2. Impuls- und Drallsatz

- Einleitung:
  - Aus den kinematischen Beziehungen $\dot{\boldsymbol{r}}_B = \boldsymbol{v}_B$ und

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos(\theta)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}$$

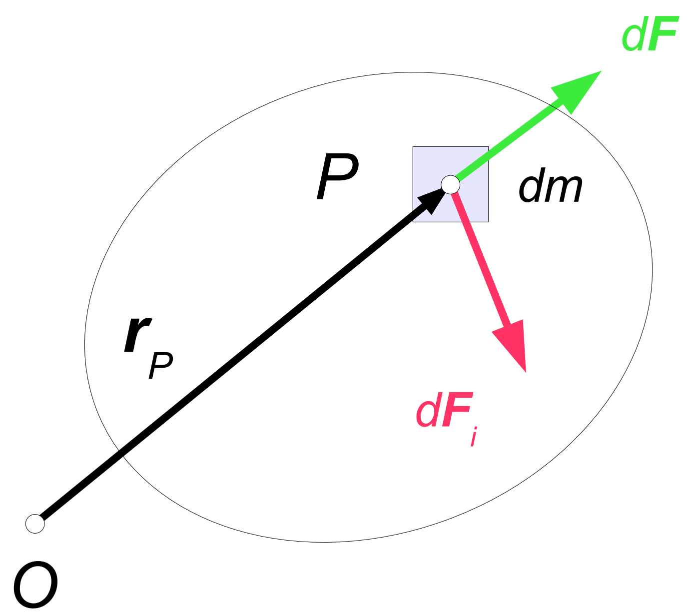
    lassen sich der Ort des Bezugspunktes *B* und die Euler-Winkel ermitteln, wenn die Geschwindigkeit des Bezugspunktes und die Winkelgeschwindigkeit bekannt sind.
  - Um diese Größen zu bestimmen, werden sechs weitere Gleichungen benötigt.

2. Impuls- und Drallsatz

- Der Impulssatz stellt eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten und den am starren Körper angreifenden Kräften her.
- Der Drallsatz stellt eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten und den am starren Körper angreifenden Momenten her.
- Impuls- und Drallsatz liefern die fehlenden sechs Gleichungen.
- Impuls- und Drallsatz für den starren Körper lassen sich aus dem Impulssatz für ein Massenelement herleiten.

2. Impuls- und Drallsatz

- Impulssatz:
  - Am freigeschnittenen Massenelement *dm* wirken
    - die äußeren Kräfte $d\boldsymbol{F}$
    - die inneren Kräfte $d\boldsymbol{F}_i$
    - Die inneren Kräfte sind die Kräfte, die die benachbarten Massenelemente auf das betrachtete Massenelement ausüben.



2. Impuls- und Drallsatz

- Der Impulssatz für das Massenelement lautet:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P\, dm = d\,\boldsymbol{F} + d\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$$

- Integration über den Körper ergibt

$$\int_K \ddot{\boldsymbol{r}}_P\, dm = \int_K d\,\boldsymbol{F} + \int_K d\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$$

- Wegen Actio = Reactio verschwindet das Integral der inneren Kräfte:

$$\int_K d\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{0}$$

- Das Integral über die äußeren Kräfte ergibt die resultierende Kraft:

$$\int_K d\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}$$

- Aus der Definition des Schwerpunkts,

$$m\,\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{S}} = \int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{P}}\, dm\,,$$

folgt:

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \int_K \ddot{\boldsymbol{r}}_P\, dm$$

- Damit lautet der Impulssatz für den Körper:

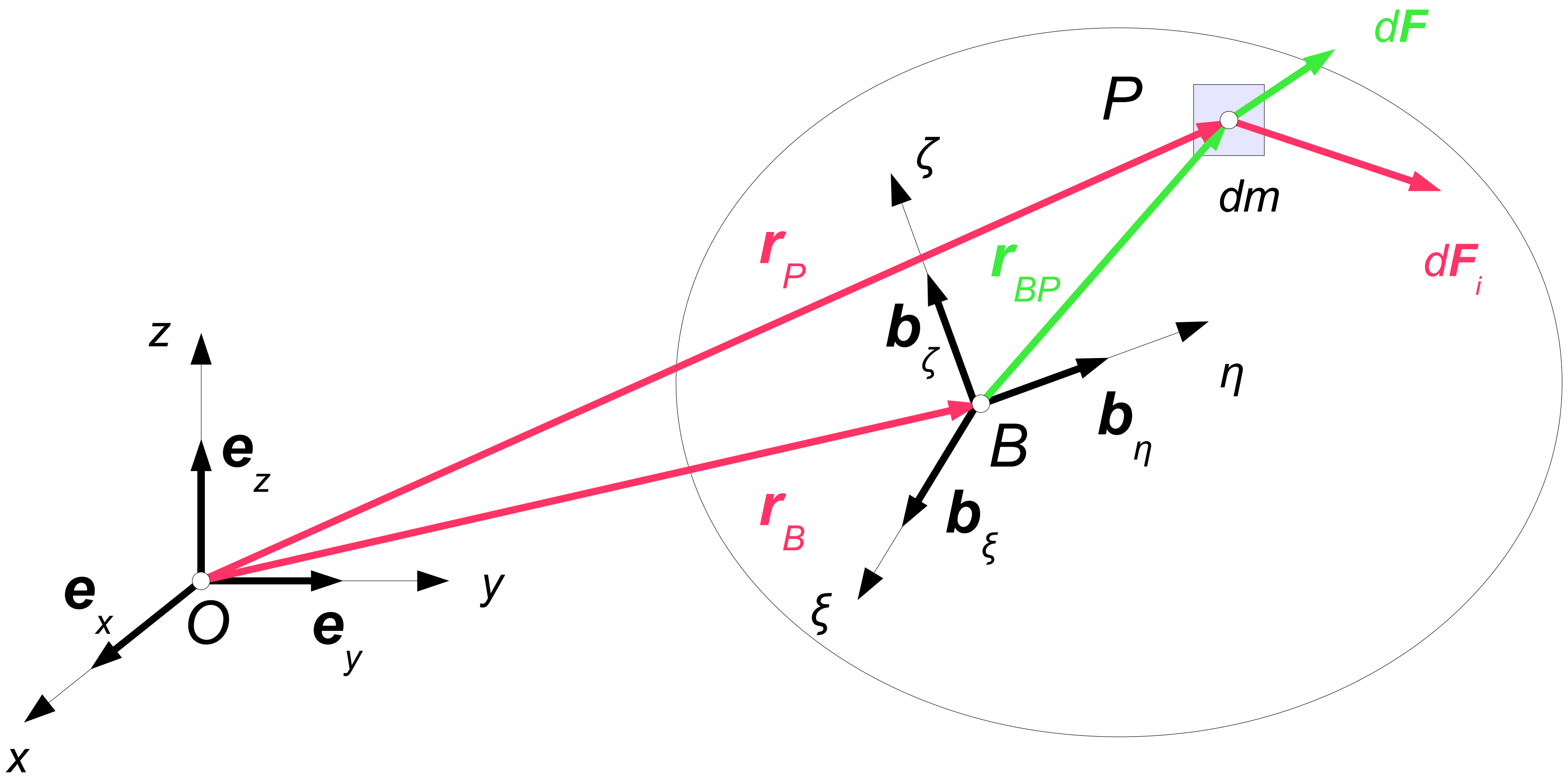
$$\boxed{m\,\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \boldsymbol{F}}$$

- Der Schwerpunkt eines starren Körpers bewegt sich so, als ob alle Kräfte an ihm angriffen und die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre.
- Der Impulssatz für den starren Körper wird daher auch als Schwerpunktsatz bezeichnet.
- Wird als Bezugspunkt der Schwerpunkt gewählt, so gilt:

$$m\,\dot{\boldsymbol{v}}_B = m\,\dot{\boldsymbol{v}}_S = \boldsymbol{F}$$

2. Impuls- und Drallsatz

- Drallsatz:



2. Impuls- und Drallsatz

- Der Impulssatz für das Massenelement lautet:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P \, dm = \dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{P}} \, dm = d\,\boldsymbol{F} + d\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$$

- Daraus folgt: $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P \, dm = \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times d\,\boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times d\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$

- Integration über den Körper ergibt:

$$\int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P \, dm = \int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times d\,\boldsymbol{F} + \int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times d\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$$

- Wegen Actio = Reactio heben sich die Beiträge der inneren Kräfte auf:

$$\int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \boldsymbol{d}\,F_i = \boldsymbol{0}$$

2. Impuls- und Drallsatz

- Die Beiträge der äußeren Kräfte summieren sich zu dem resultierenden Moment der äußeren Kräfte um den Punkt *B*:

$$\int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \boldsymbol{d}\, F = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B}}$$

