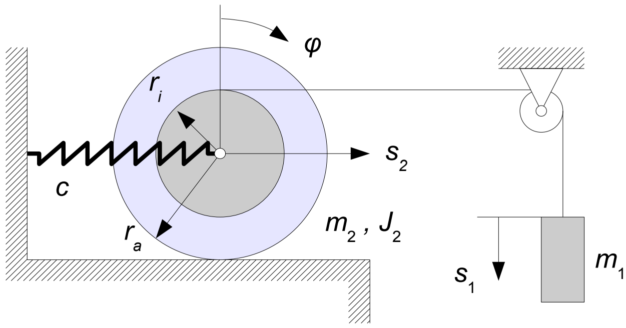
Starrkörperdynamik Übungsblatt 4.2

Aufgabe 1:

Ein Klotz hängt an einem Seil, das über eine masselose Rolle geführt wird und auf einer Trommel aufgewickelt ist. Auf den Klotz wirkt seine Gewichtskraft. Die Trommel wird durch eine elastische Feder mit der Federkonstanten *c* gehalten.



a) Wie lauten die Zwangsbedingungen zwischen den Freiheitsgraden s_1, s_2 und φ?

b) Wie lautet die Lagrange-Funktion, wenn das System durch den Freiheitsgrad s_1 beschrieben wird?

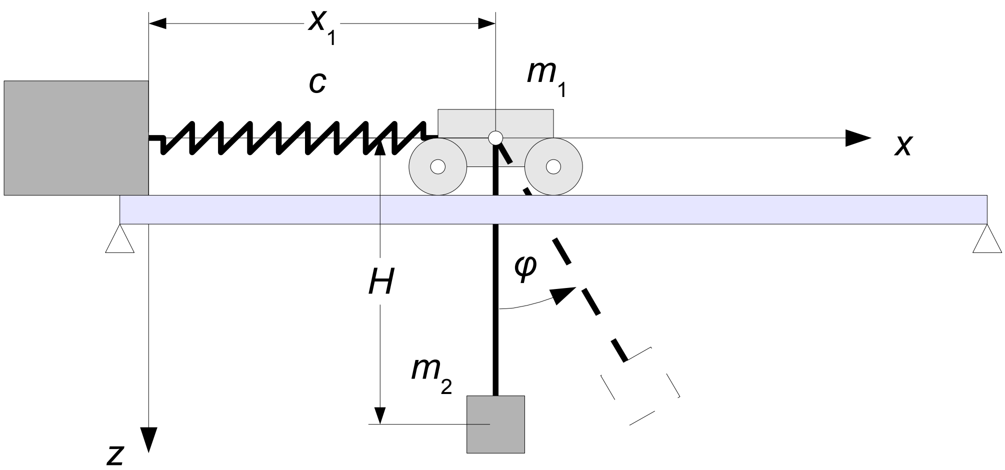
c) Wie lautet die Bewegungsgleichung für den Freiheitsgrad s_1?

(Ergebnis:

$$L(s_1, \dot{s}_1) = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2 r_a^2 + J_2}{(r_a + r_i)^2}\right)\dot{s}_1^2 + m_1 g s_1 - \frac{1}{2} c \left(\frac{r_a}{r_a + r_i}\right)^2 s_1^2 \quad ,$$

$$\left[m_1\left(1 + \frac{r_i}{r_a}\right)^2 + m_2 + \frac{J_2}{r_a^2}\right]\ddot{s}_1 + c s_1 = m_1 g \left(1 + \frac{r_i}{r_a}\right)^2 \quad)$$

Aufgabe 2:



Der abgebildete Brückenkran besteht aus einem als starr angenommenen Träger, auf dem sich die Laufkatze bewegt. Die Laufkatze hat die Gesamtmasse m_1. Jedes der vier Räder der Laufkatze hat den Radius R und das Massenträgheitsmoment J um die Achse. Die Laufkatze rollt auf dem Träger.

Die Elastizität des Antriebs wird durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten c abgebildet.

An der Laufkatze ist gelenkig ein starrer masseloser Träger der Länge H befestigt, an dessen Ende sich die Traglast m_2 befindet.

