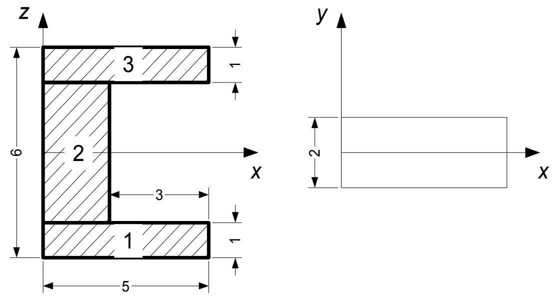
Starrkörperdynamik Lösungsblatt 2.3

Aufgabe 1:

Der Körper wird in drei Quader zerlegt:



a) Schwerpunkt

	Körper 1	Körper 2	Körper 3	Gesamt	
m	10	16	10	36	*kg*
x	2,5	1	2,5		*cm*
y	0	0	0		*cm*
z	-2,5	0	2,5		*cm*
mx	25	16	25	66	*kgcm*
my	0	0	0	0	*kgcm*
mz	-25	0	25	0	*kgcm*

$$x_S = \frac{1}{m}\sum x\,m = \frac{66}{36}\,cm = 1{,}833\,cm \quad , \quad y_S = \frac{1}{m}\sum y\,m = 0\,cm \quad , \quad z_S = \frac{1}{m}\sum z\,m = 0\,cm$$

b) Massenträgheitsmomente und Deviationsmomente

Massenträgheitsmomente der einzelnen Körper bezüglich ihres Schwerpunktes:

	Körper 1	Körper 2	Körper 3	Gesamt	
J_x	4,167	26,667	4,167	35,000	$kgcm^2$
J_y	21,667	26,667	21,667	70,000	$kgcm^2$
J_z	24,167	10,667	24,167	59,000	$kgcm^2$

Steineranteile:

	Körper 1	Körper 2	Körper 3	Gesamt	
$X = x-x_S$	0,667	-0,833	0,667		*cm*
$Y = y-y_S$	0,000	0,000	0,000		*cm*
$Z = z-z_S$	-2,500	0,000	2,500		*cm*
$m(Y^2 + Z^2)$	62,500	0,000	62,500	125,000	*kgcm²*
$m(X^2 + Z^2)$	66,949	11,102	66,949	145,000	*kgcm²*
$m(X^2 + Y^2)$	4,449	11,102	4,449	20,000	*kgcm²*
$-mXY$	0,000	0,000	0,000	0,000	*kgcm²*
$-mYZ$	0,000	0,000	0,000	0,000	*kgcm²*
$-mXZ$	16,675	0,000	-16,675	0,000	*kgcm²*

Trägheitstensor: $\left[\boldsymbol{J}_S\right]=\begin{bmatrix}160 & 0 & 0\\ 0 & 215 & 0\\ 0 & 0 & 79\end{bmatrix} kgcm^2$

Aufgabe 2:

Hauptträgheitsmomente:

Die charakteristische Gleichung zur Ermittlung der Hauptträgheitsmomente lautet

$$\begin{vmatrix} J_x - J & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_y - J & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_z - J \end{vmatrix} = \left(J_y - J\right)\left[\left(J_x - J\right)\left(J_z - J\right) - J_{xz}^2\right] = 0 \quad .$$

Eine erste Lösung dieser Gleichung ist

$$J_2 = J_y \quad .$$

Die zugehörige Achse ist die *y*-Achse. Die Querachse des Flugzeugs ist also eine Hauptachse.

Die beiden weiteren Hauptträgheitsmomente sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\left(J_x - J\right)\left(J_z - J\right) - J_{xz}^2 = J^2 - \left(J_x + J_z\right) J + J_x J_z - J_{xz}^2 = 0 \quad .$$

Die beiden Lösungen sind

$$J_{1/3} = \frac{J_x + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_z}{2}\right)^2 + J_{xz}^2} \quad .$$

Zahlenwerte:

$$J_2 = J_y = \underline{75674\,kgm^2}$$

$$J_1 = \frac{12875+85551}{2}kgm^2 - \sqrt{\left(\frac{12875-85551}{2}\right)^2 + 1331^2}\,kgm^2$$

$$= 49213\,kgm^2 - 36362\,kgm^2 = \underline{12851\,kgm^2}$$

$$J_3 = 49231\,kgm^2 + 36362\,kgm^2 = \underline{85575\,kgm^2}$$

<u>Hauptachsen:</u>

Hauptachse zu J_1:

$$\begin{bmatrix} J_x - J_1 & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_y - J_1 & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_z - J_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1x} \\ b_{1y} \\ b_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & -1331 \\ 0 & 62823 & 0 \\ -1331 & 0 & 72700 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1x} \\ b_{1y} \\ b_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt: $b_{1z} = \frac{24}{1331} b_{1x} = 0{,}0180\, b_{1x}$

