Starrkörperdynamik Lösungsblatt 2.5

Aufgabe 1:

a) <u>Allgemeine Beziehungen für Kraft und Moment:</u>

<u>Kinematik:</u>

Durch die Vorgabe von $\boldsymbol{v}_A$ und $\boldsymbol{\omega}$ liegt die Bewegung des Stabes fest. Da der Punkt *A* nicht ortsfest ist, wird als Bezugspunkt für den Drallsatz der Schwerpunkt *S* gewählt. Für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts gilt

$$\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AS} \quad .$$

Die Beschleunigung berechnet sich zu

$$\boldsymbol{a}_S = \dot{\boldsymbol{v}}_S = \dot{\boldsymbol{v}}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{AS} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}_{AS} = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{AS} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AS} \right) \quad .$$

Die Euler-Winkel *φ* und *ψ* sind null. Damit folgt für die Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit im stabfesten Koordinatensystem *Aξηζ* :

$$[\boldsymbol{\omega}]_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_\eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Transformationsmatrix zwischen dem stabfesten Koordinatensystem *Aξηζ* und dem ortsfesten Koordinatensystem *Oxyz* berechnet sich zu

$$[\boldsymbol{T}]_{OA} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad .$$

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}_A$ sind im Koordinatensystem *Oxyz* gegeben:

$$[\boldsymbol{v}_A]_O = \begin{bmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow [\boldsymbol{a}_A]_O = \begin{bmatrix} a_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Komponenten des Beschleunigungsvektors $\boldsymbol{a}_A$ im stabfesten Koordinatensystem *Aξηζ* sind

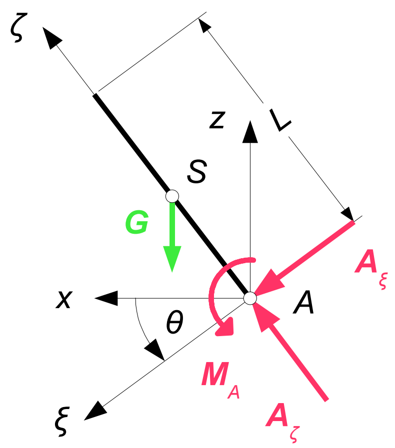
$$[\boldsymbol{a}_A]_A = [\boldsymbol{T}]_{OA}^T [\boldsymbol{v}_A]_O = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_A \cos(\theta) \\ 0 \\ a_A \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Damit berechnen sich die Komponenten des Beschleunigungsvektors $\boldsymbol{a}_S$ im stabfesten Koordinatensystem zu

$$[\boldsymbol{a}_S]_A = a_A \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \times \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \times \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= a_A \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} + \frac{L}{2} \ddot{\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_A \cos(\theta) + \frac{L}{2} \ddot{\theta} \\ 0 \\ a_A \sin(\theta) - \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \end{bmatrix}$$

Schwerpunktsatz:



Aus dem Schwerpunktsatz

$$m \boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{A}$$

folgt für die gesuchten Kräfte

$$\boldsymbol{A} = m \boldsymbol{a}_S - \boldsymbol{G} \quad .$$

Die Komponenten der Gewichtskraft im stabfesten Koordinatensystem sind

$$[\boldsymbol{G}]_A = [\boldsymbol{T}]_{OA}^T [\boldsymbol{G}]_O$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m g \end{bmatrix}$$

$$= m g \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Damit gilt für die Komponenten der Kraft:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} A_\xi & = & m \left(a_A \cos(\theta) + \frac{L}{2} \ddot{\theta} - g \sin(\theta) \right) \\ A_\eta & = & 0 \\ A_\zeta & = & m \left(a_A \sin(\theta) - \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 + g \cos(\theta) \right) \end{array}}$$

Drallsatz:

Für den Drall gilt: $\boldsymbol{L}_S = \boldsymbol{J}_S \boldsymbol{\omega}$

Seine zeitliche Ableitung berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{J}_S \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}_S = \boldsymbol{J}_S \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}_S \boldsymbol{\omega} \quad .$$

Der Drallsatz lautet

$$\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{J}_S \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}_S \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{r}_{SA} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_A - \boldsymbol{r}_{AS} \times \boldsymbol{A} \quad .$$

Daraus folgt für das Moment:

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{J}_S \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}_S \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}_{AS} \times \boldsymbol{A} \quad .$$