Das System wird durch die beiden verallgemeinerten Koordinaten x_1 und φ beschrieben. Dabei gibt x_1 die Lage der Laufkatze und der Winkel φ die Auslenkung der Traglast an.

a) Welche Beziehung besteht zwischen den verallgemeinerten Koordinaten und den Koordinaten x_2 und z_2 der Traglast?

b) Welche Beziehung besteht zwischen der Geschwindigkeit v_1 der Laufkatze und der Winkelgeschwindigkeit ω ihrer Räder?

c) Wie lautet die Lagrange-Funktion bei ausgeschaltetem Antrieb?

d) Wie lauten die Bewegungsgleichungen bei ausgeschaltetem Antrieb?

e) Welche lineare Näherung gilt für kleine Winkel und kleine Winkelgeschwindigkeiten der Traglast?

(Ergebnis: Lagrange-Funktion:

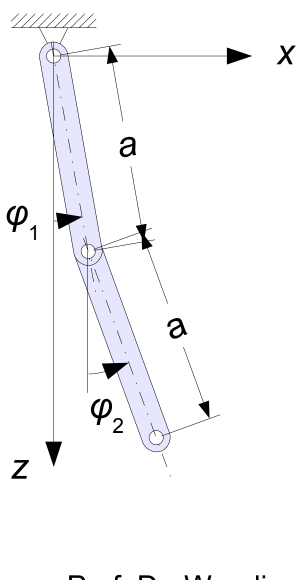
$$L(x_1, \phi, \dot{x}_1, \phi) = \left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)+2\frac{J}{R^2}\right]\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\left(H^2\phi^2+2\dot{x}_1 H\phi\cos(\phi)\right) - \frac{1}{2}c\,x_1^2+m_2 g H\cos(\phi)$$
)

Aufgabe 3:

Das abgebildete Doppelpendel besteht aus einem gelenkig aufgehängten homogenen starren Stab, an dessen unterem Ende ein zweiter homogener starrer Stab gelenkig angehängt ist. Beide Stäbe haben die gleiche Länge a, die gleiche Masse m und das gleiche Massenträgheitsmoment

$$J = \frac{1}{12} m a^2$$

um ihren Schwerpunkt.



Die ausgelenkte Lage des Doppelpendels wird durch die Winkel φ_1 und φ_2 beschrieben, die beide gegenüber der senkrechten Ausgangslage gemessen werden.

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2 und den Koordinaten (x_1, z_1) und (x_2, z_2) der Schwerpunkte der beiden Stäbe?

b) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Systems?

c) Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Systems?

d) Welche lineare Näherung gilt für kleine Winkel und kleine Winkelgeschwindigkeiten?

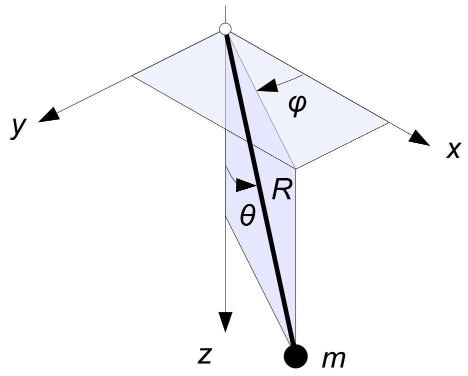
(Ergebnis: Lagrange-Funktion:

$$L(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2) = \frac{1}{6} m a^2 \left(4\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + 3\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\right) + \frac{1}{2} m g a \left(3\cos\phi_1 + \cos\phi_2\right)$$

)

Aufgabe 4:

Das abgebildete sphärische Pendel besteht aus einem Massenpunkt der Masse m, der an einem dehnstarren Faden der Länge R hängt. Der Massenpunkt bewegt sich auf einer Kugelfläche, in deren Mittelpunkt sich der Aufhängepunkt befindet. Die Lage des Massenpunktes wird durch die beiden Winkel θ und φ beschrieben.



a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den kartesischen Koordinaten x, y und z des Massenpunktes und den Winkeln θ und φ?