Aus der zweite Zeile folgt: $b_{1y} = 0$

b_{1x} wird so gewählt, dass der Vektor die Länge 1 hat:

$$b_{1x}\sqrt{1+0{,}0180^2} = 1{,}00016\, b_{1x} \;\rightarrow\; b_{1x} = 0{,}99984$$

Ergebnis: $[\boldsymbol{b}_1] = \begin{bmatrix} 0{,}99984 \\ 0 \\ 0{,}01803 \end{bmatrix}$

Hauptachse zu J_2:

Hauptachse zu J_2 ist die y-Achse, d.h. $[\boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

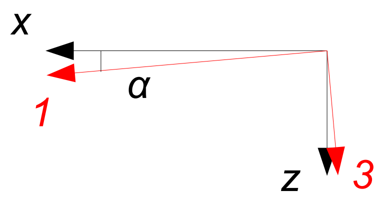
Hauptachse zu J_3:

Die Hauptachse zu J_3 lässt sich über das Vektorprodukt berechnen:

$$[\boldsymbol{b}_3] = [\boldsymbol{b}_1] \times [\boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 0{,}99984 \\ 0 \\ 0{,}01803 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}01803 \\ 0 \\ 0{,}99984 \end{bmatrix}$$

Das Hauptachsensystem ist um den Winkel α um die y-Achse gegenüber dem ursprünglichen System gedreht. Der Winkel α berechnet sich zu

$$\alpha = \arccos(0{,}99984) = 1{,}025\,° \;.$$



Aufgabe 3:

In Abhängigkeit von den Winkelgeschwindigkeiten berechnet sich die kinetische Energie zu

$$E^K(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_1 & 0 & 0\\ 0 & J_2 & 0\\ 0 & 0 & J_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2\right] \ .$$

Für die Winkelgeschwindigkeiten im Hauptachsensystem gilt

$$[\boldsymbol{\omega}]_H=\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin(\theta)\\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta)\\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} \ .$$

Die Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten berechnen sich zu

$$\omega_1^2=\left(\dot{\phi}-\sin(\theta)\dot{\psi}\right)^2=\dot{\phi}^2-2\sin(\theta)\dot{\phi}\dot{\psi}+\sin^2(\theta)\dot{\psi}^2 \ ,$$

$$\begin{aligned}\omega_2^2&=\left(\cos(\phi)\dot{\theta}+\sin(\phi)\cos(\theta)\dot{\psi}\right)^2\\ &=\cos^2(\phi)\dot{\theta}^2+2\cos(\phi)\sin(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}+\sin^2(\phi)\cos^2(\theta)\dot{\psi}^2 \quad \text{und}\\ &=\cos^2(\phi)\dot{\theta}^2+\sin(2\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}+\sin^2(\phi)\cos^2(\theta)\dot{\psi}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_3^2&=\left(-\sin(\phi)\dot{\theta}+\cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\psi}\right)^2\\ &=\sin^2(\phi)\dot{\theta}^2-2\sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}+\cos^2(\phi)\cos^2(\theta)\dot{\psi}^2 \ .\\ &=\sin^2(\phi)\dot{\theta}^2-\sin(2\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}+\cos^2(\phi)\cos^2(\theta)\dot{\psi}^2\end{aligned}$$

Für die kinetische Energie folgt:

$$\begin{aligned}E^K(\phi,\theta,\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})&=J_1\left(\dot{\phi}^2-2\sin(\theta)\dot{\phi}\dot{\psi}+\sin^2(\theta)\dot{\psi}^2\right)\\ &\quad+J_2\left(\cos^2(\phi)\dot{\theta}^2+\sin(2\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}+\sin^2(\phi)\cos^2(\theta)\dot{\psi}^2\right)\\ &\quad+J_3\left(\sin^2(\phi)\dot{\theta}^2-\sin(2\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}+\cos^2(\phi)\cos^2(\theta)\dot{\psi}^2\right)\\ &=J_1\dot{\phi}^2+\left(J_2\cos^2(\phi)+J_3\sin^2(\phi)\right)\dot{\theta}^2\\ &\quad+\left(J_1\sin^2(\theta)+\left(J_2\sin^2(\phi)+J_3\cos^2(\phi)\right)\cos^2(\theta)\right)\dot{\psi}^2\\ &\quad-2J_1\sin(\theta)\dot{\phi}\dot{\psi}+\left(J_2-J_3\right)\sin(2\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}\end{aligned}$$

Die kinetische Energie hängt nicht vom Winkel ψ ab.

Aufgabe 4:

Es gilt:

$$J_y + J_z = \int_K \left(x^2 + z^2 \right) dm + \int_K \left(x^2 + y^2 \right) dm = \int_K \left(2\,x^2 + y^2 + z^2 \right) dm$$

$$= 2 \int_K x^2\, dm + J_x \geq J_x$$

Die übrigen Ungleichungen lassen sich ebenso herleiten.