Im stabfesten Koordinatensystem gilt:

$$[\boldsymbol{J}_S]_A = \frac{1}{12} m L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{L}_S]_A = \frac{1}{12} m L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} m L^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\dot{\boldsymbol{L}}_S]_A = \frac{1}{12} m L^2 \ddot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} m L^2 \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} m L^2 \ddot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{r}_{AS}]_A \times [\boldsymbol{A}]_A = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_\xi \\ 0 \\ A_\zeta \end{bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ A_\xi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nur die η-Komponente des Moments ist von null verschieden. Sie berechnet sich zu

$$\begin{aligned} M_{A\eta} &= \frac{1}{12} m L^2 \ddot{\theta} + \frac{L}{2} m \left(a_A \cos(\theta) + \frac{L}{2} \ddot{\theta} - g \sin(\theta) \right) \\ &= \frac{1}{12} m L \left(4 L \ddot{\theta} + 6 a_A \cos(\theta) - 6 g \sin(\theta) \right) \end{aligned}$$

Damit gilt für die Komponenten des Moments:

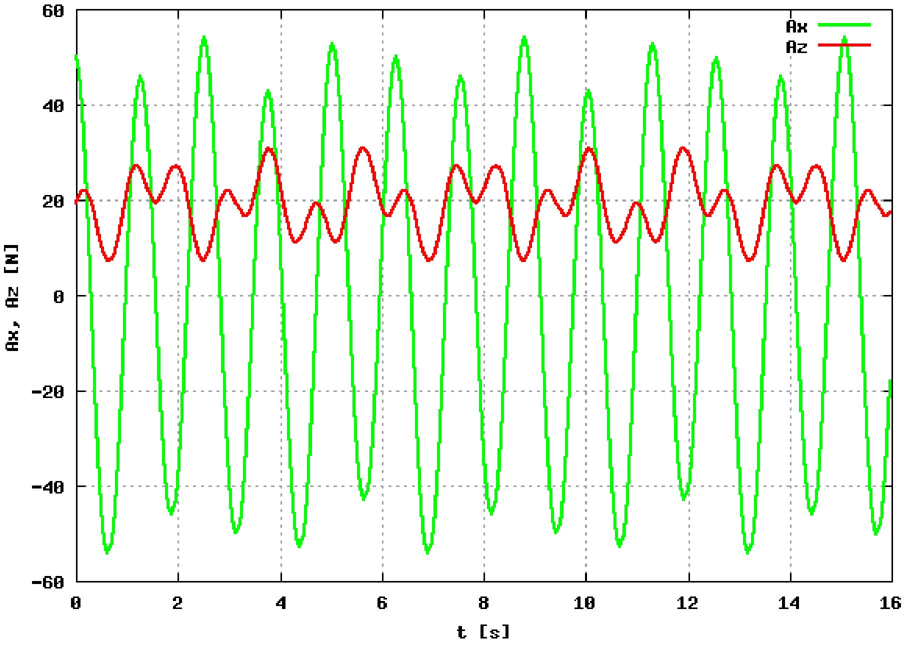
$$\boxed{\begin{aligned} M_{A\xi} &= 0 \\ M_{A\eta} &= \frac{1}{12} m L \left(4 L \ddot{\theta} + 6 a_A \cos\theta - 6 g \sin(\theta) \right) \\ M_{A\zeta} &= 0 \end{aligned}}$$

b) <u>Zeitliche Verläufe für die vorgegebenen Werte:</u>

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_1 t) \;\rightarrow\; \dot{\theta}(t) = \omega_1 \theta_0 \cos(\omega_1 t), \quad \ddot{\theta}(t) = -\omega_1^2 \theta_0 \sin(\omega_1 t)$$

