Starrkörperdynamik Lösungsblatt 2.4

Aufgabe 1:

Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs:

Das Fahrzeug dreht sich um seine Hochachse. Die Winkelgeschwindigkeit ω_A berechnet sich aus der Geschwindigkeit v und dem Kurvenradius R zu

$$\omega_A = \frac{v}{R} \quad .$$

Im fahrzeugfesten Koordinatensystem lautet der Vektor der Winkelgeschwindigkeit:

$$\boldsymbol{\omega}_A = \omega_A \boldsymbol{b}_\zeta$$

Drall des Lüfters:

Im fahrzeugfesten Koordinatensystem lautet der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Lüfters:

$$\boldsymbol{\omega}_L = \omega_L \boldsymbol{b}_\xi$$

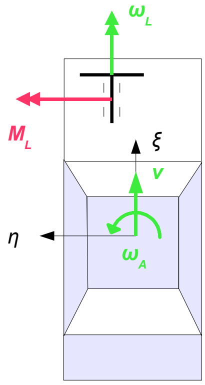
Die Drehachse des Lüfters ist eine Hauptachse. Damit gilt für den Drall:

$$\boldsymbol{L}_L = J_L \omega_L \boldsymbol{b}_\xi$$

Moment auf Lüfter:

Im fahrzeugfesten System ist der Drall des Lüfters konstant. Die Änderung des Dralls des Lüfters bezüglich des ortsfesten Koordinatensystems berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{L}}_L = \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{L}_L = \omega_A \omega_L J_L \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\xi = \omega_A \omega_L J_L \boldsymbol{b}_\eta$$



Die Änderung des Dralls ist gleich dem auf den Lüfter wirkenden Moment:

$$\boldsymbol{M}_L = \dot{\boldsymbol{L}}_L = \omega_A \omega_L J_L \boldsymbol{b}_\eta$$

Zahlenwerte:

Geschwindigkeit des Fahrzeugs: $v = 36 \frac{km}{h} = \frac{36}{3{,}6} \frac{m}{s} = 10 \frac{m}{s}$

Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs: $\omega_A = \frac{v}{R} = \frac{10\,m/s}{40\,m} = 0{,}25\,\frac{1}{s}$

Winkelgeschwindigkeit des Lüfters: $\omega_L = 2\pi\,\frac{n_L}{60} = 2\pi\,\frac{1000}{60}\,\frac{1}{s} = 104{,}7\,\frac{1}{s}$

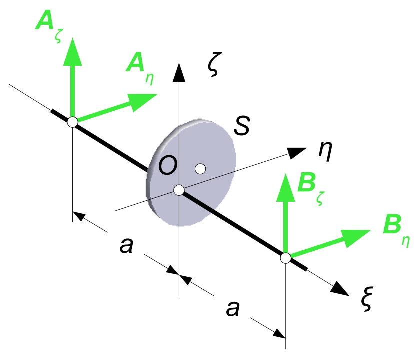
Moment auf Lüfter: $M_{L\eta} = 0{,}25\,\frac{1}{s}\cdot 104{,}7\,\frac{1}{s}\cdot 0{,}01\,kgm^2 = \underline{0{,}2618\,Nm}$

Aufgabe 2:

a) <u>Schwerpunkt:</u>

Schwerpunktsatz:

$$m\,\boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$



Die Beschleunigung des Schwerpunkts stimmt mit der Zentripetalbeschleunigung überein:

$$\boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_S)$$

Dabei ist $\boldsymbol{r}_S$ der gesuchte Vektor vom Ursprung des mitrotierenden Koordinatensystems zum Schwerpunkt.

