Starrkörperdynamik Lösungsblatt 2.1

Aufgabe 1:

a) <u>Drehtensor:</u>

Für den exakten Drehtensor gilt:

$$[\boldsymbol{R}]_O=\begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)-\cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)+\sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)+\cos(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)-\sin(\phi)\cos(\psi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Für die gegebenen Winkel berechnet sich die Matrix zu

$$[\boldsymbol{R}]_O=\begin{bmatrix} 0{,}9960 & -0{,}01440 & 0{,}08770 \\ 0{,}01739 & 0{,}9993 & -0{,}03337 \\ -0{,}08716 & 0{,}03477 & 0{,}9956 \end{bmatrix} .$$

Die linearisierte Näherungsformel lautet

$$[\boldsymbol{R}^L]_O=\begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} ,$$

wobei die Winkel im Bogenmaß eingegeben werden müssen. Für die gegebenen Winkel ergibt sich

$$[\boldsymbol{R}^L]_O=\begin{bmatrix} 1 & -0{,}01745 & 0{,}08727 \\ 0{,}01745 & 1 & -0{,}03490 \\ -0{,}08727 & 0{,}03490 & 1 \end{bmatrix} .$$

b) <u>Koordinaten:</u>

Die Koordinaten berechnen sich aus

$$[\boldsymbol{r}_{BP}]_O=[\boldsymbol{R}]_O[\boldsymbol{r}_{BP}]_B \quad \text{bzw.} \quad [\boldsymbol{r}^L_{BP}]_O=[\boldsymbol{R}^L]_O[\boldsymbol{r}_{BP}]_B$$

zu

$$[\boldsymbol{r}_{BP}]_O=\begin{bmatrix} 0{,}9960 & -0{,}01440 & 0{,}08770 \\ 0{,}01739 & 0{,}9993 & -0{,}03337 \\ -0{,}08716 & 0{,}03477 & 0{,}9956 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} m=\begin{bmatrix} 1{,}128 \\ 2{,}949 \\ 2{,}008 \end{bmatrix} m$$

bzw.

$$\left[\boldsymbol{r}^L_{BP} \right]_O = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}01745 & 0{,}08727 \\ 0{,}01745 & 1 & -0{,}03490 \\ -0{,}08727 & 0{,}03490 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 1{,}122 \\ 2{,}948 \\ 2{,}017 \end{bmatrix} m \quad .$$

Aufgabe 2:

a) <u>Beziehungen für die Vertikalverschiebungen:</u>

Für den Verschiebungsvektor eines der vier Punkte gilt

$$\boldsymbol{u}_P = \boldsymbol{u}_S + \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{r}_{SP} - \boldsymbol{r}_{SP} = \boldsymbol{u}_S + \left(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I} \right) \boldsymbol{r}_{SP} , \quad P = A, B, C, D \quad .$$

Dabei ist $\boldsymbol{u}_S$ die Verschiebung des Schwerpunkts.

Da die Winkel als klein vorausgesetzt werden, kann der linearisierte Drehtensor $\boldsymbol{R}^L$ verwendet werden:

$$\begin{bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_S \\ v_S \\ w_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\psi & \theta \\ \psi & 0 & -\phi \\ -\theta & \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_P \\ \eta_P \\ \zeta_P \end{bmatrix}$$

Für die Vertikalverschiebungen folgt

$$w_P = w_S - \theta \xi_P + \phi \eta_P , \quad P = A, B, C, D \quad ,$$

wenn Verschiebungen in Richtung der positiven *z*-Achse positiv sind.

b) <u>Verschiebungen infolge der Gewichtskraft:</u>

Am frei geschnittenen starren Körper greifen die vier Federkräfte und die Gewichtskraft an. Da die Winkel klein sind, kann das Gleichgewicht am nicht ausgelenkten System betrachtet werden.

