3. Trägheitstensor

- Im Beispiel der rollenden Scheibe hängt der Drall linear von der Winkelgeschwindigkeit ab.
- Bei der Berechnung des Dralls treten Integrale über die Geometrie des starren Körpers auf.
- Es soll nun allgemein gezeigt werden, dass zwischen dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit und dem Drallvektor ein linearer Zusammenhang besteht.
- Dieser lineare Zusammenhang wird durch den Trägheits-tensor beschrieben.

3. Trägheitstensor

3.1 Definition

- Definition des Trägheitstensors:
  - Der Drall ist definiert durch $\boldsymbol{L}_B = \int_K \left(\boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P \right) dm$.
  - Mit $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}$ folgt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_B &= \int_K \boldsymbol{r}_{BP}\, dm \times \boldsymbol{v}_B + \int_K \boldsymbol{r}_{BP} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP} \right) dm \\ &= m\, \boldsymbol{r}_{BS} \times \boldsymbol{v}_B + \int_K \boldsymbol{r}_{BP} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP} \right) dm \end{aligned}$$

  - Diese Formel zeigt, dass zwischen Drall und Winkelgeschwindigkeit ein linearer Zusammenhang besteht:

$$\boldsymbol{L}_B = m\, \boldsymbol{r}_{BS} \times \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{J}_B \boldsymbol{\omega}$$

  - Der Tensor $\boldsymbol{J}_B$ wird als Trägheitstensor bezeichnet.

3.1 Definition

- Wenn als Bezugspunkt der Schwerpunkt gewählt wird oder wenn die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_B$ des Bezugspunktes null ist, verschwindet der erste Summand:

$$\boldsymbol{L}_S = \boldsymbol{J}_S \boldsymbol{\omega} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{L}_B = \boldsymbol{J}_B \boldsymbol{\omega} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{0}$$

- Komponenten im körperfesten System $B\xi\eta\zeta$:
  - Mit der allgemein gültigen Beziehung

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

folgt:

$$\boldsymbol{J}_B \boldsymbol{\omega} = \int_K \boldsymbol{r}_{BP} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP})\, dm = \int_K \left[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_{BP} \cdot \boldsymbol{r}_{BP}) - \boldsymbol{r}_{BP}(\boldsymbol{r}_{BP} \cdot \boldsymbol{\omega}) \right] dm$$

3.1 Definition

- Im körperfesten Koordinatensystem gilt:

$$\boldsymbol{r}_{BP} = \xi\, \boldsymbol{b}_\xi + \eta\, \boldsymbol{b}_\eta + \zeta\, \boldsymbol{b}_\zeta\,, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_\xi\, \boldsymbol{b}_\xi + \omega_\eta\, \boldsymbol{b}_\eta + \omega_\zeta\, \boldsymbol{b}_\zeta$$

- Damit berechnet sich der erste Summand zu

$$\begin{aligned} \int_K \boldsymbol{\omega} \left(\boldsymbol{r}_{BP} \cdot \boldsymbol{r}_{BP} \right) dm &= \boldsymbol{\omega} \int_K \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \right) dm \\ &= \omega_\xi \int_K \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \right) dm\, \boldsymbol{b}_\xi + \omega_\eta \int_K \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \right) dm\, \boldsymbol{b}_\eta \\ &\quad + \omega_\zeta \int_K \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \right) dm\, \boldsymbol{b}_\zeta \end{aligned}$$

3.1 Definition

- Für den zweiten Summanden folgt

$$\int_K \boldsymbol{r}_{BP}\left(\boldsymbol{r}_{BP}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)dm=\int_K \boldsymbol{r}_{BP}\left(\xi\,\omega_\xi+\eta\,\omega_\eta+\zeta\,\omega_\zeta\right)dm$$
$$=\int_K\left(\xi^2\omega_\xi+\xi\,\eta\,\omega_\eta+\xi\,\zeta\,\omega_\zeta\right)dm\,\boldsymbol{b}_\xi+\int_K\left(\eta\,\xi\,\omega_\xi+\eta^2\omega_\eta+\eta\,\zeta\,\omega_\zeta\right)dm\,\boldsymbol{b}_\eta$$
$$+\int_K\left(\zeta\,\xi\,\omega_\xi+\zeta\,\eta\,\omega_\eta+\zeta^2\omega_\zeta\right)dm\,\boldsymbol{b}_\zeta$$

