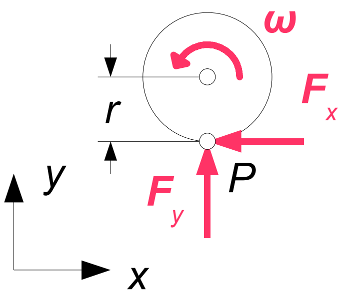
Starrkörperdynamik Lösungsblatt 3.3

Aufgabe 1:



Integrierter Impulssatz:

$$m\left(V_x - v_x\right) = -\hat{F}_x$$
$$m\left(V_y - v_y\right) = \hat{F}_y$$

Integrierter Drallsatz:

$$J\left(\Omega - \omega\right) = -r\,\hat{F}_x$$

Dabei bezeichnen kleine Buchstaben Werte vor dem Stoß und große Buchstaben Werte nach dem Stoß.

Die Stoßbedingung lautet:

$$k = -\frac{V_{Py}}{v_{Py}} = -\frac{V_y}{v_y} \quad \rightarrow \quad V_y = -k\,v_y$$

Die Haftbedingung lautet:

$$V_{Px} = 0 \quad \rightarrow \quad V_x + r\,\Omega = 0 \quad \rightarrow \quad V_x = -r\,\Omega$$

Für die Komponenten der Geschwindigkeit vor dem Stoß gilt:

$$v_x = v\cos(\alpha)\,, \quad v_y = -v\sin(\alpha)$$

a) <u>Winkelgeschwindigkeit vor dem Stoß</u>

Wenn der Ball nach dem Stoß senkrecht nach oben steigt, ist

$$V_x = 0 \quad .$$

Aus der Haftbedingung folgt, dass dann auch die Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß null sein muss:

$$\Omega = 0$$

Aus dem integrierten Impulssatz in *x*-Richtung folgt

$$-m\,v_x = -\hat{F}_x \quad \rightarrow \quad \hat{F}_x = m\,v\cos(\alpha) \quad .$$

Einsetzen in den integrierten Drallsatz liefert

$$-J\,\omega = -r\,\hat{F}_x = -r\,m\,v\cos(\alpha) \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{r\,m\,v}{J}\cos(\alpha) \quad .$$

Zahlenwert:

$$\omega=\frac{0{,}1\,m\cdot 2\,kg\cdot 2\,m/s}{0{,}005\,kgm^2}\cos(40°)=\underline{61{,}28\,s^{-1}}$$

b) Vertikale Geschwindigkeit nach dem Stoß

Aus der Stoßbedingung folgt

$$V_y=k\,v\sin(\alpha)\quad .$$

Zahlenwert:

$$V_y=0{,}8\cdot 2\,m/s\cdot\sin(40°)=\underline{1{,}028\,m/s}$$

c) Kraftstöße

Aus den integrierten Impulssätzen folgt:

$$\hat{F}_x=m\,v_x=m\,v\cos(\alpha)$$
$$\hat{F}_y=-m(k+1)\,v_y=m(k+1)\,v\sin(\alpha)$$

Zahlenwerte:

$$\hat{F}_x=2\,kg\cdot 2\,m/s\cdot\cos(40°)=\underline{3{,}064\,Ns}$$

$$\hat{F}_y=2\,kg\cdot 1{,}8\cdot 2\,m/s\cdot\sin(40°)=\underline{4{,}628\,Ns}$$

Aufgabe 2:

a) Winkelgeschwindigkeit von Kugel *A* vor dem Stoß:

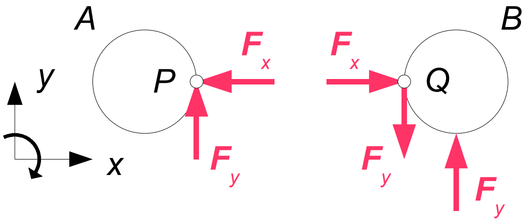
Aus der Rollbedingung $v_{Ax}=\omega_A r$ folgt: $\omega_A=\dfrac{v_{Ax}}{r}$

Zahlenwert: $\omega_A=\dfrac{1\,m/s}{0{,}05\,m}=\underline{20\,s^{-1}}$

b) Kraftstoß:

Integrierter Impulssatz in *x*-Richtung:

- Kugel *A*: $m(V_{Ax}-v_{Ax})=-\hat{F}_x$
- Kugel *B*: $m\,V_{Bx}=\hat{F}_x$



Integrierter Impulssatz in *y*-Richtung:

