1. Kinematik

1.1 Lage

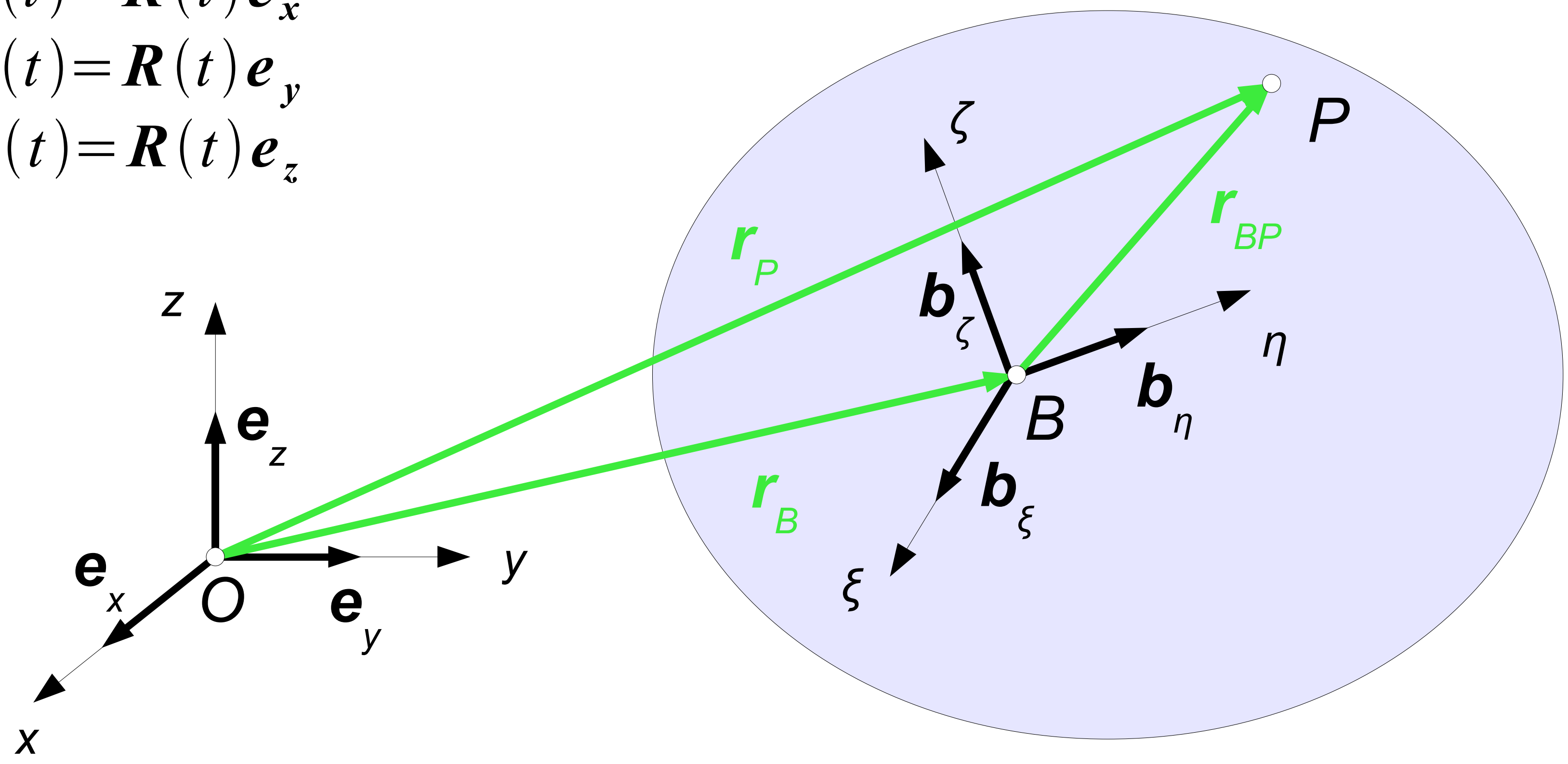
- Aus den Eigenschaften des starren Körpers folgt:
  - Wird an einem beliebigen Punkt B des starren Körpers ein kartesisches Koordinatensystem $B\xi\eta\zeta$ aufgetragen, so bleibt dieses Koordinatensystem bei allen Bewegungen des Körpers ein kartesisches.
- Position:
  - Die Position des starren Körpers wird durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_B$ des Punktes B beschrieben.
  - Der Ursprung O des ortsfesten Koordinatensystems wird so gewählt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Punkte B und O zusammenfallen.

