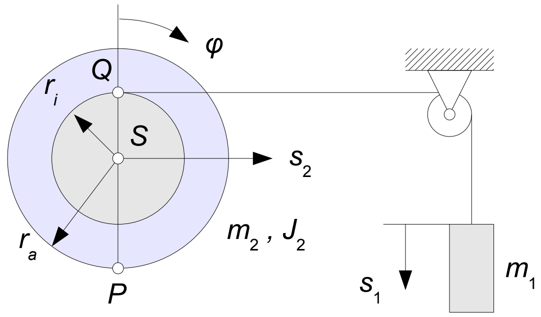
Starrkörperdynamik Lösungsblatt 4.2

Aufgabe 1:

a) Zwangsbedingungen:



Die Trommel dreht sich um den Fußpunkt *P*. Daher gilt für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts

$$\dot{s}_2 = r_a \dot{\phi} \quad .$$

Integration bezüglich der Zeit ergibt als erste Zwangsbedingung

$$F_1(s_1, s_2, \phi) = s_2 - r_a \phi = 0 \quad .$$

Die Geschwindigkeit des Klotzes ist gleich der Geschwindigkeit von Punkt *Q*. Es gilt also

$$\dot{s}_1 = (r_i + r_a)\dot{\phi} \quad .$$

Integration bezüglich der Zeit ergibt als zweite Zwangsbedingung

$$F_2(s_1, s_2, \phi) = s_1 - (r_a + r_i)\phi = 0 \quad .$$

Aus der zweiten Zwangsbedingung folgt

$$\phi = \frac{s_1}{r_a + r_i} \quad .$$

Damit folgt aus der ersten Zwangsbedingung

$$s_2 = \frac{r_a}{r_a + r_i} s_1 \quad .$$

b) Lagrange-Funktion:

Kinetische Energie:

$$T(\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}^2$$

$$\rightarrow \quad T(\dot{s}_1) = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 \left(\frac{r_a}{r_a + r_i}\right)^2 + \frac{J_2}{(r_a + r_i)^2}\right)\dot{s}_1^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2 r_a^2 + J_2}{(r_a + r_i)^2}\right)\dot{s}_1^2$$

Die potenzielle Energie setzt sich zusammen aus der Lageenergie der Masse m_1 und der Federenergie. Wird als Nullniveau für die Lageenergie und die Federenergie die entspannte Ausgangslage gewählt, so gilt:

$$V(s_1, s_2, \phi) = -m_1 g s_1 + \frac{1}{2} c s_2^2 \quad \rightarrow \quad V(s_1) = -m_1 g s_1 + \frac{1}{2} c \left(\frac{r_a}{r_a + r_i} \right)^2 s_1^2$$

Damit lautet die Lagrange-Funktion:

$$L(s_1, \dot{s}_1) = T(\dot{s}_1) - V(s_1) = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_2 r_a^2 + J_2}{(r_a + r_i)^2} \right) \dot{s}_1^2 + m_1 g s_1 - \frac{1}{2} c \left(\frac{r_a}{r_a + r_i} \right)^2 s_1^2$$

c) Bewegungsgleichung:

Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_1} = \left(m_1 + \frac{m_2 r_a^2 + J_2}{(r_a + r_i)^2} \right) \dot{s}_1 \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_1} \right) = \left(m_1 + \frac{m_2 r_a^2 + J_2}{(r_a + r_i)^2} \right) \ddot{s}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = m_1 g - c \left(\frac{r_a}{r_a + r_i} \right)^2 s_1$$

Bewegungsgleichung:

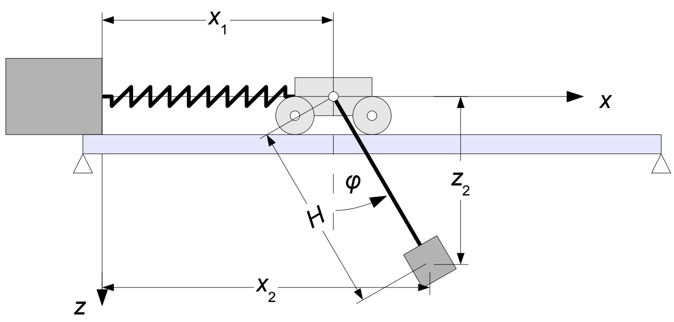
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_1} = 0 \quad : \quad \left(m_1 + \frac{m_2 r_a^2 + J_2}{(r_a + r_i)^2} \right) \ddot{s}_1 - m_1 g + c \left(\frac{r_a}{r_a + r_i} \right)^2 s_1 = 0$$

$$\rightarrow \left[m_1 \left(1 + \frac{r_i}{r_a} \right)^2 + m_2 + \frac{J_2}{r_a^2} \right] \ddot{s}_1 + c s_1 = m_1 g \left(1 + \frac{r_i}{r_a} \right)$$

Aufgabe 2:

a) Koordinaten der Traglast:

$$x_2 = x_1 + H \sin(\phi)$$
$$z_2 = H \cos(\phi)$$



b) Winkelgeschwindigkeit der Räder der Laufkatze:

Aus der Rollbedingung folgt: $v_1 = \omega R \rightarrow \omega = \frac{v_1}{R} = \frac{\dot{x}_1}{R}$

c) <u>Lagrange-Funktion:</u>

Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der translatorischen kinetischen Energie der Laufkatze, der rotatorischen kinetischen Energie der Räder der Laufkatze und der kinetischen Energie der Traglast. In physikalischen Koordinaten gilt:

$$T(\dot{x}_1, \omega, \dot{x}_2, \dot{z}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + 2J\omega^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2\right)$$

Mit $\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2 = \left(\dot{x}_1 + \dot{\phi} H \cos(\phi)\right)^2 + \dot{\phi}^2 H^2 \sin^2(\phi) = \dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 \dot{\phi} H \cos(\phi) + H^2 \dot{\phi}^2$

und $\omega = \dot{x}_1 / R$ folgt:

$$T(\dot{x}_1, \phi, \dot{\phi}) = \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2) + 2\frac{J}{R^2}\right] \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(H^2 \dot{\phi}^2 + 2\dot{x}_1 \dot{\phi} H \cos(\phi)\right) .$$

Die potenzielle Energie setzt sich zusammen aus der Lageenergie der Traglast und der elastischen Energie der Feder. Als Nullniveau für die Lageenergie wird der Ursprung des Koordinatensystems gewählt. Dann gilt in physikalischen Koordinaten:

$$V(x_1, z_2) = \frac{1}{2} c x_1^2 - m_2 g z_2$$

Mit $z_2 = H \cos(\phi)$ folgt daraus:

$$V(x_1, \phi) = \frac{1}{2} c x_1^2 - m_2 g H \cos(\phi)$$

Damit lautet die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L(x_1, \phi, \dot{x}_1, \dot{\phi}) = & \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2) + 2\frac{J}{R^2}\right] \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(H^2 \dot{\phi}^2 + 2\dot{x}_1 H \dot{\phi} \cos(\phi)\right) \\ & - \frac{1}{2} c x_1^2 + m_2 g H \cos(\phi) \end{aligned}$$

d) <u>Bewegungsgleichungen:</u>

Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \left(m_1 + m_2 + 4\frac{J}{R^2}\right) \dot{x}_1 + m_2 H \dot{\phi} \cos(\phi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \left(m_1 + m_2 + 4\frac{J}{R^2}\right) \ddot{x}_1 + m_2 H \left(\ddot{\phi} \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \sin(\phi)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m_2 H \left(H \dot{\phi} + \dot{x}_1 \cos(\phi)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)=m_2 H\left(H\ddot{\phi}+\ddot{x}_1\cos(\phi)-\dot{x}_1\dot{\phi}\sin(\phi)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-c\,x_1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \phi}=-m_2 H\left(\dot{x}_1\dot{\phi}+g\right)\sin(\phi)$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0 \;:\; \left(m_1+m_2+4\frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}_1+m_2 H\left(\ddot{\phi}\cos(\phi)-\dot{\phi}^2\sin(\phi)\right)+c\,x_1=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0 \;:$$

$$m_2 H\left(H\ddot{\phi}+\ddot{x}_1\cos(\phi)-\dot{x}_1\dot{\phi}\sin(\phi)\right)+m_2 H\left(\dot{x}_1\dot{\phi}+g\right)\sin(\phi)=0$$

$$\rightarrow \quad H\ddot{\phi}+\ddot{x}_1\cos(\phi)+g\sin(\phi)=0$$

e) <u>Lineare Näherung:</u>

Für kleine Winkel φ gilt: $\sin(\phi)\approx\phi,\ \cos(\phi)\approx 1$

Wenn zusätzlich die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ klein ist, gilt: $\dot{\phi}^2\sin(\phi)\approx 0$