- Damit ist gezeigt:

$$\boldsymbol{J}_B\boldsymbol{\omega}=\left[\int_K\left(\eta^2+\zeta^2\right)dm\,\omega_\xi-\int_K\xi\,\eta\,dm\,\omega_\eta-\int_K\xi\,\zeta\,dm\,\omega_\zeta\right]\boldsymbol{b}_\xi$$
$$+\left[-\int_K\eta\,\xi\,dm\,\omega_\xi+\int_K\left(\xi^2+\zeta^2\right)dm\,\omega_\eta-\int_K\eta\,\zeta\,dm\,\omega_\zeta\right]\boldsymbol{b}_\eta$$
$$+\left[-\int_K\zeta\,\xi\,dm\,\omega_\xi-\int_K\zeta\,\eta\,dm\,\omega_\eta+\int_K\left(\xi^2+\eta^2\right)dm\,\omega_\zeta\right]\boldsymbol{b}_\zeta$$

3.1 Definition

- Massenträgheitsmomente:

$$J_{B\xi} = \int_K \left(\eta^2 + \zeta^2\right) dm$$

$$J_{B\eta} = \int_K \left(\xi^2 + \zeta^2\right) dm$$

$$J_{B\zeta} = \int_K \left(\xi^2 + \eta^2\right) dm$$

- Deviationsmomente:

$$J_{B\xi\eta} = J_{B\eta\xi} = -\int_K \xi\,\eta\, dm$$

$$J_{B\eta\zeta} = J_{B\zeta\eta} = -\int_K \eta\,\zeta\, dm$$

$$J_{B\xi\zeta} = J_{B\zeta\xi} = -\int_K \xi\,\zeta\, dm$$

- Die Deviationsmomente werden auch als Zentrifugalmomente bezeichnet.

3.1 Definition

- Im körperfesten Koordinatensystem *Bξηζ* wird der Trägheitstensor durch die Matrix

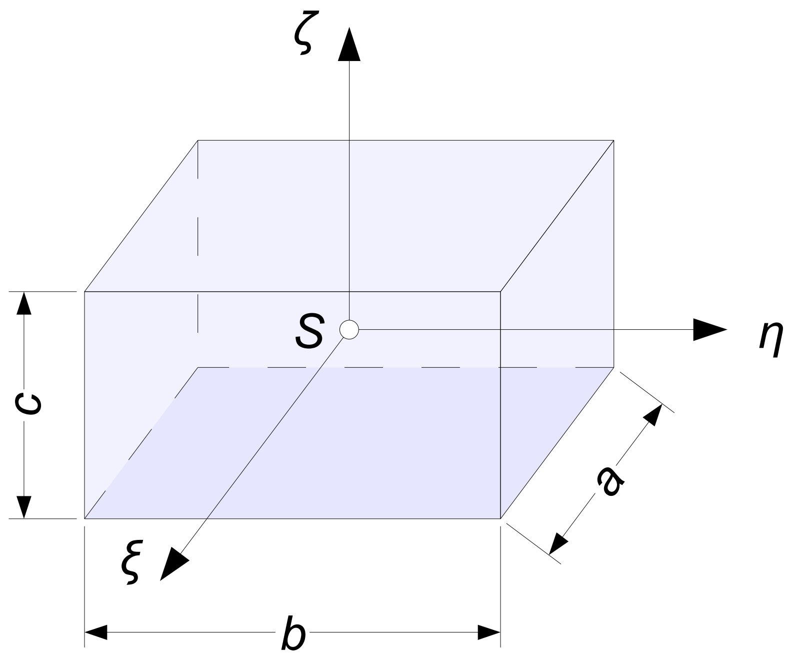
$$[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}]_B = \begin{bmatrix} J_{B\xi} & J_{B\xi\eta} & J_{B\xi\zeta} \\ J_{B\eta\xi} & J_{B\eta} & J_{B\eta\zeta} \\ J_{B\zeta\xi} & J_{B\zeta\eta} & J_{B\zeta} \end{bmatrix}$$

  dargestellt.

- Die Elemente dieser Matrix hängen nur von der Geometrie des Körpers ab und nicht von der Zeit.
- <u>Achtung:</u> Oft werden die Deviationsmomente ohne das Minus-Zeichen definiert. Dann tritt das Minus-Zeichen in der Matrix auf.

3.1 Definition

- Beispiel: Quader
  - Gegeben:
    - Quader mit Kantenlängen *a, b, c*
  - Gesucht:
    - Trägheitstensor bezüglich Schwerpunkt *S*



Dichte ρ = const.