1.1 Lage

- Orientierung:
  - Die Orientierung des Körpers im Raum wird durch den Drehtensor $\boldsymbol{R}$ beschrieben, der die Einheitsvektoren des ortsfesten Koordinatensystems $Oxyz$ auf die Einheitsvektoren des körperfesten Koordinatensystems $B\xi\eta\zeta$ abbildet.
  - Die Achsen der Koordinatensysteme werden so gewählt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ beide Koordinatensysteme identisch sind. Dann gilt: $\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{I}$

1.1 Lage

$$\boldsymbol{b}_\xi(t) = \boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{e}_x$$
$$\boldsymbol{b}_\eta(t) = \boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{e}_y$$
$$\boldsymbol{b}_\zeta(t) = \boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{e}_z$$



1.1 Lage

- Ortsvektor eines beliebigen Punktes *P* auf dem Körper:

$$\boldsymbol{r}_P(t)=\boldsymbol{r}_B(t)+\boldsymbol{r}_{BP}(t)$$

  - Im körperfesten Koordinatensystem *Bξηζ* gilt

$$\boldsymbol{r}_{BP}(t)=\xi\,\boldsymbol{b}_\xi(t)+\eta\,\boldsymbol{b}_\eta(t)+\zeta\,\boldsymbol{b}_\zeta(t)$$

    mit konstanten Koordinaten (*ξ* , *η* , *ζ*).
  - Damit lautet der Ortsvektor:

$$\boldsymbol{r}_P(t)=\boldsymbol{r}_B(t)+\boldsymbol{R}(t)\left(\xi\,\boldsymbol{e}_x+\eta\,\boldsymbol{e}_y+\zeta\,\boldsymbol{e}_z\right)$$

  - Wenn $\boldsymbol{r}_B$ und $\boldsymbol{R}$ gegeben sind, liegt der Ortsvektor für jeden beliebigen Punkt *P* = (*ξ* , *η* , *ζ*) auf dem Körper zu jedem Zeitpunkt fest.

1.1 Lage

- Lageparameter:
  - Der Ortsvektor $\boldsymbol{r}_B(t)$ des Punktes *B* ist durch die drei Koordinaten $x_B(t), y_B(t), z_B(t)$ festgelegt.
  - Der Drehtensor $\boldsymbol{R}(t)$ hat die Form

$$\boldsymbol{R} = \cos(\phi)\boldsymbol{I} + \left(1 - \cos(\phi)\right)\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{e} + \sin(\phi)\tilde{\boldsymbol{e}}$$

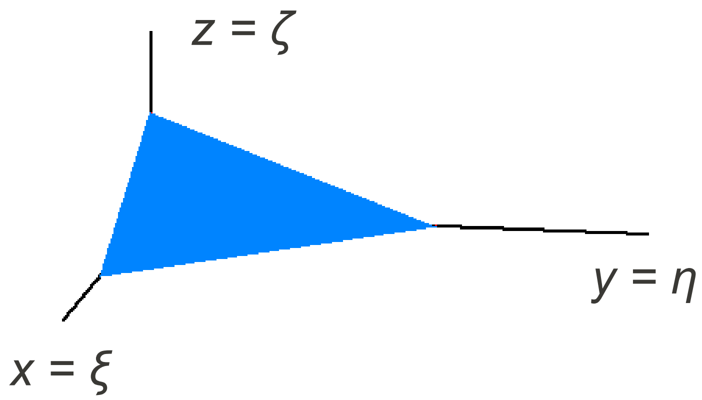
  - Er hängt ab vom Drehwinkel φ und dem Einheitsvektor ***e***, der die Drehachse beschreibt.
  - Der Einheitsvektor wird durch Angabe von zwei Parametern, z.B. zwei Winkel, festgelegt.
  - Damit lässt sich der Drehtensor durch Angabe von drei Parametern beschreiben.

1.1 Lage

- Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Parameter zu wählen.
- Gebräuchliche Parameter sind z.B.
  - Euler-Winkel
  - Kardan-Winkel
  - Rodrigues-Parameter
- Position und Orientierung eines starren Körpers im Raum können durch Angabe von insgesamt 6 Parametern eindeutig festgelegt werden.

