C* daher die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}{}^B\boldsymbol{v_C}&=\boldsymbol{\omega_B}\times\boldsymbol{r_{BC}}=-\omega_B L_{BC}\left(\cos(\beta)\,\boldsymbol{b_\eta}\times\boldsymbol{b_\xi}+\sin(\beta)\,\boldsymbol{b_\eta}\times\boldsymbol{b_\zeta}\right)\\&=\omega_B L_{BC}\left(\cos(\beta)\,\boldsymbol{b_\zeta}-\sin(\beta)\,\boldsymbol{b_\xi}\right)\end{aligned}\ .$$

Die Relativbeschleunigung ist gleich der Zentripetalbeschleunigung, d.h.

$$\begin{aligned}{}^B\boldsymbol{a_C}&=\boldsymbol{\omega_B}\times{}^B\boldsymbol{v_C}=\omega_B^2 L_{BC}\left(\cos(\beta)\,\boldsymbol{b_\eta}\times\boldsymbol{b_\zeta}-\sin(\beta)\,\boldsymbol{b_\eta}\times\boldsymbol{b_\xi}\right)\\&=\omega_B^2 L_{BC}\left(\cos(\beta)\,\boldsymbol{b_\xi}+\sin(\beta)\,\boldsymbol{b_\zeta}\right)\end{aligned}\ .$$

Punkt *B* bewegt sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_A um Punkt *A*, der sich selbst mit der konstanten Geschwindigkeit *v* bewegt. Daher gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v_B}&=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega_A}\times\boldsymbol{r_{AB}}=v\left(\cos(\alpha)\,\boldsymbol{b_\xi}-\sin(\alpha)\,\boldsymbol{b_\zeta}\right)+\omega_A L_{AB}\,\boldsymbol{b_\eta}\times\boldsymbol{b_\xi}\\&=v\cos(\alpha)\,\boldsymbol{b_\xi}-\left(v\sin(\alpha)+\omega_A L_{AB}\right)\boldsymbol{b_\zeta}\end{aligned}\ .$$

Die Beschleunigung von Punkt *B* ist gleich der Zentripetalbeschleunigung, d.h.

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{\omega}_A\times\left(\boldsymbol{\omega}_A\times\boldsymbol{r}_{AB}\right)=\omega_A^2 L_{AB}\boldsymbol{b}_\eta\times\left(\boldsymbol{b}_\eta\times\boldsymbol{b}_\xi\right)=-\omega_A^2 L_{AB}\boldsymbol{b}_\eta\times\boldsymbol{b}_\zeta=-\omega_A^2 L_{AB}\boldsymbol{b}_\xi \quad .$$

Damit berechnet sich die Absolutgeschwindigkeit von Punkt *C* zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_C &= \boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{\omega}_A\times\boldsymbol{r}_{BC}+{}^B\boldsymbol{v}_C\\
&= v\cos(\alpha)\boldsymbol{b}_\xi-\left(v\sin(\alpha)+\omega_A L_{AB}\right)\boldsymbol{b}_\zeta\\
&\quad -\omega_A L_{BC}\boldsymbol{b}_\eta\times\left(\cos(\beta)\boldsymbol{b}_\xi+\sin(\beta)\boldsymbol{b}_\zeta\right)+\omega_B L_{BC}\left(\cos(\beta)\boldsymbol{b}_\zeta-\sin(\beta)\boldsymbol{b}_\xi\right)\\
&= v\cos(\alpha)\boldsymbol{b}_\xi-\left(v\sin(\alpha)+\omega_A L_{AB}\right)\boldsymbol{b}_\zeta\\
&\quad +\left(\omega_A+\omega_B\right)L_{BC}\cos(\beta)\boldsymbol{b}_\zeta-\left(\omega_A+\omega_B\right)L_{BC}\sin(\beta)\boldsymbol{b}_\xi\\
&= \left(v\cos(\alpha)-\left(\omega_A+\omega_B\right)L_{BC}\sin\beta\right)\boldsymbol{b}_\xi\\
&\quad +\left(\left(\omega_A+\omega_B\right)L_{BC}\cos(\beta)-v\sin(\alpha)-\omega_A L_{AB}\right)\boldsymbol{b}_\zeta
\end{aligned}$$