Gleichgewicht:

$\sum F_z = 0$:

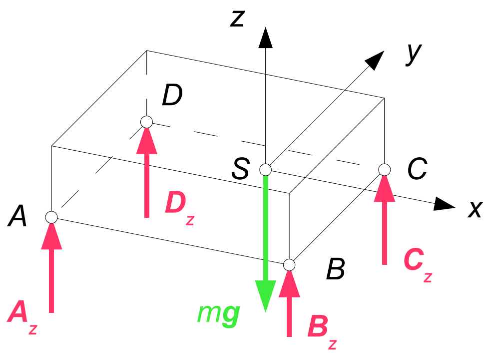
$$A_z + B_z + C_z + D_z - m\,g = 0$$

$\sum M_{(S)x} = 0$:

$$\eta_A A_z + \eta_B B_z + \eta_C C_z + \eta_D D_z = 0$$

$\sum M_{(S)y} = 0$:

$$-\xi_A A_z - \xi_B B_z - \xi_C C_z - \xi_D D_z = 0$$



Federgesetze:

$$A_z = -c\,w_A = c\left(\theta \xi_A - \phi \eta_A - w_S \right) \text{ usw.}$$

Einsetzen der Federgesetze in die Gleichgewichtsbedingungen liefert drei

Gleichungen für die drei unbekannten Größen w_S , θ und ϕ :

$$\sum F_x=0 \;:\; c\left[\theta\left(\xi_A+\xi_B+\xi_C+\xi_D\right)-\phi\left(\eta_A+\eta_B+\eta_C+\eta_D\right)-4\,w_S\right]=m\,g$$

$$\sum M_{(S)x}=0 \;:\; c\left[\theta\left(\xi_A\eta_A+\xi_B\eta_B+\xi_C\eta_C+\xi_D\eta_D\right)-\phi\left(\eta_A^2+\eta_B^2+\eta_C^2+\eta_D^2\right)\right.$$
$$\left.-\left(\eta_A+\eta_B+\eta_C+\eta_D\right)w_S\right]=0$$

$$\sum M_{(S)y}=0 \;:\; -c\left[\theta\left(\xi_A^2+\xi_B^2+\xi_C^2+\xi_D^2\right)-\phi\left(\xi_A\eta_A+\xi_B\eta_B+\xi_C\eta_C+\xi_D\right)\right.$$
$$\left.-\left(\xi_A+\xi_B+\xi_C+\xi_D\right)w_S\right]=0$$

Mit

$$\xi_A+\xi_B+\xi_C+\xi_D=-2\,m \quad , \quad \eta_A+\eta_B+\eta_C+\eta_D=1\,m$$

$$\xi_A\eta_A+\xi_B\eta_B+\xi_C\eta_C+\xi_D\eta_D=-0{,}5\,m^2 \quad ,$$

$$\xi_A^2+\xi_B^2+\xi_C^2+\xi_D^2=10\,m^2 \quad , \quad \eta_A^2+\eta_B^2+\eta_C^2+\eta_D^2=12{,}5\,m^2 \quad \text{und}$$

$$\frac{m\,g}{c}=\frac{1500\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2}{200\cdot 10^3\,N/m}=0{,}073575\,m$$

lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcccrcrcrcl}
-2\,m & \theta & - & 1\,m & \phi & - & 4 & w_S & = & 0{,}073575\,m \\
-0{,}5\,m^2 & \theta & - & 12{,}5\,m^2 & \phi & - & 1\,m & w_S & = & 0\,m^2 \\
10\,m^2 & \theta & + & 0{,}5\,m^2 & \phi & + & 2\,m & w_S & = & 0\,m^2
\end{array}$$

Es hat die Lösung:

$$\theta=0{,}0040875\,,\quad \phi=0{,}0015015\,,\quad w_S=-0{,}0208129\,m$$

Aufgabe 3:

a) <u>Formeln:</u>

Mit $\dot\phi=\dot\theta=0$ und $\dot\psi=\Omega$ gilt:

$$[\boldsymbol{\omega}]_O=\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\Omega t)\cos(\theta_0) & -\sin(\Omega t) & 0\\ \sin(\Omega t)\cos(\theta_0) & \cos(\Omega t) & 0\\ -\sin(\theta_0) & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\ \Omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \Omega\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{\omega}]_B=\begin{bmatrix}\omega_\xi\\ \omega_\eta\\ \omega_\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin(\theta_0)\\ 0 & \cos(\phi_0) & \sin(\phi_0)\cos(\theta_0)\\ 0 & -\sin(\phi_0) & \cos(\phi_0)\cos(\theta_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\ \Omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin(\theta_0)\\ \sin(\phi_0)\cos(\theta)_0\\ \cos(\phi_0)\cos(\theta_0)\end{bmatrix}\Omega$$