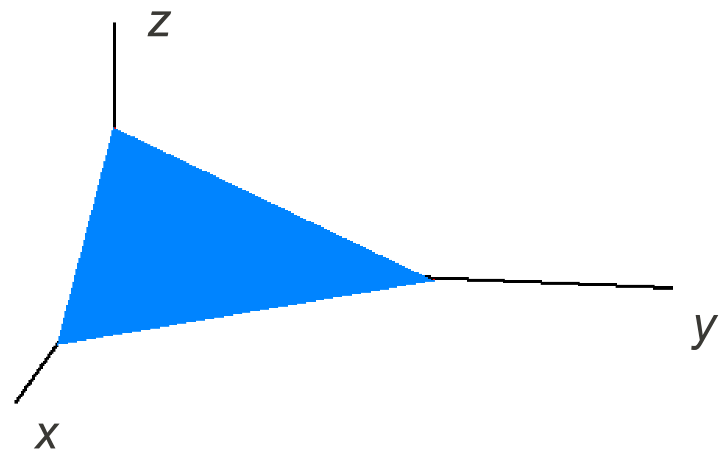
1.1 Lage

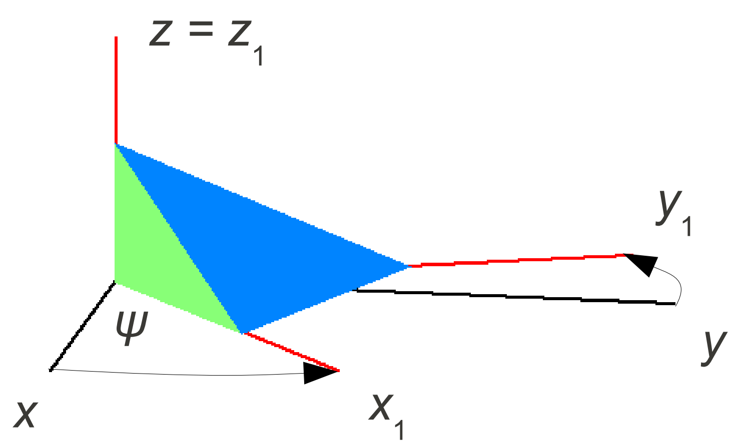
- Euler-Winkel:
  - Das Koordinatensystem *Oxyz* wird durch drei hintereinander ausgeführte Drehungen um Körperachsen in ihrer aktuellen Lage in das Koordinatensystem *Bξηζ* überführt.
  - Ausgangszustand:
    - Die Körperachsen stimmen mit den Achsen des Systems *Oxyz* überein.



1.1 Lage

- Drehung um die z-Achse um den Winkel ψ:
  - Die Körperachsen werden auf die Achsen des Koordinatensystems $Ox_1y_1z_1$ abgebildet.
  - Die Abbildung wird durch den Drehtensor $\boldsymbol{R}_\psi$ beschrieben.





1.1 Lage

- Für den Drehtensor gilt:

$$\boldsymbol{R}_\psi = \cos(\psi)\,\boldsymbol{I} + \left(1-\cos(\psi)\right)\boldsymbol{e}_z\,\boldsymbol{e}_z + \sin(\psi)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_z$$

- Komponenten im Koordinatensystem *Oxyz*:

$$\left[\boldsymbol{e}_z\right]_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\boldsymbol{e}_z\,\boldsymbol{e}_z\right]_O = \left[\boldsymbol{e}_z\right]_O \left[\boldsymbol{e}_z\right]_O^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\tilde{\boldsymbol{e}}_z\right]_O = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1 Lage

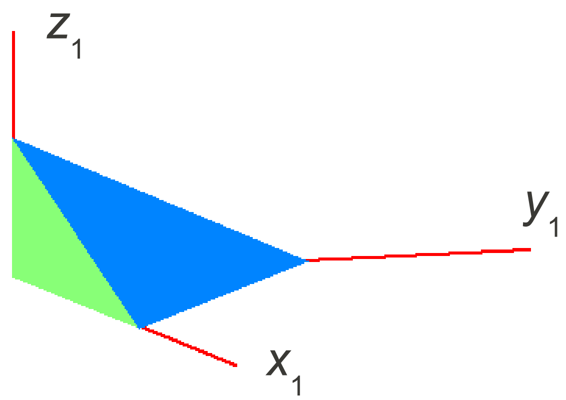
- Ein körperfester Punkt *P* befindet sich nach der Drehung an der Stelle *P*'.
- Für die Koordinaten gilt: $[\boldsymbol{x}_{P'}]_O = [\boldsymbol{R}_\Psi]_O [\boldsymbol{x}_P]_O , \quad [\boldsymbol{x}_{P'}]_1 = [\boldsymbol{x}_P]_O$
- Aus $[\boldsymbol{x}_{P'}]_O = [\boldsymbol{T}]_{O1} [\boldsymbol{x}_{P'}]_1 = [\boldsymbol{T}]_{O1} [\boldsymbol{x}_P]_O$