3.1 Definition

- Massenträgheitsmomente:

$$J_{S\xi} = \int_K \left(\eta^2+\zeta^2\right) dm = \int_V \left(\eta^2+\zeta^2\right) \rho \, dV$$

$$= a\rho \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{-c/2}^{c/2} \left(\eta^2+\zeta^2\right) d\zeta \right] d\eta = a\rho \int_{-b/2}^{b/2} \left[\eta^2 \zeta + \frac{1}{3}\zeta^3 \right]_{\zeta=-c/2}^{\zeta=c/2} d\eta$$

$$= a\rho \int_{-b/2}^{b/2} \left(\eta^2 c + \frac{2}{3}\left(\frac{c}{2}\right)^3 \right) d\eta = a\rho \left[\frac{1}{3}\eta^3 c + \frac{2}{3\cdot 8} c^3 \eta \right]_{\eta=-b/2}^{\eta=b/2}$$

$$= a\rho \left(\frac{2}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^3 c + \frac{1}{12} c^3 b \right) = \rho\, abc \cdot \frac{1}{12}\left(b^2+c^2\right) = \underline{\frac{1}{12} m \left(b^2+c^2\right)}$$

3.1 Definition

- Entsprechend folgt: $J_{S\eta}=\frac{1}{12}m\left(a^2+c^2\right),\quad J_{S\zeta}=\frac{1}{12}m\left(a^2+b^2\right)$
- Deviationsmomente:

$$J_{S\xi\eta}=-\int_K \xi\eta\,dm=-\rho\int_{-c/2}^{c/2}\left[\int_{-b/2}^{b/2}\left(\int_{-a/2}^{a/2}\xi\eta\,d\xi\right)\right]d\eta\,d\zeta$$

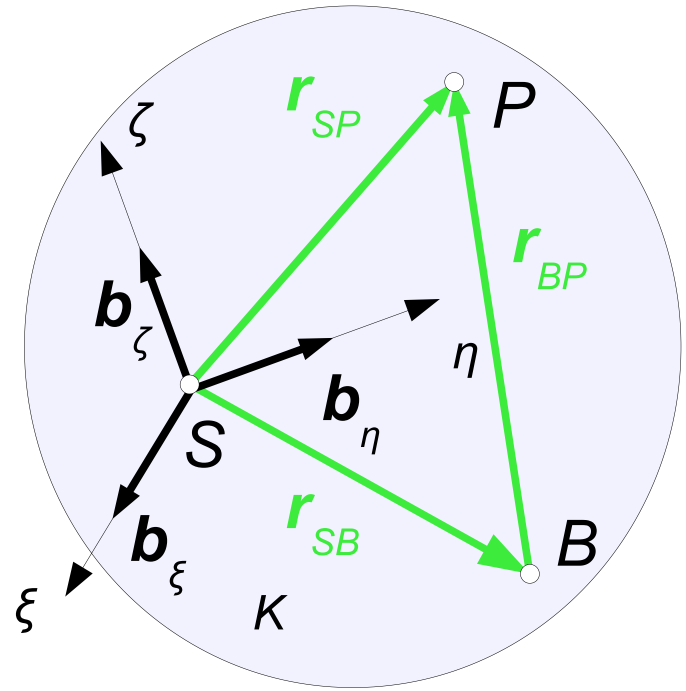
$$=-\rho\int_{-c/2}^{c/2}\left[\int_{-b/2}^{b/2}\eta\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_{\xi=-a/2}^{\xi=a/2}d\eta\right]d\zeta$$

$$=-\rho\int_{-c/2}^{c/2}\left[\int_{-b/2}^{b/2}\eta\left(\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{8}\right)d\eta\right]d\zeta=0$$

- Entsprechend folgt: $J_{S\eta\zeta}=0,\quad J_{S\xi\zeta}=0$

3.2 Satz von Steiner

- Aufgabenstellung:
  - Für viele Körper sind die Elemente des Trägheitstensors bezüglich des Schwerpunkts tabelliert.
  - Wenn sich der Körper um einen ortsfesten Punkt dreht, der nicht der Schwerpunkt ist, muss der Trägheitstensor umgerechnet werden.



