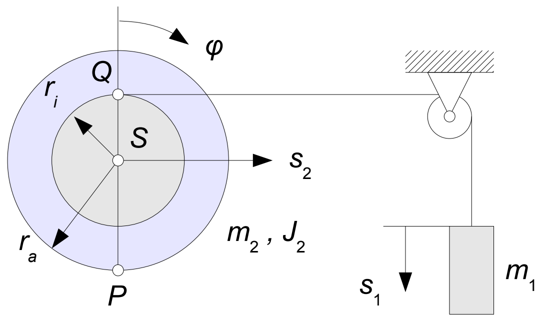
Starrkörperdynamik Lösungsblatt 4.1

Aufgabe 1:

a) Zwangsbedingungen

Die Trommel dreht sich um den Fußpunkt P. Daher gilt für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts



$$\dot{s}_2 = r_a \dot{\phi} \quad .$$

Integration bezüglich der Zeit ergibt als erste Zwangsbedingung

$$F_1(s_1, s_2, \phi) = s_2 - r_a \phi = 0 \quad .$$

Die Geschwindigkeit des Klotzes ist gleich der Geschwindigkeit von Punkt Q. Es gilt also

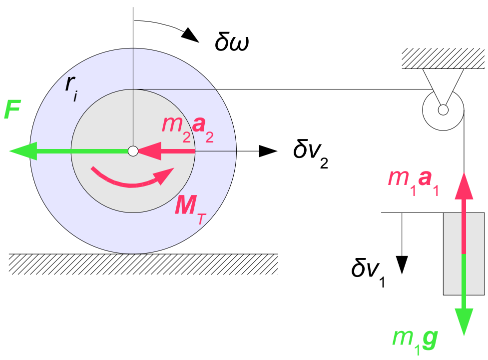
$$\dot{s}_1 = \left(r_i + r_a\right) \dot{\phi} \quad .$$

Integration bezüglich der Zeit ergibt als zweite Zwangsbedingung

$$F_2(s_1, s_2, \phi) = s_1 - \left(r_a + r_i\right) \phi = 0 \quad .$$

b) Bewegungsgleichung

Virtuelle Leistung der eingeprägten Kräfte:



$$\delta P = -F\,\delta v_2 + m_1 g\,\delta v_1$$

Virtuelle Leistung der Trägheitskräfte:

$$\delta P_T = -m_2 a_2 \delta v_2 - M_T \delta \omega - m_1 a_1 \delta v_1$$

Mit

$$M_T = J_2 \ddot{\phi}, \quad a_2 = \ddot{s}_2 \quad \text{und} \quad a_1 = \ddot{s}_1$$

folgt:

$$\delta P_T = -m_1 \ddot{s}_1 \delta v_1 - J_2 \ddot{\phi}\, \delta \omega - m_2 \ddot{s}_2 \delta v_2$$

Zwangsbedingungen für die virtuellen Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial F_1}{\partial s_1} \delta v_1 + \frac{\partial F_1}{\partial s_2} \delta v_2 + \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \delta \omega = \delta v_2 - r_a \delta \omega = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial s_1}\delta v_1+\frac{\partial F_2}{\partial s_2}\delta v_2+\frac{\partial F_2}{\partial \phi}\delta \omega=\delta v_1-\left(r_a+r_i\right)\delta \omega=0$$

Daraus folgt

$$\delta v_1=\left(r_a+r_i\right)\delta\omega \quad \text{und} \quad \delta v_2=r_a\delta\omega \quad .$$

Damit lautet das Prinzip der virtuellen Leistung

$$\begin{aligned}\delta P+\delta P_T&=m_1\left(g-\ddot{s}_1\right)\delta v_1-\left(F+m_2\ddot{s}_2\right)\delta v_2-J_2\ddot{\phi}\,\delta\omega\\&=\left[m_1\left(r_a+r_i\right)\left(g-\ddot{s}_1\right)-r_a\left(F+m_2\ddot{s}_2\right)-J_2\ddot{\phi}\right]\delta\omega=0\end{aligned} \quad .$$

Daraus folgt

$$m_1 g\left(r_a+r_i\right)-r_a F=m_1\left(r_a+r_i\right)\ddot{s}_1+r_a m_2\ddot{s}_2+J_2\ddot{\phi} \quad .$$

Aus den Zwangsbedingungen folgt

$$\ddot{s}_1=\left(r_a+r_i\right)\ddot{\phi} \quad \text{und} \quad \ddot{s}_2=r_a\ddot{\phi} \quad .$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\left[m_1\left(r_a+r_i\right)^2+m_2 r_a^2+J_2\right]\ddot{\phi}=m_1 g\left(r_a+r_i\right)-r_a F \quad .$$

Für die Winkelbeschleunigung folgt

$$\ddot{\phi}=\frac{m_1 g\left(r_a+r_i\right)-r_a F}{m_1\left(r_a+r_i\right)^2+m_2 r_a^2+J_2} \quad .$$