- Damit bleibt: $\int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P \, dm = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B}}$

- Es gilt: $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}}\right) - \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{BP}} \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}}$

- Mit $\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{BP}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}}$ und $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}}$

  folgt: $\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{BP}} \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} = \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}}\right) \times \left(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}}\right) = \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}}\right) \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}}$

2. Impuls- und Drallsatz

- Damit berechnet sich das Integral zu

$$\int_K \boldsymbol{r}_{BP} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P \, dm = \int_K \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P \right) dm - \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_K \boldsymbol{r}_{BP} \, dm \right) \times \boldsymbol{v}_B$$

$$= \frac{d}{dt} \int_K \left(\boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P \right) dm - \left(\boldsymbol{\omega} \times m \, \boldsymbol{r}_{BS} \right) \times \boldsymbol{v}_B$$

- Das verbleibende Integral

$$\boxed{\boldsymbol{L}_B = \int_K \left(\boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P \right) dm}$$

wird als Drall oder Drehimpuls des Körpers bezüglich des Punktes *B* bezeichnet.

2. Impuls- und Drallsatz

- Für die zeitliche Änderung des Dralls gilt:

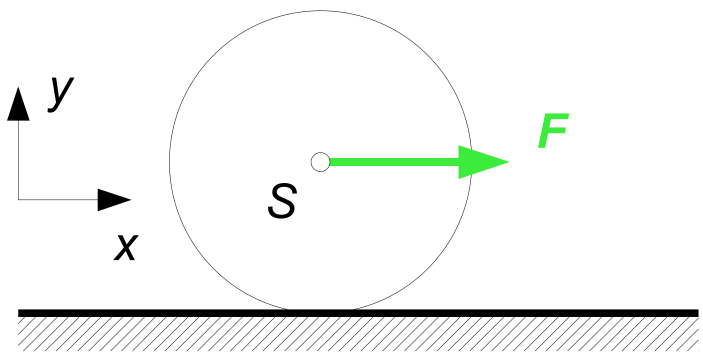
$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}_B - m\left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BS}\right) \times \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{M}_B}$$

- Diese Beziehung wird als Drallsatz, Drehimpulssatz oder Momentensatz bezeichnet.
- Bei geeigneter Wahl des Bezugspunktes lässt sich der Drallsatz noch vereinfachen.

2. Impuls- und Drallsatz

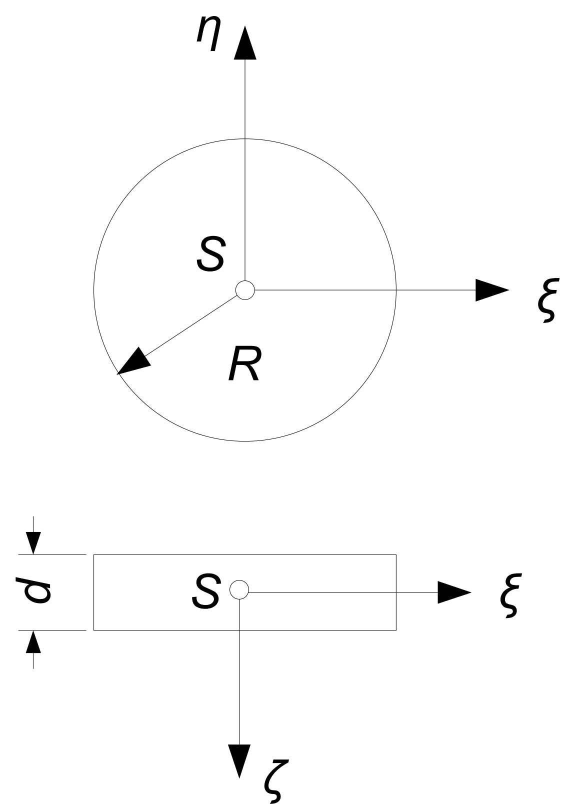
- Wenn es einen körperfesten Punkt *B* gibt, dessen Geschwindigkeit null ist, so wird dieser Punkt als Bezugspunkt genommen.
- Bezüglich dieses orts- und körperfesten Bezugspunkts lautet der Drallsatz: $\dot{\boldsymbol{L}}_B = \boldsymbol{M}_B$
- Gibt es keinen orts- und körperfesten Bezugspunkt, dann wird der Schwerpunkt des Körpers als Bezugspunkt gewählt.
- Wegen $\boldsymbol{r}_{BS} = \boldsymbol{0}$ gilt: $\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{M}_S}$
- Die Änderung des Dralls bezüglich des Schwerpunkts ist gleich dem Moment der äußeren Kräfte.