3.2 Satz von Steiner

- Vektorielle Herleitung des Satzes von Steiner:
  - Der Trägheitstensor bezüglich Punkt *B* ist definiert durch

$$\boldsymbol{J}_B \boldsymbol{\omega} = \int_K \boldsymbol{r}_{BP} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP} \right) dm$$

  - Mit $\boldsymbol{r}_{BP} = \boldsymbol{r}_{SP} - \boldsymbol{r}_{SB}$ lautet der Integrand

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{BP} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP} \right) &= \left(\boldsymbol{r}_{SP} - \boldsymbol{r}_{SB} \right) \times \left[\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{r}_{SP} - \boldsymbol{r}_{SB} \right) \right] \\ &= \left(\boldsymbol{r}_{SP} - \boldsymbol{r}_{SB} \right) \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SB} \right) \\ &= \boldsymbol{r}_{SP} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right) - \boldsymbol{r}_{SB} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right) - \boldsymbol{r}_{SP} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SB} \right) + \boldsymbol{r}_{SB} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SB} \right) \end{aligned}$$

3.2 Satz von Steiner

- Mit $\int\limits_K \boldsymbol{r}_{SP} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right) dm = \boldsymbol{J}_S \boldsymbol{\omega}$

  und $\int\limits_K \boldsymbol{r}_{SP}\, dm = \boldsymbol{0}$ (Schwerpunkt)

  folgt der Satz von Steiner:

$$\boxed{\boldsymbol{J}_B \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{J}_S \boldsymbol{\omega} + m\, \boldsymbol{r}_{SB} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SB} \right)}$$

3.2 Satz von Steiner

- Komponenten des Trägheitstensors bezüglich *B*:
  - Für das doppelte Vektorprodukt gilt

$$\boldsymbol{r}_{SB}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{SB}\right)=\boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{r}_{SB}\cdot\boldsymbol{r}_{SB}\right)-\boldsymbol{r}_{SB}\left(\boldsymbol{r}_{SB}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)$$

  - Mit $\boldsymbol{r}_{SB}=\xi_B\boldsymbol{b}_\xi+\eta_B\boldsymbol{b}_\eta+\zeta_B\boldsymbol{b}_\zeta$

    folgt wie bei der Herleitung des Trägheitstensors:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{SB}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{SB}\right)=&\left[\left(\eta_B^2+\zeta_B^2\right)\omega_\xi-\xi_B\eta_B\omega_\eta-\xi_B\zeta_B\omega_\zeta\right]\boldsymbol{b}_\xi\\&+\left[-\eta_B\xi_B\omega_\xi+\left(\xi_B^2+\zeta_B^2\right)\omega_\eta-\eta_B\zeta_B\omega_\zeta\right]\boldsymbol{b}_\eta\\&+\left[-\zeta_B\xi_B\omega_\xi-\zeta_B\eta_B\omega_\eta+\left(\xi_B^2+\eta_B^2\right)\omega_\zeta\right]\boldsymbol{b}_\zeta\end{aligned}$$

3.2 Satz von Steiner

- Ergebnis:

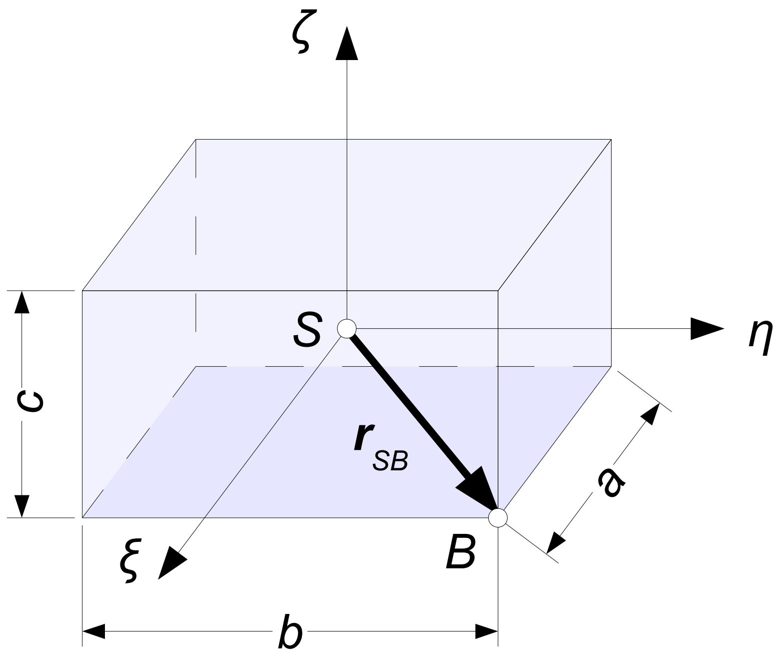
$$
\begin{aligned}
J_{B\xi} &= J_{S\xi} + m\left(\eta_B^2+\zeta_B^2\right)\\
J_{B\eta} &= J_{S\eta} + m\left(\xi_B^2+\zeta_B^2\right)\\
J_{B\zeta} &= J_{S\zeta} + m\left(\xi_B^2+\eta_B^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{B\xi\eta} &= J_{S\xi\eta} - m\xi_B\eta_B\\
J_{B\eta\zeta} &= J_{S\eta\zeta} - m\eta_B\zeta_B\\
J_{B\xi\zeta} &= J_{S\xi\zeta} - m\xi_B\zeta_B
\end{aligned}
$$

