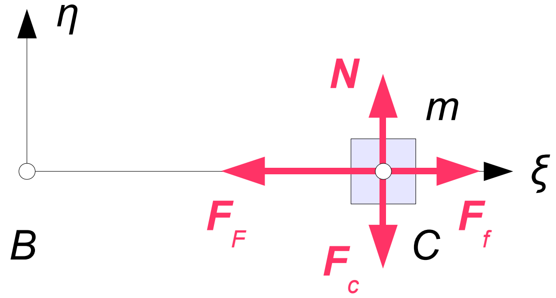
Starrkörperdynamik Lösungsblatt 1.2

Aufgabe 1:

a) Bewegung der Masse:

Im rotierenden Bezugssystem lautet die Bewegungsgleichung der Masse:



$$m\,\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F}_F + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_f + \boldsymbol{F}_c$$

Dabei ist $\boldsymbol{a}_r$ die Relativbeschleunigung der Masse,

$$\boldsymbol{F}_F = -c\left(\boldsymbol{r}_{BC} - \boldsymbol{r}_{BC0}\right)$$

die Federkraft, $\boldsymbol{N}$ die Kontaktkraft von der Stange auf die Masse,

$$\boldsymbol{F}_f = -m\,\boldsymbol{a}_f$$

die Führungskraft, und

$$\boldsymbol{F}_c = -m\,\boldsymbol{a}_c$$

die Corioliskraft.

Da Punkt *B* ortsfest ist und sich das körperfeste Koordinatensystem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht, stimmt die Führungsbeschleunigung mit der Zentripetalbeschleunigung überein:

$$\boldsymbol{a}_f = \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BC}\right)$$

Die Coriolisbeschleunigung berechnet sich zu

$$\boldsymbol{a}_c = 2\,\boldsymbol{\omega} \times {}^B\boldsymbol{v}_C \quad .$$

Im körperfesten Koordinatensystem gilt für die benötigten Vektoren:

$$\boldsymbol{r}_{BC} = \xi_C\,\boldsymbol{b}_\xi \quad , \quad \boldsymbol{r}_{BC0} = L\,\boldsymbol{b}_\xi \quad , \quad \boldsymbol{\omega} = \Omega\,\boldsymbol{b}_\zeta$$

$${}^B\boldsymbol{v}_C = \frac{{}^B d\,\boldsymbol{r}_{BC}}{dt} = \dot{\xi}_C\,\boldsymbol{b}_\xi \quad , \quad \boldsymbol{a}_r = {}^B\boldsymbol{a}_C = \ddot{\xi}_C\,\boldsymbol{b}_\xi$$

Damit berechnet sich die Zentripetalbeschleunigung zu

$$\boldsymbol{a}_f = \Omega^2\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \left(\boldsymbol{b}_\zeta \times \xi_C\,\boldsymbol{b}_\xi\right) = \Omega^2\,\xi_C\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\eta = -\Omega^2\,\xi_C\,\boldsymbol{b}_\xi \quad .$$

Für die Coriolisbeschleunigung folgt

$$\boldsymbol{a}_c = 2\,\Omega\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \dot{\xi}_C\,\boldsymbol{b}_\xi = 2\,\Omega\,\dot{\xi}_C\,\boldsymbol{b}_\eta \quad .$$

Mit $\boldsymbol{N} = N\,\boldsymbol{b}_\eta$ lautet die Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{\xi}_C\,\boldsymbol{b}_\xi = -c\left(\xi_C - L\right)\boldsymbol{b}_\xi + N\,\boldsymbol{b}_\eta + m\,\Omega^2\,\xi_C\,\boldsymbol{b}_\xi - 2\,m\,\Omega\,\dot{\xi}_C\,\boldsymbol{b}_\eta \quad .$$

Daraus folgen die beiden skalaren Gleichungen

$$\ddot{\xi}_C + \left(\frac{c}{m} - \Omega^2\right)\xi_C = \frac{c}{m}\,L$$

und

$$0 = N - 2\,m\,\Omega\,\dot{\xi}_C \quad .$$

Mit $\omega_0 = c/m$ lautet die erste Gleichung: $\ddot{\xi}_C + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\xi_C = \omega^2\,L$

Es können drei Fälle auftreten:

<u>Fall 1:</u> $\Omega^2 < \omega_0^2$

Die Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\xi_C(t) = A\sin(\omega\,t) + B\cos(\omega\,t) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,L$$

mit $\omega^2 = \omega_0^2 - \Omega^2$.

Die Masse führt eine harmonische Schwingung um die Ruhelage

$$\xi_{C0} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 L$$

durch. Die Konstanten *A* und *B* werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Für die Kontaktkraft gilt

$$N(t) = 2m\,\Omega\,\dot{\xi}_C = 2\,m\,\Omega\,\omega\left(A\cos(\omega\,t) - B\sin(\omega\,t)\right) \quad .$$

<u>Fall 2:</u> $\Omega^2 = \omega_0^2$

Die Gleichung $\ddot{\xi}_C = \omega_0^2\,L$ hat die allgemeine Lösung

$$\xi_C(t) = \omega_0^2\,L\,t^2 + A\,t + B \quad ,$$

wobei die Konstanten *A* und *B* wieder durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Die Auslenkung wächst quadratisch mit der Zeit an.

Für die Kontaktkraft gilt

$$N(t) = 4\,m\,\Omega\,\omega_0^2\,L\,t \quad .$$

Fall 3: $\Omega^2 > \omega_0^2$

Die Gleichung lautet $\ddot{\xi}_C - \alpha^2 \xi_C = \omega_0^2 L$ mit $\alpha^2 = \Omega^2 - \omega_0^2 > 0$. Sie hat die allgemeine Lösung

$$\xi_C(t) = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t} - \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} L \quad .$$

Die Auslenkung wächst exponentiell mit der Zeit an.

Für die Kontaktkraft gilt

$$N(t) = 2 m \Omega \alpha \left(A e^{\alpha t} - B e^{-\alpha t} \right) \quad .$$