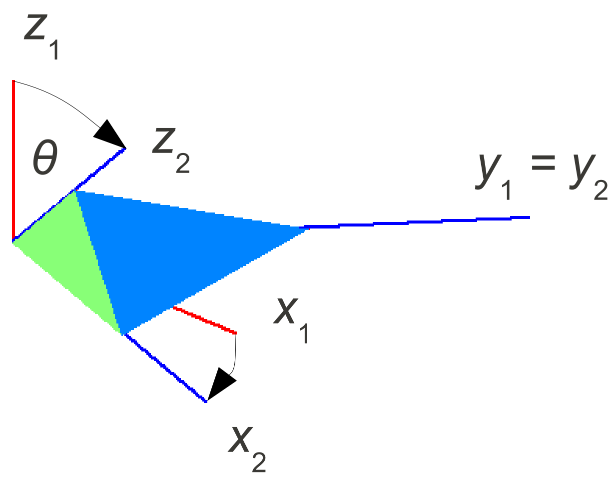
  folgt für die Transformationsmatrix vom Koordinatensystem $Ox_1y_1z_1$ in das Koordinatensystem *Oxyz*:

$$[\boldsymbol{T}]_{O1} = [\boldsymbol{R}_\Psi]_O$$

1.1 Lage

– Drehung um die y_1-Achse um den Winkel θ:
  - Die Körperachsen werden auf die Achsen des Koordinatensystems $Ox_2y_2z_2$ abgebildet.
  - Die Abbildung wird durch den Drehtensor $\boldsymbol{R}_\theta$ beschrieben.





1.1 Lage

- Für den Drehtensor gilt:

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\theta}} = \cos(\theta)\,\boldsymbol{I} + \left(1 - \cos(\theta)\right)\boldsymbol{b}_{1y}\,\boldsymbol{b}_{1y} + \sin(\theta)\,\tilde{\boldsymbol{b}}_{1y}$$

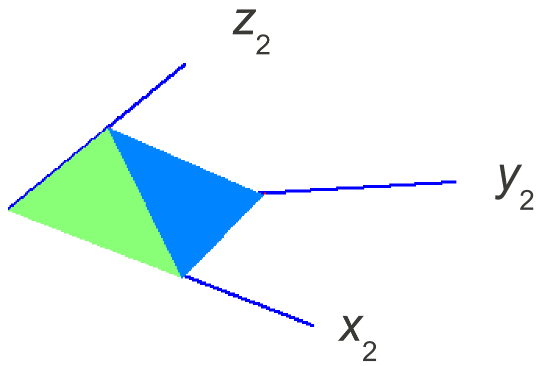
- Komponenten im Koordinatensystem $Ox_1y_1z_1$:

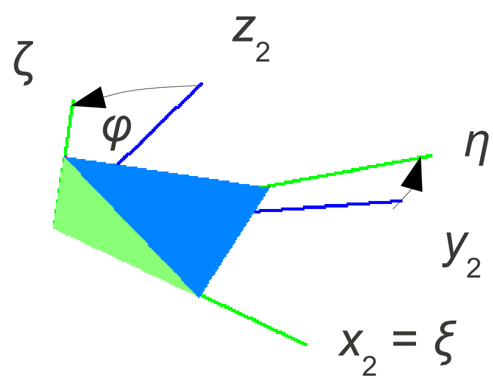
$$\left[\boldsymbol{b}_{1y}\right]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\boldsymbol{b}_{1y}\,\boldsymbol{b}_{1y}\right]_1 = \left[\boldsymbol{b}_{1y}\right]_1 \left[\boldsymbol{b}_{1y}\right]_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\tilde{\boldsymbol{b}}_{1y}\right]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \left[\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\theta}}\right]_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{T}\right]_{12}$$

1.1 Lage

- Drehung um die x_2-Achse um den Winkel φ:
  - Die Körperachsen werden auf die Achsen des Koordinatensystems $B\xi\eta\zeta$ abgebildet.
  - Die Abbildung wird durch den Drehtensor $\boldsymbol{R}_\varphi$ beschrieben.