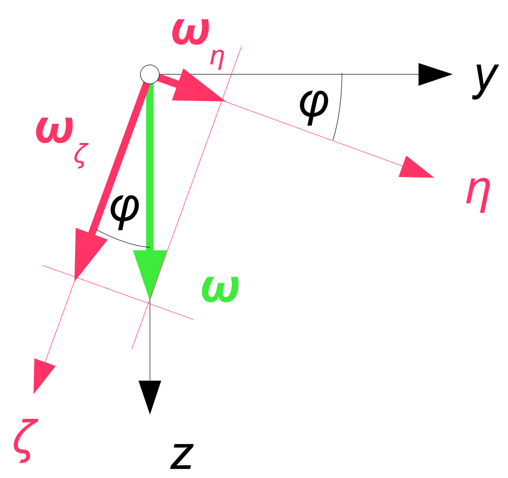
b) <u>Zahlenwerte:</u>

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$\omega_z = \Omega = 0{,}2\, s^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(20°) \\ \cos(20°) \end{bmatrix} \cdot 0.2\, s^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}06840 \\ 0{,}1879 \end{bmatrix} s^{-1}$$

Graphische Darstellung:



Aufgabe 4:

Für die Komponenten $[\boldsymbol{\omega}]_O$ des Vektors der Winkelgeschwindigkeiten im ortsfesten Koordinatensystem gilt:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\omega}]_O &= [\boldsymbol{\omega}_\phi]_O + [\boldsymbol{\omega}_\theta]_O + [\boldsymbol{\omega}_\psi]_O \\ &= [\boldsymbol{T}]_{O1}[\boldsymbol{T}]_{12}[\boldsymbol{\omega}_\phi]_2 + [\boldsymbol{T}]_{O1}[\boldsymbol{\omega}_\theta]_1 + [\boldsymbol{\omega}_\psi]_O\end{aligned}$$

Die Transformation in das körperfeste Koordinatensystem lautet:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\omega}]_B &= [\boldsymbol{T}]_{OB}^T[\boldsymbol{\omega}]_O = [\boldsymbol{T}]_{2B}^T[\boldsymbol{T}]_{12}^T[\boldsymbol{T}]_{O1}^T[\boldsymbol{\omega}]_O \\ &= [\boldsymbol{T}]_{2B}^T\left([\boldsymbol{\omega}_\phi]_2 + [\boldsymbol{T}]_{12}^T[\boldsymbol{\omega}_\theta]_1 + [\boldsymbol{T}]_{12}^T[\boldsymbol{T}]_{O1}^T[\boldsymbol{\omega}_\psi]_O\right)\end{aligned}$$

Für die einzelnen Summanden in der Klammer gilt:

$$[\boldsymbol{\omega}_\phi]_2 = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{T}]_{12}^T[\omega_\theta]_1=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dot\theta\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \dot\theta\\ 0\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{T}]_{O1}^T[\boldsymbol{\omega}_\psi]_O=\begin{bmatrix}\cos(\psi) & \sin(\psi) & 0\\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot\psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot\psi\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{T}]_{12}^T[\boldsymbol{T}]_{O1}^T[\boldsymbol{\omega}_\psi]_O=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot\psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin(\theta)\dot\psi\\ 0\\ \cos(\theta)\dot\psi\end{bmatrix}$$