Für die Absolutbeschleunigung von Punkt *C* folgt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_C &= \boldsymbol{a}_B+\boldsymbol{\omega}_A\times\left(\boldsymbol{\omega}_A\times\boldsymbol{r}_{BC}\right)+{}^B\boldsymbol{a}_C+2\boldsymbol{\omega}_A\times{}^B\boldsymbol{v}_C\\
&= -\omega_A^2 L_{AB}\boldsymbol{b}_\xi-\omega_A^2 L_{BC}\boldsymbol{b}_\eta\times\left(\boldsymbol{b}_\eta\times\left(\cos(\beta)\boldsymbol{b}_\xi+\sin(\beta)\boldsymbol{b}_\zeta\right)\right)\\
&\quad +\omega_B^2 L_{BC}\left(\cos(\beta)\boldsymbol{b}_\xi+\sin(\beta)\boldsymbol{b}_\zeta\right)\\
&\quad +2\omega_A\boldsymbol{b}_\eta\times\omega_B L_{BC}\left(\cos(\beta)\boldsymbol{b}_\zeta-\sin(\beta)\boldsymbol{b}_\xi\right)\\
&= -\omega_A^2 L_{AB}\boldsymbol{b}_\xi-\omega_A^2 L_{BC}\boldsymbol{b}_\eta\times\left(-\cos(\beta)\boldsymbol{b}_\zeta+\sin(\beta)\boldsymbol{b}_\xi\right)\\
&\quad +\omega_B^2 L_{BC}\left(\cos(\beta)\boldsymbol{b}_\xi+\sin(\beta)\boldsymbol{b}_\zeta\right)\\
&\quad +2\omega_A\omega_B L_{BC}\left(\cos(\beta)\boldsymbol{b}_\xi+\sin(\beta)\boldsymbol{b}_\zeta\right)\\
&= \left(-\omega_A^2 L_{AB}+\omega_A^2 L_{BC}\cos(\beta)+\omega_B^2 L_{BC}\cos(\beta)+2\omega_A\omega_B L_{BC}\cos(\beta)\right)\boldsymbol{b}_\xi\\
&\quad +\left(\omega_A^2 L_{BC}\sin\beta+\omega_B^2 L_{BC}\sin(\beta)+2\omega_A\omega_B L_{BC}\sin(\beta)\right)\boldsymbol{b}_\zeta
\end{aligned}$$

Zahlenwerte:

$$\left(\omega_A+\omega_B\right)L_{BC}=\left(0{,}08+0{,}15\right)s^{-1}\cdot 2\,m=0{,}46\,m/s$$

$$v_{C\xi}=0{,}5\,m/s\cdot\cos(40°)-0{,}46\,m/s\cdot\sin(100°)=\underline{-0{,}07000\,m/s}$$

$$\begin{aligned}
v_{C\zeta}&=0{,}46\,m/s\cdot\cos(100°)-0{,}5\,m/s\cdot\sin(40°)-0{,}08\,s^{-1}\cdot 3\,m\\
&=\underline{-0{,}6413\,m/s}
\end{aligned}$$

$$\left(\omega_A^2+\omega_B^2\right)L_{BC}=\left(0{,}08^2+0{,}15^2\right)s^{-2}\cdot 2\,m=0{,}0578\,m/s^2$$

$$\begin{aligned}
a_{C\xi}&=-0{,}08^2 s^{-2}\cdot 3\,m+0{,}0578\,m/s^2\cdot\cos(100°)+2\cdot 0{,}08\cdot 0{,}15\,s^{-2}\cdot 2\,m\cdot\cos(100°)\\
&=\underline{-0{,}03757\,m/s^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{C\zeta}&=0{,}0578\,m/s^2\cdot\sin(100°)+2\cdot 0{,}08\cdot 0{,}15\,s^{-2}\cdot 2\,m\cdot\sin(100°)\\
&=\underline{0{,}1042\,m/s^2}
\end{aligned}$$