In Komponenten bezüglich des körperfesten Koordinatensystems berechnet sich die Zentripetalbeschleunigung zu

$$\boldsymbol{a}_f = \omega\,\boldsymbol{b}_\xi\times\left[\omega\,\boldsymbol{b}_\xi\times(\eta_S\,\boldsymbol{b}_\eta + \zeta_S\,\boldsymbol{b}_\zeta)\right] = \omega^2\,\boldsymbol{b}_\xi\times(\eta_S\,\boldsymbol{b}_\zeta - \zeta_S\,\boldsymbol{b}_\eta) = \omega^2(-\eta_S\,\boldsymbol{b}_\eta - \zeta_S\,\boldsymbol{b}_\zeta)$$

Damit lautet der Impulssatz:

$$0 = A_\eta + B_\eta + m\,\omega^2\,\eta_S,\quad 0 = A_\zeta + B_\zeta + m\,\omega^2\,\zeta_S$$

Daraus lassen sich die Koordinaten des Schwerpunktes berechnen:

$$\eta_S = -\frac{A_\eta + B_\eta}{m\,\omega^2},\quad \zeta_S = -\frac{A_\zeta + B_\zeta}{m\,\omega^2}$$

Zahlenwerte:

Die Winkelgeschwindigkeit *ω* berechnet sich aus der Drehzahl *n* zu

$$\omega = \pi\,\frac{n}{30} = \pi\,\frac{1000}{30}\,\frac{1}{s} = 104{,}7\,s^{-1}$$

Damit folgt für die Schwerpunktskoordinaten:

$$\eta_s = -\frac{10000\,N - 12000\,N}{20\,kg\cdot 104{,}7^2\,s^{-2}} = \underline{9{,}122\,mm}$$

$$\zeta_S = -\frac{-4500\,N}{20\text{kg}\cdot 104{,}7^2\,s^{-2}} = \underline{20{,}53\,mm}$$

b) Deviationsmomente

Aus dem Drallsatz folgt für das Moment um den Punkt *O*:

$$\boldsymbol{M} = \omega^2\left(-J_{\xi\zeta}\boldsymbol{b}_\eta + J_{\xi\eta}\boldsymbol{b}_\zeta\right) \quad .$$

In Komponenten lautet diese Gleichung

$$M_\eta = a\left(A_\zeta - B_\zeta\right) = -\omega^2 J_{\xi\zeta}\,, \quad M_\zeta = a\left(B_\eta - A_\eta\right) = \omega^2 J_{\xi\eta}$$

Daraus können die Deviationsmomente berechnet werden:

$$J_{\xi\zeta} = \frac{a\left(B_\zeta - A_\zeta\right)}{\omega^2}\,, \quad J_{\xi\eta} = \frac{a\left(B_\eta - A_\eta\right)}{\omega^2}$$

Zahlenwerte:

$$J_{\xi\zeta} = \frac{0{,}25\,m\cdot\left(-4500\,N\right)}{104{,}7^2\,s^{-2}} = \underline{-0{,}1026\,kgm^2}$$

$$J_{\xi\eta} = \frac{0{,}25\,m\cdot\left(-12000\,N - 10000\,N\right)}{104{,}7^2\,s^{-2}} = \underline{-0{,}5017\,kgm^2}$$

Aufgabe 3:

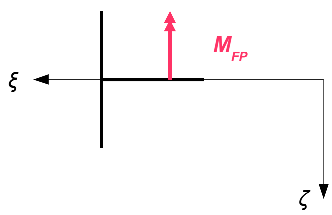
a) Moment auf Propeller:

Das vom Flugzeug auf den Propeller ausgeübte Moment $\boldsymbol{M}_{FP}$ bewirkt die nötige Änderung des Dralls des Propellers.

Der Drall des Propellers berechnet sich zu $\boldsymbol{L}_P = \omega_P J_P \boldsymbol{b}_\xi$.