Damit folgt:

$$[\boldsymbol{\omega}]_B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\phi-\sin(\theta)\dot\psi\\ \dot\theta\\ \cos(\theta)\dot\psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot\phi-\sin(\theta)\dot\psi\\ \cos(\phi)\dot\theta+\sin(\phi)\cos(\theta)\dot\psi\\ -\sin(\phi)\dot\theta+\cos(\phi)\cos(\theta)\dot\psi\end{bmatrix}$$

Ergebnis:

$$[\boldsymbol{\omega}]_B=\begin{bmatrix}\omega_\xi\\ \omega_\eta\\ \omega_\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin(\theta)\\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta)\\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\phi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix}$$

Aufgabe 5:

Transformation der Matrix $[\boldsymbol{R}_\theta]_1$ in das ortsfeste Koordinatensystem:

$$[\boldsymbol{R}_\theta]_O=[\boldsymbol{T}]_{O1}[\boldsymbol{R}_\theta]_1[\boldsymbol{T}]_{O1}^T=[\boldsymbol{R}_\psi]_O[\boldsymbol{R}_\theta]_1[\boldsymbol{R}_\psi]_O^T$$

Transformation der Matrix $[\boldsymbol{R}_\phi]_2$ in das ortsfeste Koordinatensystem:

$$[\boldsymbol{R}_\phi]_O=[\boldsymbol{T}]_{O1}[\boldsymbol{T}]_{12}[\boldsymbol{R}_\phi]_2[\boldsymbol{T}]_{12}^T[\boldsymbol{T}]_{O1}^T=[\boldsymbol{R}_\psi]_O[\boldsymbol{R}_\theta]_1[\boldsymbol{R}_\phi]_2[\boldsymbol{R}_\theta]_1^T[\boldsymbol{R}_\psi]_O^T$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{R}]_O&=\left([\boldsymbol{R}_\psi]_O[\boldsymbol{R}_\theta]_1[\boldsymbol{R}_\phi]_2[\boldsymbol{R}_\theta]_1^T[\boldsymbol{R}_\psi]_O^T\right)\left([\boldsymbol{R}_\psi]_O[\boldsymbol{R}_\theta]_1[\boldsymbol{R}_\psi]_O^T\right)[\boldsymbol{R}_\psi]_O\\ &=[\boldsymbol{R}_\psi]_O[\boldsymbol{R}_\theta]_1[\boldsymbol{R}_\phi]_2[\boldsymbol{R}_\theta]_1^T\left([\boldsymbol{R}_\psi]_O^T[\boldsymbol{R}_\psi]_O\right)[\boldsymbol{R}_\theta]_1\left([\boldsymbol{R}_\psi]_O^T[\boldsymbol{R}_\psi]_O^T\right)\\ &=[\boldsymbol{R}_\psi]_O[\boldsymbol{R}_\theta]_1[\boldsymbol{R}_\phi]_2\left([\boldsymbol{R}_\theta]_1^T[\boldsymbol{R}_\theta]_1\right)\\ &=[\boldsymbol{R}_\psi]_O[\boldsymbol{R}_\theta]_1[\boldsymbol{R}_\phi]_2\end{aligned}$$

Aufgabe 6:

a) Komponenten des Drehtensors:

Die erste Drehung erfolgt um die x-Achse. Sie bildet das ortsfeste Koordinatensystem $Oxyz$ (Index O) auf das Koordinatensystem $Ox_1y_1z_1$ (Index 1) ab. Für den Drehtensor $\boldsymbol{R}_\alpha$ gilt

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \cos(\alpha)\,\boldsymbol{I} + (1-\cos(\alpha))\,\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + \sin(\alpha)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x \quad .$$

Mit

$$[\boldsymbol{e}_x]_O = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x]_O = [\boldsymbol{e}_x]_O[\boldsymbol{e}_x]_O^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad [\tilde{\boldsymbol{e}}_x]_O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt

$$[\boldsymbol{R}_\alpha]_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{T}]_{O1} \quad .$$