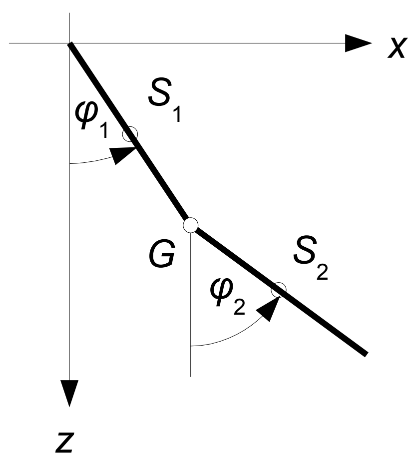
Damit vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned}&\left(m_1+m_2+4\frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}_1+m_2 H\ddot{\phi}+c\,x_1=0\\&\ddot{x}_1+H\ddot{\phi}+g\phi=0\end{aligned} \quad .$$

Die Lösungen dieses gekoppelten homogenen linearen Differenzialgleichungssystems sind freie ungedämpfte Schwingungen.

Aufgabe 3:

a) <u>Koordinaten der Schwerpunkte:</u>



Schwerpunkt S_1:

$$x_1=\frac{a}{2}\sin(\phi_1)$$

$$z_1=\frac{a}{2}\cos(\phi_1)$$

Gelenkpunkt G:

$$x_G=a\sin(\phi_1)$$

$$z_G=a\cos(\phi_1)$$

Schwerpunkt S_2:

$$x_2 = x_G + \frac{a}{2}\sin(\phi_2) = a\left(\sin(\phi_1) + \frac{1}{2}\sin(\phi_2)\right)$$

$$z_2 = z_G + \frac{a}{2}\cos(\phi_2) = a\left(\cos(\phi_1) + \frac{1}{2}\cos(\phi_2)\right)$$

b) <u>Lagrange-Funktion:</u>

<u>Kinetische Energie:</u>

Für die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte gilt:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2} a\,\dot{\phi}_1 \cos(\phi_1) \quad , \quad \dot{z}_1 = -\frac{1}{2} a\,\dot{\phi}_1 \sin(\phi_1)$$

$$\dot{x}_2 = a\left(\dot{\phi}_1 \cos(\phi_1) + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2 \cos(\phi_2)\right) \quad , \quad \dot{z}_2 = -a\left(\dot{\phi}_1 \sin(\phi_1) + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2 \sin(\phi_2)\right)$$

Für die kinetische Energie der Translation gilt:

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2} m a^2 \left(\frac{1}{4}\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{4}\dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \left(\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) + \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\right)\right) \\ &= \frac{1}{8} m a^2 \left(5\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + 4\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\right) \end{aligned}$$

Für die kinetische Energie der Rotation gilt:

$$T_r = \frac{1}{2} J \left(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2\right) = \frac{1}{24} m a^2 \left(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2\right)$$

Damit berechnet sich die gesamte kinetische Energie zu

$$\begin{aligned} T(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2) &= \frac{1}{24} m a^2 \left(16\dot{\phi}_1^2 + 4\dot{\phi}_2^2 + 12\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\right) \\ &= \frac{1}{6} m a^2 \left(4\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + 3\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\right) \end{aligned} \; .$$

<u>Potenzielle Energie:</u>

Die einzige äußere Kraft ist die Gewichtskraft. Der Nullpunkt für das Potenzial der Gewichtskraft wird in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt. Dann gilt:

$$V(x_1, z_1, x_2, z_2) = -mg\,z_1 - mg\,z_2$$

$$V(\phi_1,\phi_2)=-mga\left(\frac{1}{2}\cos(\phi_1)+\cos(\phi_1)+\frac{1}{2}\cos(\phi_2)\right)$$
$$=-\frac{1}{2}mga\left(3\cos(\phi_1)+\cos(\phi_2)\right)$$