- Kugel *A*: $m\,V_{Ay}=\hat{F}_y$

Integrierter Drallsatz:

- Kugel *A*: $J\left(\Omega_A-\omega_A\right)=-r\,\hat{F}_y$
- Kugel *B*: $J\,\Omega_B=-r\,\hat{F}_y$

Massenträgheitsmoment der Kugel: $J=\frac{2}{5}m\,r^2$

Stoßbedingung: $V_{Bx}-V_{Ax}=k\,v_{Ax}$

Haftbedingung: $V_{Py}=V_{Qy}$

Mit $V_{Py}=V_{Ay}-\Omega_A r$ und $V_{Qy}=\Omega_B r$ folgt: $V_{Ay}-\Omega_A r=\Omega_B r$

Aus den integrierten Impulssätzen in *x*-Richtung folgt:

$$V_{Ax}=v_{Ax}-\frac{\hat{F}_x}{m} \quad , \quad V_{Bx}=\frac{\hat{F}_x}{m}$$

Einsetzen in die Stoßbedingung führt auf

$$\frac{\hat{F}_x}{m}-v_{Ax}+\frac{\hat{F}_x}{m}=k\,v_{Ax} \quad .$$

Daraus folgt für den Kraftstoß $\hat{F}_x$: $\hat{F}_x=\frac{1+k}{2}m\,v_{Ax}$

Aus den integrierten Drallsätzen folgt:

$$\Omega_A=\omega_A-\frac{r}{J}\hat{F}_y \quad , \quad \Omega_B=-\frac{r}{J}\hat{F}_y$$

Aus dem integrierten Impulssatz in *y*-Richtung folgt:

$$V_{Ay}=\frac{\hat{F}_y}{m}$$

Einsetzen in die Haftbedingung führt auf

$$\frac{\hat{F}_y}{m}-\omega_A r+\frac{r^2}{J}\hat{F}_y=-\frac{r^2}{J}\hat{F}_y \quad .$$

Daraus folgt:

$$\hat{F}_y\left(\frac{1}{m}+2\frac{r^2}{J}\right)=\omega_A r=v_{Ax} \quad \rightarrow \quad \hat{F}_y=\frac{v_{Ax}}{\frac{1}{m}+2\frac{r^2}{J}}$$

Mit $J=\frac{2}{5}m\,r^2$ folgt: $2\frac{r^2}{J}=\frac{5}{m} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{m}+2\frac{r^2}{J}=\frac{6}{m}$

Damit gilt für den Kraftstoß $\hat{F}_y$: $\hat{F}_y=\frac{1}{6}m\,v_{Ax}$

Zahlenwerte:

$$\hat{F}_x = \frac{1{,}8}{2} \cdot 5\,kg \cdot 1\,m/s = \underline{4{,}5\,Ns} \quad , \quad \hat{F}_y = \frac{1}{6} \cdot 5\,kg \cdot 1\,m/s = \underline{0{,}8333\,Ns}$$

c) <u>Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß:</u>

Geschwindigkeiten:

$$V_{Ax} = v_{Ax} - \frac{\hat{F}_x}{m} = \left(1 - \frac{1+k}{2}\right) v_{Ax} = \frac{1-k}{2} v_{Ax} \quad , \quad V_{Ay} = \frac{\hat{F}_y}{m} = \frac{1}{6} v_{Ax}$$

$$V_{Bx} = \frac{\hat{F}_x}{m} = \frac{1+k}{2} v_{Ax}$$

Winkelgeschwindigkeiten:

$$\Omega_B = -\frac{r}{J} \hat{F}_y = -\frac{5}{2} \frac{1}{m r} \cdot \frac{1}{6} m r \omega_A = -\frac{5}{12} \omega_A$$

$$\Omega_A = \omega_A - \frac{r}{J} \hat{F}_y = \omega_A + \Omega_B = \frac{7}{12} \omega_A$$

Zahlenwerte:

$$V_{Ax} = \frac{0{,}2}{2} \cdot 1\,m/s = \underline{0{,}1\,m/s} \quad , \quad V_{Ay} = \frac{1}{6} \cdot 1\,m/s = \underline{0{,}1667\,m/s}$$

$$V_{Bx} = \frac{1{,}8}{2} \cdot 1\,m/s = \underline{0{,}9\,m/s}$$

$$\Omega_A = \frac{7}{12} \cdot 20\,s^{-1} = \underline{11{,}67\,s^{-1}} \quad , \quad \Omega_B = -\frac{5}{12} \cdot 20\,s^{-1} = \underline{-8{,}333\,s^{-1}}$$