- (ξ_B , η_B , ζ_B) sind die Komponenten des Vektors vom Schwerpunkt *S* zum Bezugspunkt *B* im körperfesten Koordinatensystem.

3.2 Satz von Steiner

- Beispiel:
  - Gegeben:
    - Quader mit Kantenlängen *a, b, c*
    - Trägheitstensor bezüglich Schwerpunkt *S*
  - Gesucht:
    - Trägheitstensor bezüglich Punkt *B*



Dichte ρ = const.

3.2 Satz von Steiner

- Vektor vom Schwerpunkt *S* zum Bezugspunkt *B*:

$$\boldsymbol{r}_{SB} = \frac{a}{2}\boldsymbol{b}_\xi + \frac{b}{2}\boldsymbol{b}_\eta - \frac{c}{2}\boldsymbol{b}_\zeta \;\rightarrow\; \xi_B = \frac{a}{2},\;\; \eta_B = \frac{b}{2},\;\; \zeta_B = -\frac{c}{2}$$

- Massenträgheitsmomente:

$$J_{B\xi} = \frac{1}{12}\left(b^2+c^2\right)m + \frac{1}{4}\left(b^2+c^2\right)m = \frac{1}{3}\left(b^2+c^2\right)m$$

$$J_{B\eta} = \frac{1}{12}\left(a^2+c^2\right)m + \frac{1}{4}\left(a^2+c^2\right)m = \frac{1}{3}\left(a^2+c^2\right)m$$

$$J_{B\zeta} = \frac{1}{12}\left(a^2+b^2\right)m + \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)m = \frac{1}{3}\left(a^2+b^2\right)m$$

- Deviationsmomente:

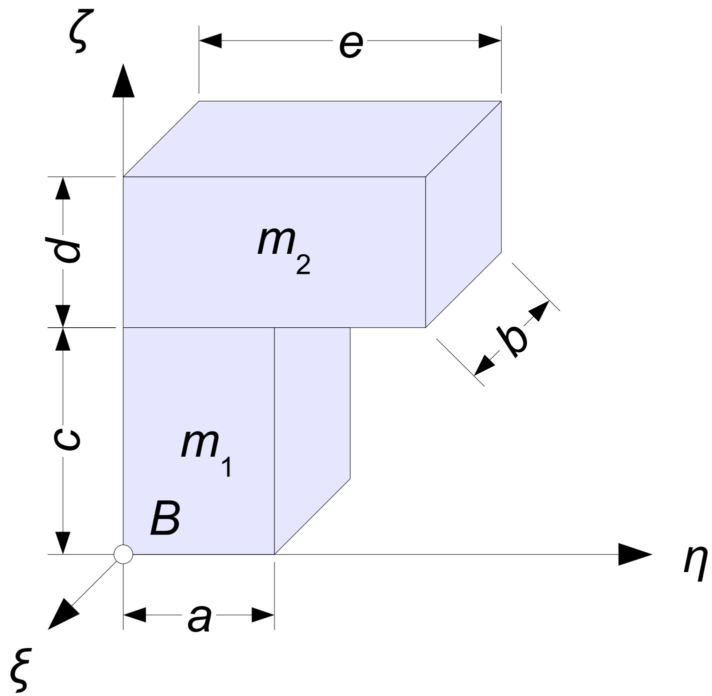
$$J_{B\xi\eta} = -\frac{1}{4}abm,\;\; J_{B\eta\zeta} = \frac{1}{4}bcm,\;\; J_{B\xi\zeta} = \frac{1}{4}acm$$

3.2 Satz von Steiner

- Zusammengesetzte Körper:
  - Der Trägheitstensor eines zusammengesetzten Körpers lässt sich berechnen, indem die tabellierten Werte für die Massenträgheitsmomente und Deviationsmomente auf den gemeinsamen Bezugspunkt umgerechnet und anschließend addiert werden.