Lagrange-Funktion:

Die Lagrange-Funktion lautet:

$$L(\phi_1,\phi_2,\dot\phi_1,\dot\phi_2)=\frac{1}{6}ma^2\left(4\dot\phi_1^2+\dot\phi_2^2+3\dot\phi_1\dot\phi_2\cos(\phi_1-\phi_2)\right)$$
$$+\frac{1}{2}mga\left(3\cos(\phi_1)+\cos(\phi_2)\right)$$

c) Bewegungsgleichungen:

Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_1}=\frac{1}{6}ma^2\left(8\dot\phi_1+3\dot\phi_2\cos(\phi_1-\phi_2)\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_1}\right)=\frac{1}{6}ma^2\left(8\ddot\phi_1+3\ddot\phi_2\cos(\phi_1-\phi_2)-3\dot\phi_2\left(\dot\phi_1-\dot\phi_2\right)\sin(\phi_1-\phi_2)\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial\phi_1}=\frac{1}{2}ma\left(-a\dot\phi_1\dot\phi_2\sin(\phi_1-\phi_2)-3g\sin(\phi_1)\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_2}=\frac{1}{6}ma^2\left(2\dot\phi_2+3\dot\phi_1\cos(\phi_1-\phi_2)\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_2}\right)=\frac{1}{6}ma^2\left(2\ddot\phi_2+3\ddot\phi_1\cos(\phi_1-\phi_2)-3\dot\phi_1\left(\dot\phi_1-\dot\phi_2\right)\sin(\phi_1-\phi_2)\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial\phi_2}=\frac{1}{2}ma\left(a\dot\phi_1\dot\phi_2\sin(\phi_1-\phi_2)-g\sin(\phi_2)\right)$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial\phi_1}=0:$$

$$8\ddot\phi_1+3\ddot\phi_2\cos(\phi_1-\phi_2)+3\dot\phi_2^2\sin(\phi_1-\phi_2)+9\frac{g}{a}\sin(\phi_1)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial\phi_2}=0:$$

$$2\ddot{\phi}_2+3\ddot{\phi}_1\cos(\phi_1-\phi_2)-3\dot{\phi}_1^2\sin(\phi_1-\phi_2)+3\frac{g}{a}\sin(\phi_2)=0$$

Die Lösungen dieses nichtlinearen Gleichungssystems können chaotisches Verhalten zeigen.

d) <u>Lineare Näherung:</u>

Wenn die Winkel klein sind, sind auch die Differenzen zwischen den Winkeln klein. Es gelten folgende Näherungen:

$$\cos(\phi_1-\phi_2)\approx 1 \quad , \quad \dot{\phi}_2^2\sin(\phi_1-\phi_2)\approx 0 \quad , \quad \dot{\phi}_1^2\sin(\phi_1-\phi_2)\approx 0 \quad ,$$

$$\sin(\phi_1)\approx\phi_1\,,\quad \sin(\phi_2)\approx\phi_2$$

Damit vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$8\ddot{\phi}_1+3\ddot{\phi}_2+9\frac{g}{a}\phi_1=0$$

$$3\ddot{\phi}_1+2\ddot{\phi}_2+3\frac{g}{a}\phi_2=0$$

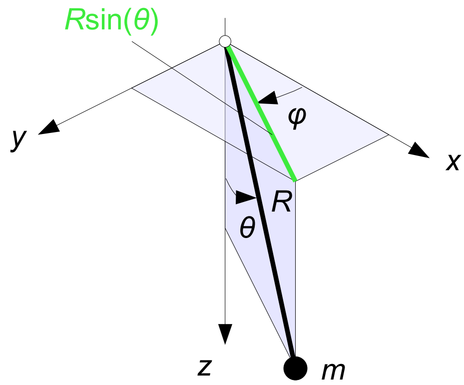
Die Lösungen dieses gekoppelten homogenen linearen Differenzialgleichungssystems sind freie ungedämpfte Schwingungen.