1.1 Lage

- Für den Drehtensor gilt:

$$\boldsymbol{R}_{\phi} = \cos(\phi)\,\boldsymbol{I} + \left(1-\cos(\phi)\right)\boldsymbol{b}_{2x}\boldsymbol{b}_{2x} + \sin(\phi)\,\tilde{\boldsymbol{b}}_{2x}$$

- Komponenten im Koordinatensystem $Ox_2y_2z_2$:

$$\left[\boldsymbol{b}_{2x}\right]_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\boldsymbol{b}_{2x}\boldsymbol{b}_{2x}\right]_2 = \left[\boldsymbol{b}_{2x}\right]_2 \left[\boldsymbol{b}_{2x}\right]_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\tilde{\boldsymbol{b}}_{2x}\right]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \left[\boldsymbol{R}_{\phi}\right]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{T}\right]_{2B}$$

1.1 Lage

- Für den gesamten Drehtensor gilt: $\boldsymbol{R}(\psi, \theta, \phi) = \boldsymbol{R}_{\phi} \boldsymbol{R}_{\theta} \boldsymbol{R}_{\psi}$
- Für seine Komponenten im Koordinatensystem *Oxyz* gilt:

$$[\boldsymbol{R}]_O = [\boldsymbol{T}]_{OB} = [\boldsymbol{T}]_{O1} [\boldsymbol{T}]_{12} [\boldsymbol{T}]_{2B} = [\boldsymbol{R}_{\psi}]_O [\boldsymbol{R}_{\theta}]_1 [\boldsymbol{R}_{\phi}]_2$$

$$\rightarrow [\boldsymbol{R}]_O = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

- Ausrechnen ergibt:

$$[\boldsymbol{R}]_O = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) - \cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

1.1 Lage

- Die angegebene Definition der Euler-Winkel ist in der Fahrzeugtechnik und in der Luftfahrt üblich.
- Daneben finden sich in der Literatur auch andere Definitionen der Euler-Winkel, die zu anderen Formeln führen.
- Linearisierung:
  - Für kleine Winkel vereinfacht sich die Matrix zu

$$\left[\boldsymbol{R}^{L}\right]_{O}=\begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix}$$

  - Dabei sind die Winkel im Bogenmaß zu nehmen.

1.1 Lage

- Die linearisierte Matrix setzt sich zusammen aus der Einheitsmatrix und drei antimetrischen Matrizen:

$$\left[\boldsymbol{R}^L\right]_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \phi$$

$$\rightarrow \left[\boldsymbol{R}^L\right]_O = \left[\boldsymbol{I}\right] + \left[\tilde{\boldsymbol{e}}_z\right]\psi + \left[\tilde{\boldsymbol{e}}_y\right]\theta + \left[\tilde{\boldsymbol{e}}_x\right]\phi$$

- Die antimetrischen Matrizen stellen kleine Drehungen um die *z*-, *y*- und *x*-Achse des Systems *Oxyz* dar.
- Bei kleinen Drehungen addieren sich die Matrizen der Teildrehungen zur Gesamtmatrix.

1.2 Geschwindigkeit

- Absolutgeschwindigkeit eines Punktes auf dem Körper:
  - Da der Körper starr ist, hat ein beliebiger Punkt *P* im körperfesten Bezugssystem *Bξηζ* keine Relativgeschwindigkeit.
  - Die Absolutgeschwindigkeit stimmt mit der Führungsgeschwindigkeit überein:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}$$

1.2 Geschwindigkeit

- Winkelgeschwindigkeit:
  - Für den Tensor der Winkelgeschwindigkeit gilt: $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{R}^T$
  - Seine Komponenten im ortsfesten System *Oxyz* sind

$$[\boldsymbol{\Omega}]_O = [\dot{\boldsymbol{R}}]_O [\boldsymbol{R}]_O^T$$

  - Mit $[\boldsymbol{R}]_O = [\boldsymbol{R}_\psi]_O [\boldsymbol{R}_\theta]_1 [\boldsymbol{R}_\phi]_2$ berechnet sich die Ableitung zu

$$[\dot{\boldsymbol{R}}]_O = [\dot{\boldsymbol{R}}_\psi]_O [\boldsymbol{R}_\theta]_1 [\boldsymbol{R}_\phi]_2 + [\boldsymbol{R}_\psi]_O [\dot{\boldsymbol{R}}_\theta]_1 [\boldsymbol{R}_\phi]_2 + [\boldsymbol{R}_\psi]_O [\boldsymbol{R}_\theta]_1 [\dot{\boldsymbol{R}}_\phi]_2$$