- Beispiel: Rollende Scheibe



  - Im Schwerpunkt der Scheibe greift die konstante Kraft ***F*** an.
  - Zu untersuchen ist die Bewegung der Scheibe.

  - Geometrie:



2. Impuls- und Drallsatz

- Kinematische Zwänge:
  - Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts in vertikaler Richtung ist null: $v_{Sy} = 0$
  - Rollbedingung: Die Geschwindigkeit von Punkt *A* ist null.

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SA} = \boldsymbol{0}$$

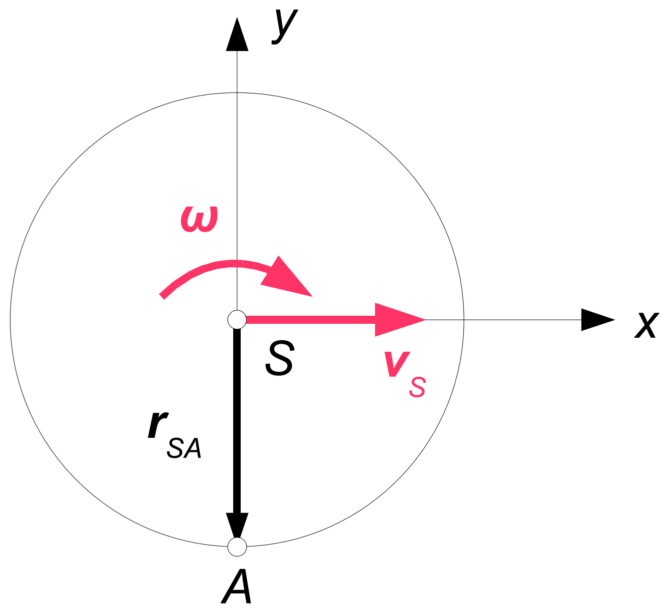
$$\boldsymbol{v}_S = v_S \boldsymbol{e}_x, \; \boldsymbol{\omega} = -\omega \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}_{SA} = -R \boldsymbol{e}_y$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{0} = v_S \boldsymbol{e}_x + \omega R \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y$$

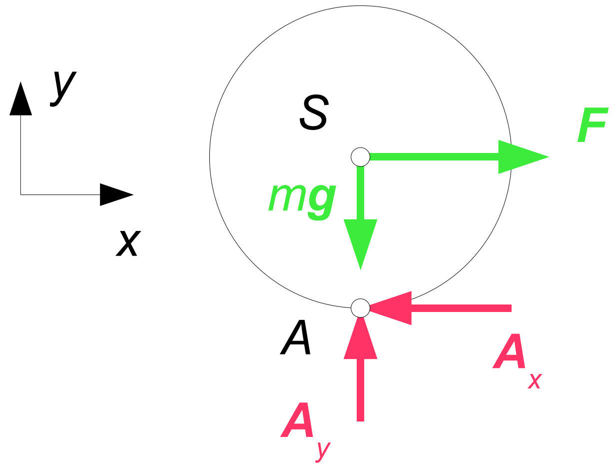
$$= \left(v_S - \omega R \right) \boldsymbol{e}_x$$

$$\rightarrow \quad v_S = \omega R$$



2. Impuls- und Drallsatz

- Freischnitt:



- Schwerpunktsatz:

$$m\,\dot{v}_S\,\boldsymbol{e}_x = (F - A_x)\,\boldsymbol{e}_x + (A_y - m\,g)\,\boldsymbol{e}_y$$

- Drallsatz bezüglich *S*:

$$\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{M}_S = (-R\,\boldsymbol{e}_y)\times(-A_x\,\boldsymbol{e}_x) = -R\,A_x\,\boldsymbol{e}_z$$

- Berechnung des Dralls:

$$\boldsymbol{L}_S = \int_K (\boldsymbol{r}_{SP}\times\boldsymbol{v}_P)\,dm$$

  - Im körperfesten System gilt:

$$\boldsymbol{r}_{SP} = \xi\,\boldsymbol{b}_\xi + \eta\,\boldsymbol{b}_\eta + \zeta\,\boldsymbol{b}_\zeta$$