Aufgabe 4:

a) <u>Beziehungen zwischen den Koordinaten:</u>

Aus der Abbildung kann abgelesen werden:

$$x(\theta,\phi)=R\sin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y(\theta,\phi)=R\sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z(\theta,\phi)=R\cos(\theta)$$



b) <u>Lagrange-Funktion:</u>

In kartesischen Koordinaten berechnet sich die kinetische Energie zu

$$T(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$$

Mit $\dot{x}(\theta,\phi,\dot{\theta},\dot{\phi})=R\left(\dot{\theta}\cos(\theta)\cos(\phi)-\dot{\phi}\sin(\theta)\sin(\phi)\right)$

$$\dot{y}(\theta,\phi,\dot{\theta},\dot{\phi})=R\left(\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\phi)+\dot{\phi}\sin(\theta)\cos(\phi)\right)$$

$$\dot{z}(\theta,\phi,\dot{\theta},\dot{\phi})=-R\dot{\theta}\sin(\theta)$$

folgt:

$$\begin{aligned} T(\theta, \phi, \dot\theta, \dot\phi) &= \frac{1}{2} m \left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \Big[\left(\dot\theta \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot\phi \sin(\theta) \sin(\phi) \right)^2 \\ &\qquad + \left(\dot\theta \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot\phi \sin(\theta) \cos(\phi) \right)^2 + \left(\dot\theta \sin(\theta) \right)^2 \Big] \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2(\theta) \right) \end{aligned}$$

Die einzige auf den Massenpunkt wirkende äußere Kraft ist die Gewichtskraft. Wird der Nullpunkt für das Potenzial der Gewichtskraft in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt, dann gilt:

$$V(x, y, z) = -m g z \quad \to \quad V(\theta, \phi) = -m g R \cos(\theta)$$

Damit lautet die Lagrange-Funktion:

$$L(\theta, \phi, \dot\theta, \dot\phi) = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2(\theta) \right) + m g R \cos(\theta)$$

c) <u>Bewegungsgleichungen:</u>

Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m R^2 \dot\theta \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} \right) = m R^2 \ddot\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m R^2 \dot\phi^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - m g R \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = m R^2 \dot\phi \sin^2(\theta) \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} \right) = m R^2 \left(\ddot\phi \sin^2(\theta) + 2 \dot\phi \dot\theta \sin(\theta) \cos(\theta) \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 : \quad m R^2 \ddot\theta - m R^2 \dot\phi^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + m g R \sin(\theta) = 0$$

$$\to \quad \ddot\theta - \dot\phi^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 : \quad \frac{d}{dt} \left(m R^2 \dot\phi \sin^2(\theta) \right) = 0 \quad \to \quad \dot\phi \sin^2(\theta) = C = const.$$

Die Größe

$$L_z = m \left(R \sin(\theta) \right)^2 \dot\phi$$

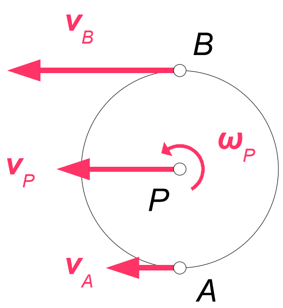
ist der Drall des Massenpunktes um die *z*-Achse. Da die Gewichtskraft kein

Moment um die z-Achse verursacht, ist der Drall um die z-Achse konstant. Daraus folgt insbesondere, dass für $\dot{\phi} \neq 0$ die Winkel $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ nicht angenommen werden können.

Aufgabe 5:

a) <u>Kinematische Beziehungen:</u>

Der Mittelpunkt P des Planetenrads ist mit dem Planetenträger verbunden. Für seine Geschwindigkeit gilt daher



$$v_P = \omega_T r_T \quad .$$

Für die Geschwindigkeiten in den Punkten A und B gilt

$$v_A = v_P - \omega_P r_P = \omega_T r_T - \omega_P r_P$$

und

$$v_B = v_P + \omega_P r_P = \omega_T r_T + \omega_P r_P \quad .$$

Im Punkt A ist das Planetenrad mit dem Sonnenrad in Kontakt. Daher muss gelten:

$$\omega_S r_S = v_A \quad \rightarrow \quad \omega_S r_S = \omega_T r_T - \omega_P r_p$$