Die zweite Drehung erfolgt um die y_1-Achse. Sie bildet das Koordinatensystem $Ox_1y_1z_1$ auf das Koordinatensystem $Ox_2y_2z_2$ (Index 2) ab. Für den Drehtensor $\boldsymbol{R}_\beta$ gilt

$$\boldsymbol{R}_\beta = \cos(\beta)\,\boldsymbol{I} + (1-\cos(\beta))\,\boldsymbol{b}_{1y}\boldsymbol{b}_{1y} + \sin(\beta)\,\tilde{\boldsymbol{b}}_{1y} \quad .$$

Mit

$$[\boldsymbol{b}_{1y}]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{b}_{1y}\boldsymbol{b}_{1y}]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad [\tilde{\boldsymbol{b}}_{1y}]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt

$$[\boldsymbol{R}_\beta]_1 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{T}]_{12} \quad .$$

Die dritte Drehung erfolgt um die z_2-Achse. Sie bildet das Koordinatensystem $Ox_2y_2z_2$ auf das Koordinatensystem $B\xi\eta\zeta$ (Index B) ab. Für den Drehtensor $\boldsymbol{R}_\gamma$ gilt

$$\boldsymbol{R}_\gamma = \cos(\gamma)\,\boldsymbol{I} + (1-\cos(\gamma))\,\boldsymbol{b}_{2z}\boldsymbol{b}_{2z} + \sin(\gamma)\,\tilde{\boldsymbol{b}}_{2z} \quad .$$

Mit

$$[\boldsymbol{b}_{2z}]_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{b}_{2z}\boldsymbol{b}_{2z}]_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad [\tilde{\boldsymbol{b}}_{2z}]_2=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

gilt

$$[\boldsymbol{R}_\gamma]_2=\begin{bmatrix}\cos(\gamma)&-\sin(\gamma)&0\\\sin(\gamma)&\cos(\gamma)&0\\0&0&1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{T}]_{2B}\ .$$

Für den gesamten Drehtensor gilt $[\boldsymbol{R}]_O=[\boldsymbol{T}]_{OB}=[\boldsymbol{T}]_{O1}[\boldsymbol{T}]_{12}[\boldsymbol{T}]_{2B}$, d.h.

$$[\boldsymbol{R}]_O=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)\\0&\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\beta)&0&\sin(\beta)\\0&1&0\\-\sin(\beta)&0&\cos(\beta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\gamma)&-\sin(\gamma)&0\\\sin(\gamma)&\cos(\gamma)&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ .$$

Ausrechnen ergibt

$$[\boldsymbol{R}]_O=\begin{bmatrix}\cos(\beta)\cos(\gamma)&-\cos(\beta)\sin(\gamma)&\sin(\beta)\\\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma)+\cos(\alpha)\sin(\gamma)&-\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)+\cos(\alpha)\cos(\gamma)&-\sin(\alpha)\cos(\beta)\\-\cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma)+\sin(\alpha)\sin(\gamma)&\cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)+\sin(\alpha)\cos(\gamma)&\cos(\alpha)\cos(\beta)\end{bmatrix}\ .$$

b) <u>Näherung für kleine Winkel:</u>

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{R}^L]_O&=\begin{bmatrix}1&-\gamma&\beta\\\gamma&1&-\alpha\\-\beta&\alpha&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\alpha+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\beta+\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\gamma\\&=[\boldsymbol{I}]_O+[\tilde{\boldsymbol{e}}_x]_O\alpha+[\tilde{\boldsymbol{e}}_y]\beta+[\tilde{\boldsymbol{e}}_z]\gamma\end{aligned}$$

Für kleine Winkel stimmen die Kardanwinkel mit den Euler-Winkeln überein:

$$\alpha=\phi,\quad \beta=\theta,\quad \psi=\gamma$$

c) <u>Komponenten der Winkelgeschwindigkeit:</u>

Wie bei den Euler-Winkeln gilt: $[\boldsymbol{\omega}]_B=[\boldsymbol{\omega}_\alpha]_B+[\boldsymbol{\omega}_\beta]_B+[\boldsymbol{\omega}_\gamma]_B$