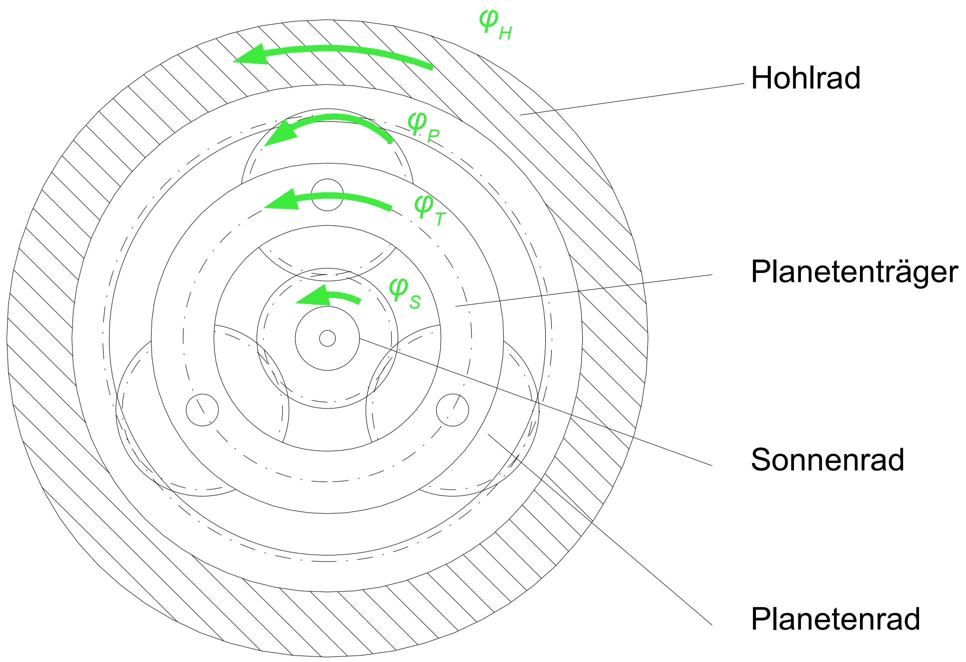
b) Wie lautet die Lagrange-Funktion?

c) Wie lauten die Bewegungsgleichungen?

(Ergebnis: Lagrange-Funktion:

$$L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)\right) + m g R \cos(\theta)$$)

Aufgabe 5:



Das abgebildete Planetengetriebe besteht aus dem Hohlrad mit Innenradius r_H, dem Sonnenrad mit Radius r_S, drei Planetenrädern mit Radius r_P sowie dem Planetenträger. Die Mittelpunkte der Planetenräder liegen auf einem Kreis mit Radius r_T. Das Sonnenrad dreht sich um seinen ortsfesten Mittelpunkt.

Das Planetengetriebe wird durch die Freiheitsgrade φ_H (Winkel des Hohlrads), φ_P (Winkel eines Planetenrads), φ_T (Winkel des Planetenträgers) und φ_S (Winkel des Sonnenrads) beschrieben.

Am Hohlrad greift das Moment M_H, am Planetenträger das Moment M_T und am Sonnenrad das Moment M_S an.

Winkelgeschwindigkeiten und Momente sind positiv im Gegenuhrzeigersinn.

Das Hohlrad hat die Masse m_H, das Planetenrad die Masse m_P, der Planetenträger die Masse m_T und das Sonnenrad die Masse m_S. Die entsprechenden Massenträgheitsmomente werden mit J_H, J_P, J_T und J_S bezeichnet.

a) Als verallgemeinerte Freiheitsgrade werden die Winkel φ_H und φ_T gewählt. Ermitteln Sie die Funktionen $\varphi_S(\varphi_H, \varphi_T)$ und $\varphi_P(\varphi_H, \varphi_T)$. Welche Beziehungen ergeben sich für die Winkelgeschwindigkeiten ω_S und ω_P sowie die Geschwindigkeit v_P des Planetenrads?

b) Wie lauten die verallgemeinerten Kräfte Q_H und Q_T?

c) Ermitteln Sie die kinetische Energie $T(\omega_H, \omega_T)$?

d) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen auf.

e) Wie groß ist die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_H$ des Hohlrads?

(Ergebnis:

$$\dot{\omega}_H = \frac{1}{r_H} \frac{\left(2\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)\left(\frac{M_H}{r_H}+\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}\right)+\left(\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}+3m_P\right)\left(\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\right)}{\left(\frac{J_T}{r_T^2}+3m_P\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)+3\frac{J_P}{r_P^2}\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}\right)+4\frac{J_H}{r_H^2}\frac{J_S}{r_S^2}}$$)