3.2 Satz von Steiner

- Beispiel:
  - Gegeben:
    - $a = b = d = 2\text{cm}$
    - $c = e = 4cm$
    - $m_1 = m_2 = 3kg$
  - Gesucht:
    - Trägheitstensor bezüglich Punkt B



3.2 Satz von Steiner

	Körper 1	Körper 2	
ξ_B	1	1	cm
η_B	-1	-2	cm
ζ_B	-2	-5	cm
$J_{S\xi}$	5	5	$kgcm^2$
$J_{S\eta}$	5	2	$kgcm^2$
$J_{S\zeta}$	2	5	$kgcm^2$
$m(\eta_B^2 + \zeta_B^2)$	15	87	$kgcm^2$
$m(\xi_B^2 + \zeta_B^2)$	15	78	$kgcm^2$
$m(\xi_B^2 + \eta_B^2)$	6	15	$kgcm^2$

3.2 Satz von Steiner

	Körper 1	Körper 2	Gesamt	
$J_{B\xi}$	20	92	112	$kgcm^2$
$J_{B\eta}$	20	80	100	$kgcm^2$
$J_{B\zeta}$	8	20	28	$kgcm^2$
$J_{B\xi\eta}$	3	6	9	$kgcm^2$
$J_{B\eta\zeta}$	-6	-30	-36	$kgcm^2$
$J_{B\xi\zeta}$	6	15	21	$kgcm^2$

3.3 Koordinatentransformation

- Seien $B_1 = B\xi_1\eta_1\zeta_1$ und $B_2 = B\xi_2\eta_2\zeta_2$ zwei körperfeste Koordinatensysteme.
- Die Matrix $[\boldsymbol{T}]_{21}$ transformiert die Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{x}$ von System B_1 in das System B_2:

$$[\boldsymbol{x}]_2 = [\boldsymbol{T}]_{21}[\boldsymbol{x}]_1$$

- Aus $[\boldsymbol{L}]_2 = [\boldsymbol{T}]_{21}[\boldsymbol{L}]_1 = [\boldsymbol{T}]_{21}[\boldsymbol{J}]_1[\boldsymbol{\omega}]_1 = [\boldsymbol{T}]_{21}[\boldsymbol{J}]_1[\boldsymbol{T}]_{21}^T[\boldsymbol{\omega}]_2 = [\boldsymbol{J}]_2[\boldsymbol{\omega}]_2$

  folgt:
$$[\boldsymbol{J}]_2 = [\boldsymbol{T}]_{21}[\boldsymbol{J}]_1[\boldsymbol{T}]_{21}^T$$

3.4 Kinetische Energie

- Herleitung:
  - Betrachtet wird ein Körper, dessen Schwerpunkt sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S$ bewegt und der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ dreht.
  - Seine kinetische Energie ist die Summe der kinetischen Energien aller Massenelemente:

$$E^K = \frac{1}{2} \int_K \boldsymbol{v}_P \cdot \boldsymbol{v}_P \, dm$$

  - Für die Geschwindigkeit eines beliebigen Körperpunktes gilt:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP}$$

3.4 Kinetische Energie

- Mit $$\boldsymbol{v}_P \cdot \boldsymbol{v}_P = \left(\boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right) \cdot \left(\boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right)$$
$$= \boldsymbol{v}_S \cdot \boldsymbol{v}_S + 2\, \boldsymbol{v}_S \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right) \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right)$$

  folgt:

$$E^K = \frac{1}{2} m\, v_S^2 + \boldsymbol{v}_S \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_K \boldsymbol{r}_{SP}\, dm \right) + \frac{1}{2} \int_K \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right) \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} \right) dm$$

- Der erste Summand auf der rechten Seite ist die kinetische Energie infolge der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S$ des Schwerpunktes.
- Der zweite Summand ist wegen

$$\int_K \boldsymbol{r}_{SP}\, dm = \boldsymbol{r}_{SS} = \boldsymbol{0}$$

  gleich null.