Bekannt sind:

$$[\boldsymbol{\omega}_\alpha]_O=[\boldsymbol{\omega}_\alpha]_1=\begin{bmatrix}\dot\alpha\\0\\0\end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{\omega}_\beta]_1=[\boldsymbol{\omega}_\beta]_2=\begin{bmatrix}0\\\beta\\0\end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{\omega}_\gamma]_2=[\boldsymbol{\omega}_\gamma]_B=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot\gamma\end{bmatrix}$$

Transformation von $[\boldsymbol{\omega}_\beta]_2$ in das Koordinatensystem *Bξηζ*:

$$\left[\boldsymbol{\omega}_\beta\right]_B=\left[\boldsymbol{T}\right]_{2B}^T\left[\boldsymbol{\omega}_\beta\right]_2=\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0\\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dot\beta\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin(\gamma)\\ \cos(\gamma)\\ 0\end{bmatrix}\dot\beta$$

Transformation von $\left[\boldsymbol{\omega}_\alpha\right]_1$ in das Koordinatensystem *Bξηζ*:

$$\left[\boldsymbol{\omega}_\alpha\right]_2=\left[\boldsymbol{T}\right]_{12}^T\left[\boldsymbol{\omega}_\alpha\right]_1=\begin{bmatrix}\cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\beta)\\ 0\\ \sin(\beta)\end{bmatrix}\dot\alpha$$

$$\left[\boldsymbol{\omega}_\alpha\right]_B=\left[\boldsymbol{T}\right]_{2B}^T\left[\boldsymbol{\omega}_\alpha\right]_2=\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0\\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\beta)\\ 0\\ \sin(\beta)\end{bmatrix}\dot\alpha=\begin{bmatrix}\cos(\gamma)\cos(\beta)\\ -\sin(\gamma)\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{bmatrix}\dot\alpha$$

Damit gilt:

$$\left[\boldsymbol{\omega}\right]_B=\begin{bmatrix}\omega_\xi\\ \omega_\eta\\ \omega_\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\beta)\cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0\\ -\cos(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0\\ \sin(\beta) & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{bmatrix}$$

Für kleine Winkel gilt die Näherung

$$\begin{bmatrix}\omega_\xi\\ \omega_\eta\\ \omega_\zeta\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & \gamma & 0\\ -\gamma & 1 & 0\\ \beta & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{bmatrix}\quad .$$

d) <u>Umrechnung der Winkel:</u>

Die Komponenten des Drehtensors müssen für beide Arten von Winkel gleich sein:

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)-\cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)+\sin(\phi)\sin(\psi)\\ \cos(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)+\cos(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)-\sin(\phi)\cos(\psi)\\ -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\cos(\beta)\cos(\gamma) & -\cos(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\beta)\\ \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma)+\cos(\alpha)\sin(\gamma) & -\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)+\cos(\alpha)\cos(\gamma) & -\sin(\alpha)\cos(\beta)\\ -\cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma)+\sin(\alpha)\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)+\sin(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\cos(\beta)\end{bmatrix}$$

<u>Berechnung der Kardanwinkel aus den Euler-Winkeln:</u>

Durch Vergleich von Element (1, 3) der Matrix folgt:

$$\sin(\beta)=\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)+\sin(\phi)\sin(\psi)$$

Durch Vergleich von Element (1, 1) der Matrix folgt:

$$\cos(\gamma)=\frac{1}{\cos(\beta)}\cos(\theta)\cos(\psi)$$

Durch Vergleich von Element (3, 3) der Matrix folgt:

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{\cos(\beta)}\cos(\phi)\cos(\theta)$$

Berechnung der Euler-Winkel aus den Kardanwinkeln:

Durch Vergleich von Element (3, 1) der Matrix folgt:

$$\sin(\theta)=\cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma)-\sin(\alpha)\sin(\gamma)$$

Durch Vergleich von Element (3, 3) der Matrix folgt:

$$\cos(\phi)=\frac{1}{\cos(\theta)}\cos(\alpha)\cos(\beta)$$

Durch Vergleich von Element (1, 1) der Matrix folgt:

$$\cos(\psi)=\frac{1}{\cos(\theta)}\cos(\beta)\cos(\gamma)$$