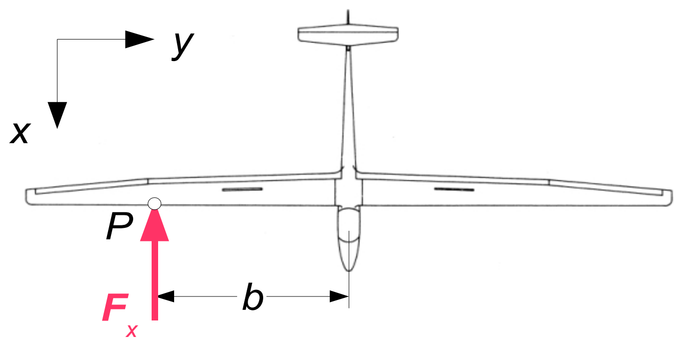
Starrkörperdynamik Lösungsblatt 3.2

Aufgabe 1:

a) <u>Kraftstoß auf den Flügel</u>

Kräfte am freigeschnittenen Flugzeug während des Stoßes:



Integrierter Impulssatz in *x*-Richtung:

$$m\left(V-v\right)=-\hat{F}_x \quad \rightarrow \quad V=v-\frac{\hat{F}_x}{m}$$

Integrierter Drallsatz um die *z*-Achse:

$$J_{Sz}\,\Omega=-b\,\hat{F}_x \quad \rightarrow \quad \Omega=-b\frac{\hat{F}_x}{J_{Sz}}$$

Stoßbedingung:

$$k=-\frac{V_{Px}}{v_{px}}$$

Kinematik:

$$v_{Px}=v\,,\quad V_{Px}=V+\Omega\,b$$

Mit den kinematischen Beziehungen folgt aus der Stoßbedingung

$$k\,v=-V-\Omega\,b\quad .$$

Einsetzen der Ergebnisse aus integriertem Impuls- und Drallsatz führt auf

$$k\,v=-v+\frac{\hat{F}_x}{m}+b^2\frac{\hat{F}_x}{J_{Sz}}\quad .$$

Daraus lässt sich der gesuchte Kraftstoß berechnen:

$$(k+1)v=\hat{F}_x\left(\frac{1}{m}+\frac{b^2}{J_{Sz}}\right) \rightarrow \boxed{\hat{F}_x=\frac{(1+k)v}{\frac{1}{m}+\frac{b^2}{J_{Sz}}}}$$

Zahlenwert:

$$\hat{F}_x=\frac{(1+0{,}5)\cdot 5\,m/s}{\frac{1}{360\,kg}+\frac{7^2 m^2}{3400\,kgm^2}}=\underline{436{,}31\,Ns}$$

b) <u>Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß</u>

Nachdem der Kraftstoß berechnet wurde, lassen sich die gesuchten Geschwindigkeiten aus dem integrierten Impulssatz und dem integrierten Drallsatz ermitteln.

Geschwindigkeit des Schwerpunktes:

$$V=5\,m/s-\frac{436{,}31\,Ns}{360\,kg}=\underline{3{,}788\,m/s}$$

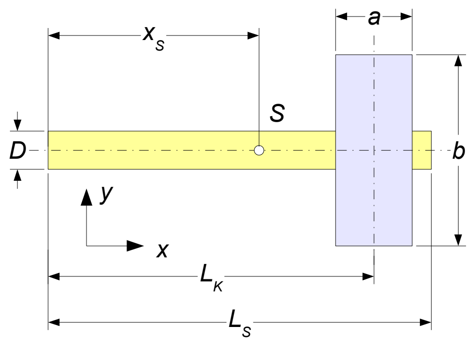
Winkelgeschwindigkeit:

$$\Omega=-7\,m\cdot\frac{436{,}31\,Ns}{3400\,kgm^2}=\underline{-0{,}898\,s^{-1}}$$

Aufgabe 2:

a) <u>Schwerpunkt und Massenträgheitsmoment</u>

Der Hammer setzt sich aus drei Körpern zusammen, nämlich dem zylindrischen Stiel und dem quaderförmigen Kopf abzüglich der zylindrischen Bohrung.