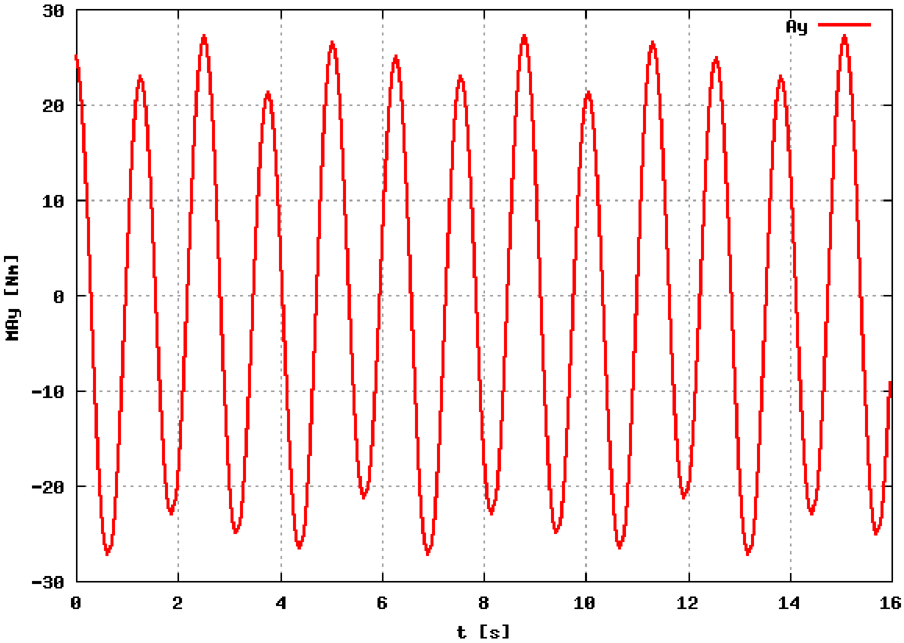
$$v_A(t) = v_0 \sin(\omega_2 t) \;\rightarrow\; a_A(t) = \omega_2 v_0 \cos(\omega_1 t)$$

Zeitlicher Verlauf der Kräfte:



Betragsmäßig größte Werte: $A_{\xi max} = 54{,}2\,N$, $A_{\zeta max} = 30{,}8\,N$

Zeitlicher Verlauf des Moments:



Betragsmäßig größter Wert: $M_{A\eta max} = 27{,}2\,Nm$

Aufgabe 2:

Kinematik:

Für die Ableitungen der Schwerpunktskoordinaten gilt:

$$\dot{x}_S = v_{Sx}, \quad \dot{y}_S = v_{Sy}, \quad \dot{z}_S = v_{Sz}$$

Für die Ableitungen der Euler-Winkel gilt:

$$\dot{\phi} = \omega_1 + \sin(\phi)\tan(\theta)\omega_2 + \cos(\phi)\tan(\theta)\omega_3$$
$$\dot{\theta} = \cos(\phi)\omega_2 - \sin(\phi)\omega_3$$
$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos(\theta)}\left(\sin(\phi)\omega_2 + \cos(\phi)\omega_3\right)$$

Schwerpunktsatz:

Im ortsfesten Koordinatensystem gilt

$$m[\dot{\boldsymbol{v}}_S]_O = m[\boldsymbol{g}]_O + [\boldsymbol{F}]_O = m[\boldsymbol{g}]_O + [\boldsymbol{T}]_{OB}[\boldsymbol{F}]_B \quad .$$

Für die Erdbeschleunigung gilt

$$[\boldsymbol{g}]_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad .$$

Im körperfesten Koordinatensystem hat die Kraft die Komponenten

$$[\boldsymbol{F}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \quad .$$

Transformation in das ortsfeste Koordinatensystem ergibt

$$[F]_O = \begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} F \quad .$$

Damit lautet der Schwerpunktsatz:

$$\dot{v}_{Sx} = \left(\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)\right) F/m$$
$$\dot{v}_{Sy} = \left(\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)\right) F/m$$
$$\dot{v}_{Sz} = \cos(\phi)\cos(\theta) F/m - g$$

Drallsatz:

Im körperfesten Koordinatensystem lautet der Drallsatz bezüglich dem

Schwerpunkt:

$$[\boldsymbol{J_S}]_B[\dot{\boldsymbol{\omega}}]_B = [\boldsymbol{M_S}]_B - [\boldsymbol{\omega}]_B \times [\boldsymbol{J_S}]_B[\boldsymbol{\omega}]_B$$

Das Moment berechnet sich zu

$$[\boldsymbol{M_S}]_B = [\boldsymbol{r_{SA}}]_B \times [\boldsymbol{F}]_B = \begin{bmatrix} \xi_A \\ \eta_A \\ \zeta_A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_A F \\ -\xi_A F \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Damit lautet der Drallsatz:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{J_1}\left[\eta_A F + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3\right]$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{J_2}\left[-\xi_A F + (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1\right]$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{1}{J_3}(J_1 - J_2)\omega_1\omega_2$$