Für seine zeitliche Änderung gilt:

$$\dot{\boldsymbol{L}}_P = \boldsymbol{\omega}_F \times \boldsymbol{L}_P = \omega_F \omega_P J_P \boldsymbol{b}_\eta \times \boldsymbol{b}_\xi = -\dot{\omega}_F\, t\, \omega_P J_P \boldsymbol{b}_\zeta$$

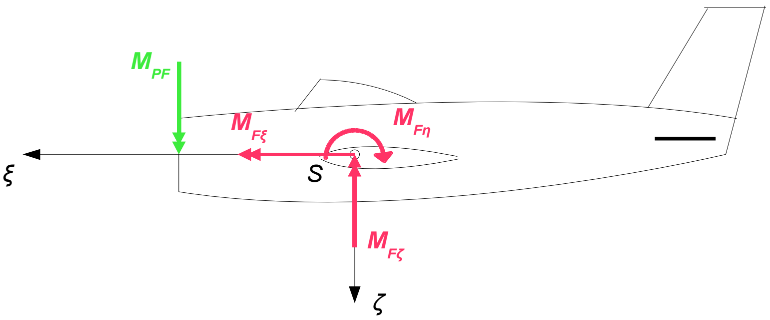


Das benötigte Moment ist gleich der zeitlichen Änderung des Dralls:

$$\boldsymbol{M}_{FP} = \dot{\boldsymbol{L}}_P = -\dot{\omega}_F\, t\, \omega_P J_P \boldsymbol{b}_\zeta$$

b) Aerodynamisches Moment auf Flugzeug

Vom Propeller wird das Moment $\boldsymbol{M}_{PF} = -\boldsymbol{M}_{FP}$ auf das Flugzeug ausgeübt.



Für den Drall des Flugzeugs gilt: $\boldsymbol{L}_F = \boldsymbol{J}_F \boldsymbol{\omega}_F$

$$\begin{bmatrix} L_{F\xi} \\ L_{F\eta} \\ L_{F\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & J_{\xi\zeta} \\ 0 & J_\eta & 0 \\ J_{\xi\zeta} & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_\eta \omega_F \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{L}_F = J_\eta \dot{\omega}_F t \, \boldsymbol{b}_\eta$$

Für die zeitliche Änderung des Dralls gilt:

$$\dot{\boldsymbol{L}}_F = \frac{{}^F d \boldsymbol{L}_F}{dt} + \boldsymbol{\omega}_F \times \boldsymbol{L}_F = \frac{d}{dt}\left(J_\eta \dot{\omega}_F t\right) \boldsymbol{b}_\eta + \left(\dot{\omega}_F t\right)^2 J_\eta \boldsymbol{b}_\eta \times \boldsymbol{b}_\eta = J_\eta \dot{\omega}_F \boldsymbol{b}_\eta$$

Der Drallsatz für das Flugzeug lautet:

$$\dot{\boldsymbol{L}}_F = \boldsymbol{M}_F + \boldsymbol{M}_{PF}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{M}_F = \dot{\boldsymbol{L}}_F - \boldsymbol{M}_{PF} = \dot{\boldsymbol{L}}_F + \boldsymbol{M}_{FP} = J_\eta \dot{\omega}_F \boldsymbol{b}_\eta - \dot{\omega}_F \omega_P J_P t \, \boldsymbol{b}_\zeta$$

Für die Komponenten des aerodynamischen Moments $\boldsymbol{M}_F$ gilt also:

$$\begin{aligned} M_{F\xi}(t) &= 0 \\ M_{F\eta}(t) &= \dot{\omega}_F J_\eta \\ M_{F\zeta}(t) &= -\dot{\omega}_F \omega J_P t \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

a) <u>Schräglage und Auftriebskraft</u>

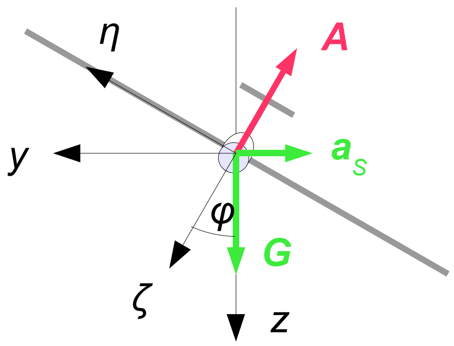
Schwerpunktsatz:

$$m a_{Sy} = A \sin(\phi)$$

$$0 = G - A\cos(\phi)$$

Mit $G = m g$ und der Zentripetalbeschleunigung

$$a_S = \frac{v^2}{R}$$



folgt:

$$m\frac{v^2}{R} = A\sin(\phi)$$
$$m\,g = A\cos(\phi)$$

Division der ersten durch die zweite Gleichung ergibt

$$\tan(\phi)=\frac{v^2}{2g} \quad .$$

Quadrieren beider Gleichungen und anschließende Addition ergibt:

$$A^2=m^2\left(\frac{v^2}{R^2}+g^2\right) \quad \rightarrow \quad A=m\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+g^2}$$

Zahlenwerte:

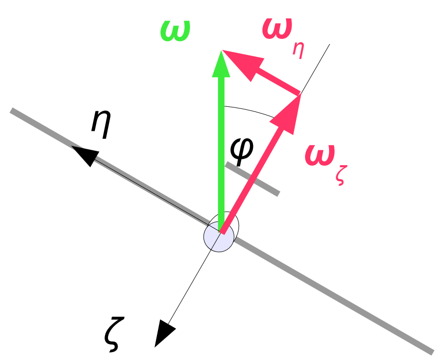
$$\tan(\phi)=\frac{(100/3{,}6)^2\,m^2/s^2}{9{,}81\,m/s^2\cdot 100\,m}=0{,}7865 \quad \rightarrow \quad \phi=\underline{38{,}19\,°}$$

$$A=320\,kg\cdot\sqrt{9{,}81^2\,m^2/s^4+\left(\frac{(100/3{,}6)^2\,m^2/s^2}{100\,m}\right)^2}=\underline{3993{,}90\,N}$$

b) <u>Komponenten der Winkelgeschwindigkeit</u>

Das Flugzeug dreht um eine Achse, die senkrecht auf der Erdoberfläche steht. Für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit gilt:

$$\omega_\eta=\omega\sin(\phi)$$
$$\omega_\zeta=-\omega\cos(\phi)$$



Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit berechnet sich zu

$$\omega=\frac{v}{R} \quad .$$

Zahlenwerte:

$$\omega=\frac{(100/3{,}6)\,m/s}{100\,m}=\frac{1}{3{,}6}\frac{1}{s}=\underline{0{,}2778\frac{1}{s}}$$

$$\omega_\eta=0{,}1717\,s^{-1}, \quad \omega_\zeta=-0{,}2183\,s^{-1}$$

c) <u>Momente</u>

Für die Komponenten des Dralls bezüglich des flugzeugfesten Systems gilt:

$$\begin{bmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\xi \omega_\xi \\ J_\eta \omega_\eta \\ J_\zeta \omega_\zeta \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 0 \\ J_\eta \sin(\phi) \\ -J_\zeta \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Für einen flugzeugfesten Beobachter ändert sich der Drall nicht. Die Änderung des Dralls für einen ortsfesten Beobachter berechnet sich zu

$$[\dot{\boldsymbol{L}}_S]_B = [\boldsymbol{\omega}]_B \times [\boldsymbol{L}_S]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \sin(\phi) \\ -\omega \cos(\phi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \omega J_\eta \sin(\phi) \\ -\omega J_\zeta \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$= \omega^2 \begin{bmatrix} -J_\zeta \sin(\phi)\cos(\phi) + J_\eta \sin(\phi)\cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aus dem Drallsatz $\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{M}_S$ folgt für die Momente:

$$\begin{bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(J_\eta - J_\zeta)\sin(2\phi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zahlenwert:

$$M_\xi = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2778^2 \frac{1}{s^2} \cdot (600\,kgm^2 - 2100\,kgm^2)\sin(2 \cdot 38{,}19\,°) = \underline{-56{,}25\,Nm}$$