1.2 Geschwindigkeit

- Einsetzen ergibt

$$
\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{\Omega}\right]_O =& \left[\dot{\boldsymbol{R}}_\psi\right]_O \left[\boldsymbol{R}_\theta\right]_1 \left[\boldsymbol{R}_\phi\right]_2 \left[\boldsymbol{R}_\phi\right]_2^T \left[\boldsymbol{R}_\theta\right]_1^T \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O^T \\
& + \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O \left[\dot{\boldsymbol{R}}_\theta\right]_1 \left[\boldsymbol{R}_\phi\right]_2 \left[\boldsymbol{R}_\phi\right]_2^T \left[\boldsymbol{R}_\theta\right]_1^T \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O^T \\
& + \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O \left[\boldsymbol{R}_\theta\right]_1 \left[\dot{\boldsymbol{R}}_\phi\right]_2 \left[\boldsymbol{R}_\phi\right]_2^T \left[\boldsymbol{R}_\theta\right]_1^T \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O^T \\
=& \left[\dot{\boldsymbol{R}}_\psi\right]_O \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O^T + \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O \left[\dot{\boldsymbol{R}}_\theta\right]_1 \left[\boldsymbol{R}_\theta\right]_1^T \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O^T \\
& + \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O \left[\boldsymbol{R}_\theta\right]_1 \left[\dot{\boldsymbol{R}}_\phi\right]_2 \left[\boldsymbol{R}_\phi\right]_2^T \left[\boldsymbol{R}_\theta\right]_1^T \left[\boldsymbol{R}_\psi\right]_O^T \\
=& \left[\boldsymbol{\Omega}_\psi\right]_O + \left[\boldsymbol{T}\right]_{O1} \left[\boldsymbol{\Omega}_\theta\right]_1 \left[\boldsymbol{T}\right]_{O1}^T + \left[\boldsymbol{T}\right]_{O1} \left[\boldsymbol{T}\right]_{12} \left[\boldsymbol{\Omega}_\phi\right]_2 \left[\boldsymbol{T}\right]_{12}^T \left[\boldsymbol{T}\right]_{O1}^T \\
=& \left[\boldsymbol{\Omega}_\psi\right]_O + \left[\boldsymbol{\Omega}_\theta\right]_O + \left[\boldsymbol{\Omega}_\phi\right]_O
\end{aligned}
$$

- Die Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Drehungen addieren sich.

1.2 Geschwindigkeit

- Für die zugehörigen Vektoren der Winkelgeschwindigkeit gilt:

$$[\boldsymbol{\omega}_\psi]_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\omega}_\theta]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\omega}_\phi]_2 = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Umrechnung in das Koordinatensystem *Oxyz* ergibt:

$$[\boldsymbol{\omega}_\theta]_O = [\boldsymbol{T}]_{O1} [\boldsymbol{\omega}_\theta]_1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi) \\ \cos(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}$$

1.2 Geschwindigkeit

$$[\boldsymbol{\omega}_\phi]_1 = [\boldsymbol{T}]_{12}[\boldsymbol{\omega}_\phi]_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

$$[\boldsymbol{\omega}_\phi]_O = [\boldsymbol{T}]_{O1}[\boldsymbol{\omega}_\phi]_1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) \\ \sin(\psi)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

1.2 Geschwindigkeit

- Damit gilt im ortsfesten Koordinatensystem *Oxyz*:

$$[\boldsymbol{\omega}]_O = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi) & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

- Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System *Bξηζ* berechnen sich aus

zu $$[\boldsymbol{\omega}]_B = [\boldsymbol{T}]_{OB}^T [\boldsymbol{\omega}]_O$$

$$[\boldsymbol{\omega}]_B = \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

1.2 Geschwindigkeit

- Auflösen der letzten Gleichung nach den Ableitungen der Euler-Winkel ergibt

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos(\theta)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}$$

- Aus diesem nichtlinearen Differenzialgleichungssystem können die Euler-Winkel bei gegebenen Winkelgeschwindigkeiten ermittelt werden.
- Für $\theta = \pm\pi/2$ können die Gleichungen nicht aufgelöst werden.

1.2 Geschwindigkeit

- Wenn diese Winkel auftreten können, müssen besondere Vorkehrungen getroffen werden.
- Das Problem lässt sich umgehen, wenn zur Beschreibung der Orientierung des Körpers im Raum vier Euler-Parameter oder Quaternionen verwendet werden.
- Für kleine Winkel können die Gleichungen wieder linearisiert werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ 0 & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}$$