Zahlenwert:

$$\ddot{\phi}=\frac{50\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2\cdot 1{,}2\,m-0{,}7\,m\cdot 500\,N}{50\,kg\cdot 1{,}2^2\,m^2+75\,kg\cdot 0{,}7^2\,m^2+10\,kgm^2}=\underline{2{,}009\,s^{-2}}$$

c) <u>Gleichgewicht</u>

Im Gleichgewicht gilt $\ddot{\phi}=0$. Für die Kraft $\boldsymbol{F}_s$ muss also

$$F_s=\frac{r_a+r_i}{r_a}m_1 g=\left(1+\frac{r_i}{r_a}\right)m_1 g$$

gelten. Diese Bedingung folgt mit $\delta P_T=0$ auch direkt aus dem Prinzip der virtuellen Leistung:

$$\delta P=-F_s\,\delta v_2+m_1 g\,\delta v_1=\left[-F_s r_a+m_1 g\left(r_a+r_i\right)\right]\delta\omega=0 \quad .$$

Zahlenwert:

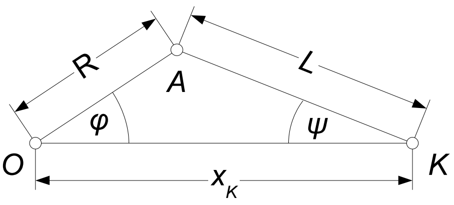
$$F_s=\left(1+\frac{0{,}5}{0{,}7}\right)\cdot 50\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2=\underline{840{,}9\,N}$$

Aufgabe 2:

a) Zwangsbedingungen

Sinussatz im Dreieck OAK:

$$\frac{\sin(\phi)}{L}=\frac{\sin(\psi)}{R}$$



$$\rightarrow \quad F_1(\phi,\psi,x_K)=R\sin(\phi)-L\sin(\psi)=0$$

Für die Strecke x_K gilt:

$$x_K=R\cos(\phi)+L\cos(\psi)$$

$$\rightarrow \quad F_2(\phi,\psi,x_K)=x_K-R\cos(\phi)-L\cos(\psi)=0$$

b) Zwangsbedingungen für die virtuellen Geschwindigkeiten

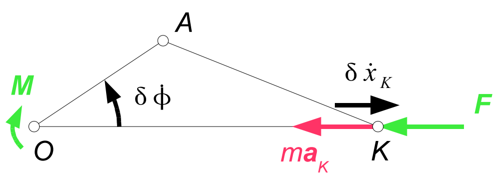
$$\frac{\partial F_1}{\partial\phi}\delta\dot\phi+\frac{\partial F_1}{\partial\psi}\delta\dot\psi+\frac{\partial F_1}{\partial x_K}\delta\dot x_K=0 \quad : \quad R\cos(\phi)\delta\dot\phi-L\cos(\psi)\delta\dot\psi=0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial\phi}\delta\dot\phi+\frac{\partial F_2}{\partial\psi}\delta\dot\psi+\frac{\partial F_2}{\partial x_K}\delta\dot x_K=0 \quad : \quad R\sin(\phi)\delta\dot\phi+L\sin\psi\,\delta\dot\psi+\delta\dot x_K=0$$

c) Beschleunigung des Kolbens

Virtuelle Leistung der eingeprägten Lasten:

$$\delta P=-M\,\delta\dot\phi-F\,\delta\dot x_K$$



Virtuelle Leistung der Trägheitskraft:

$$\delta P_T=-m\,a_K\,\delta\dot x_K$$

Prinzip der virtuellen Leistung:

$$\delta P+\delta P_T=0 \quad\rightarrow\quad -M\,\delta\dot\phi-F\,\delta\dot x_K-m\,a_K\,\delta\dot x_K=0$$

Aus der zweiten Zwangsbedingung für die virtuellen Geschwindigkeiten folgt

$$\delta\dot x_K=-R\sin(\phi)\delta\dot\phi-L\sin(\psi)\delta\dot\psi \quad .$$

Aus der ersten Zwangsbedingung folgt

$$L\,\delta\dot\psi=R\frac{\cos(\phi)}{\cos(\psi)}\delta\dot\phi \quad .$$

Damit gilt:

$$\delta\dot x_K=-R\left[\sin(\phi)+\cos(\phi)\tan(\psi)\right]\delta\dot\phi$$

Einsetzen in das Prinzip der virtuellen Leistung führt auf

$$\left[-M+\left(F+m\,a_K\right)R\left(\sin(\phi)+\cos(\phi)\tan(\psi)\right)\right]\delta\phi=0 \quad .$$

Daraus folgt

$$a_K=\frac{1}{m}\left(\frac{M}{R}\frac{1}{\sin(\phi)+\cos(\phi)\tan(\psi)}-F\right) \quad .$$

Zahlenwert:

$$a_K=\frac{1}{5\,kg}\left(\frac{15\,Nm}{0{,}05\,m}\frac{1}{\sin(30°)+\cos(30°)\tan(10°)}-500\,N\right)=\underline{-8{,}075\,m/s^2}$$