Im Punkt B ist das Planetenrad mit dem Hohlrad in Kontakt. Daraus folgt:

$$\omega_H r_H = v_B \quad \rightarrow \quad \omega_H r_H = \omega_T r_T + \omega_P r_P$$

Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt

$$\omega_S r_S + \omega_H r_H = 2\,\omega_T r_T \quad \rightarrow \quad \omega_S = 2\,\omega_T \frac{r_T}{r_S} - \omega_H \frac{r_H}{r_S} \quad .$$

Integration bezüglich der Zeit führt auf

$$\phi_S(\phi_H, \phi_T) = 2\,\phi_T \frac{r_T}{r_S} - \phi_H \frac{r_H}{r_S} \quad .$$

Aus der kinematischen Beziehung im Punkt B folgt unmittelbar

$$\omega_P = \omega_H \frac{r_H}{r_P} - \omega_T \frac{r_T}{r_P} \quad .$$

Integration bezüglich der Zeit führt auf

$$\phi_P(\phi_H, \phi_T) = \phi_H \frac{r_H}{r_P} - \phi_T \frac{r_T}{r_P} \quad .$$

b) <u>Verallgemeinerte Kräfte:</u>

Die verallgemeinerten Kräfte berechnen sich zu

$$Q_H = M_H \frac{\partial \phi_H}{\partial \phi_H} + M_T \frac{\partial \phi_T}{\partial \phi_H} + M_S \frac{\partial \phi_S}{\partial \phi_H} = M_H - \frac{r_H}{r_S} M_S$$

und

$$Q_T = M_H \frac{\partial \phi_H}{\partial \phi_T} + M_T \frac{\partial \phi_T}{\partial \phi_T} + M_S \frac{\partial \phi_S}{\partial \phi_T} = M_T + 2 \frac{r_T}{r_S} M_S \quad .$$

c) <u>Kinetische Energie:</u>

$$T(\omega_H, \omega_T, \omega_S, \omega_P, v_P) = \frac{1}{2} J_H \omega_H^2 + \frac{1}{2} J_T \omega_T^2 + \frac{1}{2} J_S \omega_S^2 + \frac{3}{2} J_P \omega_P^2 + \frac{3}{2} m_P v_P^2$$

Mit den Beziehungen für die Winkelgeschwindigkeiten und die Geschwindigkeit des Planetenträgers folgt daraus

$$\begin{aligned} T(\omega_H, \omega_T) = {} & \frac{1}{2} J_H \omega_H^2 + \frac{1}{2} J_T \omega_T^2 + \frac{1}{2} J_S \left(2 \omega_T \frac{r_T}{r_S} - \omega_H \frac{r_H}{r_S} \right)^2 \\ & + \frac{3}{2} J_P \left(\omega_H \frac{r_H}{r_P} - \omega_T \frac{r_T}{r_P} \right)^2 + \frac{3}{2} m_P \omega_T^2 r_T^2 \\ = {} & \frac{1}{2} \left(J_H + \left(\frac{r_H}{r_S} \right)^2 J_S + 3 \left(\frac{r_H}{r_P} \right)^2 J_P \right) \omega_H^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(J_T + 4 \left(\frac{r_T}{r_S} \right)^2 J_S + 3 \left(\frac{r_T}{r_P} \right)^2 J_P + 3 r_T^2 m_P \right) \omega_T^2 \\ & - \left(2 \frac{r_H r_T}{r_S^2} J_S + 3 \frac{r_H r_T}{r_P^2} J_P \right) \omega_H \omega_T \end{aligned}$$