<u>Zusammenstellung der Formeln:</u>

Stiel:

Masse: $m_S=\frac{1}{4}\rho_H\pi D^2 L_S$

Schwerpunkt: $x_{SS}=\frac{1}{2}L_S$

Massenträgheitsmoment bezüglich Stielschwerpunkt:

$$J_{SSz}=\frac{1}{12}m_S\left(\frac{3}{4}D^2+L_S^2\right)$$

Quader:

Masse: $m_Q=\rho_S\,a\,b\,c$

Schwerpunkt: $x_{SQ}=L_K$

Massenträgheitsmoment bezüglich Quaderschwerpunkt:

$$J_{SQz}=\frac{1}{12}m_Q\left(a^2+b^2\right)$$

Bohrung (abzuziehen):

Masse: $m_B=\frac{1}{4}\rho_S\pi\,D^2\,a$

Schwerpunkt: $x_{SB}=L_K$

Massenträgheitsmoment bezüglich Bohrungsschwerpunkt:

$$J_{SBz}=\frac{1}{12}m_B\left(\frac{3}{4}D^2+a^2\right)$$

Gesamtmasse: $m=m_S+m_Q-m_B$

Gesamtschwerpunkt: $x_S=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}L_s m_S+L_K\left(m_Q-m_B\right)\right)$

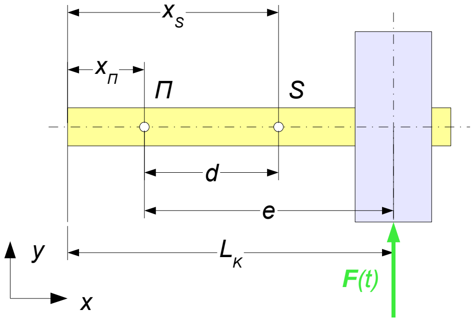
Massenträgheitsmoment um Gesamtschwerpunkt:

$$J_{Sz}=J_{SSz}+m_S\left(x_{SS}-x_S\right)^2+J_{SQz}+m_Q\left(x_{SQ}-x_S\right)^2-J_{SBz}-m_B\left(x_{SB}-x_S\right)^2$$

Zahlenwerte:

	Stiel	Quader	Bohrung	Summe	
m_i	0,1031	0,4710	-0,07707	0,4970	*kg*
x_{Si}	15	29	29		*cm*
$m_i x_{Si}$	1,5465	13,659	-2,2350	12,9705	*kgcm*
x_S				26,098	*cm*
J_{Siz}	7,7728	4,082	-0,05580	11,799	*kgcm*^{2}
$x_{Si}-x_S$	-11,098	2,902	2,902		*cm*
$m_i\left(x_{Si}-x_S\right)^2$	12,698	3,9666	-0,6491	16,016	*kgcm*^{2}
J_{Sz}				27,815	*kgcm*^{2}

b) <u>Lage des Stoßmittelpunktes:</u>



Für den Stoßmittelpunkt gilt

$$d\,e = i_\Pi^2 \quad .$$

Mit

$$i_\Pi^2 = \frac{J_{\Pi z}}{m}\,,\quad d = x_S - x_\Pi\,,\quad e = L_K - x_\Pi$$

und

$$J_{\Pi z} = J_{Sz} + m\left(x_S - x_\Pi\right)^2$$

folgt

$$\left(x_S - x_\Pi\right)\left(L_K - x_\Pi\right) = \frac{J_{Sz}}{m} + \left(x_S - x_\Pi\right)^2 = i_S^2 + \left(x_S - x_\Pi\right)^2$$

mit $i_S = \frac{J_{Sz}}{m}$.

Ausrechnen ergibt

$$x_S L_K - x_\Pi L_K - x_S x_\Pi + x_\Pi^2 = i_S^2 + x_S^2 - 2 x_S x_\Pi + x_\Pi^2 \quad .$$

Daraus folgt

$$x_S L_K - i_S^2 - x_S^2 = \left(L_K + x_S - 2 x_S\right) x_\Pi$$

und daraus schließlich

$$x_\Pi = \frac{L_K x_S - i_S^2 - x_S^2}{L_K - x_S} = \frac{\left(L_K - x_S\right) x_S - i_S^2}{L_K - x_S} = x_S - \frac{i_S^2}{L_K - x_S} \quad .$$

Zahlenwerte:

$$i_S^2 = \frac{27{,}815\,kgcm^2}{0{,}4970\,kg} = 55{,}966\,cm^2$$

$$x_\Pi = 26{,}098\,cm - \frac{55{,}966\,cm^2}{29\,cm - 26{,}098\,cm} = \underline{6{,}813\,cm}$$