2. Impuls- und Drallsatz

- Mit der Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} = \boldsymbol{v}_S + \left(-\omega\, \boldsymbol{b}_\zeta\right) \times \left(\xi\, \boldsymbol{b}_\xi + \eta\, \boldsymbol{b}_\eta + \zeta\, \boldsymbol{b}_\zeta\right)$$
$$= \boldsymbol{v}_S - \omega\,\xi\, \boldsymbol{b}_\eta + \omega\,\eta\, \boldsymbol{b}_\xi$$

  berechnet sich der Integrand zu

$$\boldsymbol{r}_{SP} \times \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{r}_{SP} \times \boldsymbol{v}_S + \left(\xi\, \boldsymbol{b}_\xi + \eta\, \boldsymbol{b}_\eta + \zeta\, \boldsymbol{b}_\zeta\right) \times \omega \left(\eta\, \boldsymbol{b}_\xi - \xi\, \boldsymbol{b}_\eta\right)$$
$$= \boldsymbol{r}_{SP} \times \boldsymbol{v}_S + \omega \left(-\xi^2\, \boldsymbol{b}_\zeta - \eta^2\, \boldsymbol{b}_\zeta + \zeta\,\eta\, \boldsymbol{b}_\eta + \xi\,\zeta\, \boldsymbol{b}_\xi\right)$$
$$= \boldsymbol{r}_{SP} \times \boldsymbol{v}_S + \omega \left[\xi\,\zeta\, \boldsymbol{b}_\xi + \zeta\,\eta\, \boldsymbol{b}_\eta - \left(\xi^2 + \eta^2\right) \boldsymbol{b}_\zeta\right]$$

- Das Integral über den ersten Summanden verschwindet:

$$\int_K \left(\boldsymbol{r}_{SP} \times \boldsymbol{v}_S\right) dm = \int_K \boldsymbol{r}_{SP}\, dm \times \boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{0}$$

2. Impuls- und Drallsatz

- Mit $dm = \rho\, dV = \rho\, d\zeta\, dA$ berechnen sich die übrigen Integrale zu

$$\int_K \xi\zeta\, dm = \rho \int_A \left(\int_{-d/2}^{d/2} \xi\zeta\, d\zeta \right) dA = 0$$

$$\int_K \eta\zeta\, dm = \rho \int_A \left(\int_{-d/2}^{d/2} \eta\zeta\, d\zeta \right) dA = 0$$

$$\int_K \left(\xi^2+\eta^2\right) dm = \rho \int_A \left[\left(\xi^2+\eta^2\right) \int_{-d/2}^{d/2} d\zeta \right] dA = \rho\, d \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3\, dr \right) d\phi$$

$$= 2\pi\rho\, d\, \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\pi\rho\, A\, d\, R^2 = \frac{1}{2} R^2 m$$

2. Impuls- und Drallsatz

- Damit gilt für den Drall: $\boldsymbol{L}_S = -\frac{1}{2} m R^2 \omega \boldsymbol{b}_\zeta$

– Lösung der Gleichungen:

- Wegen $\boldsymbol{b}_\zeta = \boldsymbol{e}_z$ folgt aus dem Drallsatz:

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\omega} = R A_x \quad \rightarrow \quad A_x = \frac{1}{2} m R \dot{\omega}$$

- Einsetzen in den Schwerpunktsatz führt auf

$$m \dot{v}_S = m R \dot{\omega} = F - \frac{1}{2} m R \dot{\omega} \quad \rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{2}{3} \frac{F}{m R}$$

- Aus der Rollbedingung folgt

$$\dot{v}_S = R \dot{\omega} = \frac{2}{3} \frac{F}{m}$$

- Euler-Winkel:
  - Mit $\omega_\xi = \omega_\eta = 0, \quad \omega_\zeta = -\dot{\omega}\, t$ lauten die Differenzialgleichungen für die Euler-Winkel

$$\dot{\psi} = -\frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \dot{\omega}\, t, \quad \dot{\theta} = -\sin(\phi)\, \dot{\omega}\, t, \quad \dot{\phi} = \cos(\phi) \tan(\theta)\, \dot{\omega}\, t$$

  - Für die Anfangsbedingungen $\psi(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \phi(0) = 0$

    lautet die Lösung: $\psi(t) = -\frac{1}{2} \dot{\omega}\, t^2, \quad \theta(t) = 0, \quad \phi(t) = 0$

  - Das Anfangswertproblem für die Euler-Winkel lässt sich deshalb so einfach lösen, weil die Richtung der Achse, um die sich der Körper dreht, zeitlich konstant ist.