d) <u>Lagrange-Gleichungen:</u>

Ableitungen der kinetischen Energie:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_H} = \left(\frac{J_H}{r_H^2} + \frac{J_S}{r_S^2} + 3 \frac{J_P}{r_P^2} \right) r_H^2 \omega_H - \left(2 \frac{J_S}{r_S^2} + 3 \frac{J_P}{r_P^2} \right) r_H r_T \omega_T$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_H} \right) = \left(\frac{J_H}{r_H^2} + \frac{J_S}{r_S^2} + 3 \frac{J_P}{r_P^2} \right) r_H^2 \dot{\omega}_H - \left(2 \frac{J_S}{r_S^2} + 3 \frac{J_P}{r_P^2} \right) r_H r_T \dot{\omega}_T \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \phi_H} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_T}=\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)r_T^2\omega_T-\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)r_H r_T\omega_H$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_T}\right)=\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)r_T^2\dot{\omega}_T-\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)r_H r_T\dot{\omega}_H$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_T}=0$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_H}\right)-\frac{\partial T}{\partial \phi_H}=Q_H\ :$$

$$\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)r_H^2\dot{\omega}_H-\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)r_H r_T\dot{\omega}_T=M_H-\frac{r_H}{r_S}M_S$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_T}\right)-\frac{\partial T}{\partial \phi_T}=Q_T\ :$$

$$\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)r_T^2\dot{\omega}_T-\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)r_H r_T\dot{\omega}_H=M_T+2\frac{r_T}{r_S}M_S$$

Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcl}
\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)r_H\dot{\omega}_H & - & \left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)r_T\dot{\omega}_T & = & \frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\\
-\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)r_H\dot{\omega}_H & + & \left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)r_T\dot{\omega}_T & = & \frac{M_T}{r_T}+2\frac{M_S}{r_S}
\end{array}$$

e) <u>Winkelbeschleunigung des Hohlrads</u>

Auflösen der Bewegungsgleichungen nach $\dot{\omega}_H$ ergibt:

$$\left[\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)-\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)^2\right]r_H\dot{\omega}_H$$

$$=\left(\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\right)\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)+\left(\frac{M_T}{r_T}+2\frac{M_S}{r_S}\right)\left(2\frac{J_S}{r_s^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)$$

Der Faktor auf der linken Seite berechnet sich zu

$$\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)-\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)^2$$
$$=\frac{J_H}{r_H^2}\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)+\frac{J_S}{r_S^2}\left(\frac{J_T}{r_T^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)$$
$$+3\frac{J_P}{r_P^2}\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3m_P\right)-12\frac{J_S}{r_S^2}\frac{J_P}{r_P^2}$$
$$=\left(\frac{J_T}{r_T^2}+3m_P\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)+3\frac{J_P}{r_P^2}\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}\right)+4\frac{J_H}{r_H^2}\frac{J_S}{r_S^2}$$

Die rechte Seite berechnet sich zu

$$\left(\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\right)\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)+\left(\frac{M_T}{r_T}+2\frac{M_S}{r_S}\right)\left(2\frac{J_S}{r_s^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)$$
$$=\left(\frac{J_T}{r_T^2}+4\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)\frac{M_H}{r_H}-\left(\frac{J_T}{r_T^2}-3\frac{J_P}{r_P^2}+3m_P\right)\frac{M_S}{r_S}+\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)\frac{M_T}{r_T}\quad .$$
$$=\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)\left(\frac{M_H}{r_H}+\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}\right)+\left(\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}+3m_P\right)\left(\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\right)$$

Damit folgt für die Winkelgeschwindigkeit des Hohlrads:

$$\dot{\omega}_H=\frac{1}{r_H}\frac{\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)\left(\frac{M_H}{r_H}+\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}\right)+\left(\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}+3m_P\right)\left(\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\right)}{\left(\frac{J_T}{r_T^2}+3m_P\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)+3\frac{J_P}{r_P^2}\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}\right)+4\frac{J_H}{r_H^2}\frac{J_S}{r_S^2}}$$

Im stationären Lauf sind die Winkelbeschleunigungen null. Bei vorgegebenem Moment M_H lassen sich die anderen beiden Momente aus den Bewegungsgleichungen berechnen, die sich zu

$$0=\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\quad \text{und}\quad 0=\frac{M_T}{r_T}+2\frac{M_S}{r_S}$$

vereinfachen. Aus der ersten Gleichung folgt $M_S=\frac{r_S}{r_H}M_H$.

Aus der zweiten Gleichung folgt $M_T=-2\frac{r_T}{r_S}M_S=-2\frac{r_T}{r_H}M_H$.