3.4 Kinetische Energie

- Mit der Lagrangeschen Identität

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})$$

folgt für den dritten Summanden:

$$\int_K (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{SP})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{SP})\,dm=\int_K \left[(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{r}_{SP}\cdot\boldsymbol{r}_{SP})-(\boldsymbol{r}_{SP}\cdot\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_{SP})\right]dm$$

$$=\boldsymbol{\omega}\cdot\int_K \left[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_{SP}\cdot\boldsymbol{r}_{SP})-\boldsymbol{r}_{SP}(\boldsymbol{r}_{SP}\cdot\boldsymbol{\omega})\right]dm=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}_S\boldsymbol{\omega}$$

- Ergebnis:
  - Für die kinetische Energie des starren Körpers gilt:

$$\boxed{E^K=\frac{1}{2}m\,v_S^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}_S\boldsymbol{\omega}}$$

3.4 Kinetische Energie

- Folgerung:
  - Da die kinetische Energie immer positiv ist und jede Drehung des Körpers mit einer kinetischen Energie verbunden ist, gilt:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}_S \boldsymbol{\omega} > 0$$

  - Der Trägheitstensor ist positiv definit.
- Koordinatendarstellung:
  - In einem körperfesten Koordinatensystem $B\xi\eta\zeta$ gilt für die kinetische Energie der Drehbewegung:

$$E^K = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]_B^T [\boldsymbol{J}_S]_B [\boldsymbol{\omega}]_B$$

3.4 Kinetische Energie

- Sind $B_1 = B\xi_1\eta_1\zeta_1$ und $B_2 = B\xi_2\eta_2\zeta_2$ zwei körperfeste Koordinatensysteme, so gilt:

$$[\boldsymbol{\omega}]_1^T [\boldsymbol{J}_S]_1 [\boldsymbol{\omega}]_1 = \left([\boldsymbol{T}]_{21}^T [\boldsymbol{\omega}]_2\right)^T [\boldsymbol{J}_S]_1 [\boldsymbol{T}]_{21}^T [\boldsymbol{\omega}]_2$$
$$= [\boldsymbol{\omega}]_2^T [\boldsymbol{T}]_{21} [\boldsymbol{J}_S]_1 [\boldsymbol{T}]_{21}^T [\boldsymbol{\omega}]_2 = [\boldsymbol{\omega}]_2^T [\boldsymbol{J}_S]_2 [\boldsymbol{\omega}]_2$$

- Durch das Transformationsgesetz für den Trägheitstensor wird also gewährleistet, dass die kinetische Energie nicht vom Koordinatensystem abhängt.

3.5 Hauptachsen

- Definition der Hauptachsen:
  - Aus der Matrixdarstellung kann abgelesen werden, dass der Trägheitstensor symmetrisch ist.
  - Außerdem wurde gezeigt, dass der Trägheitstensor positiv definit ist.
  - Daher hat der Trägheitstensor drei reelle positive Eigenwerte J_1, J_2, und J_3, die als Hauptträgheitsmomente bezeichnet werden.
  - Die zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ und $\boldsymbol{b}_3$ stehen senkrecht aufeinander: $\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0, \quad \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_3 = 0, \quad \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3 = 0$

3.5 Hauptachsen

- Die Eigenvektoren können so normiert werden, dass sie Einheitsvektoren sind.
- Das dadurch definierte Koordinatensystem *H* = *B*123 wird als Hauptachsensystem bezeichnet. Die Koordinatenachsen heißen Hauptachsen.
- Im Hauptachsensystem wird der Trägheitstensor durch die Diagonalmatrix

$$\left[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}\right]_H = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

dargestellt.

3.5 Hauptachsen

- Berechnung der Hauptachsen:
  - Die Hauptträgheitsmomente sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\det\left(\left[\boldsymbol{J}_S\right]_B - J\left[\boldsymbol{I}\right]_B\right) = 0$$

  - Das ist eine kubische Gleichung $-J^3 + a\,J^2 + b\,J + c = 0$ mit den Koeffizienten

$$a = J_{S\xi} + J_{S\eta} + J_{S\zeta} = \operatorname{sp}(\boldsymbol{J}_S)$$

$$b = J_{S\eta\zeta}^2 + J_{S\xi\zeta}^2 + J_{S\xi\eta}^2 - J_{S\xi}J_{S\eta} - J_{S\eta}J_{S\zeta} - J_{S\xi}J_{S\zeta}$$

$$c = \det(\boldsymbol{J}_S)$$

3.5 Hauptachsen

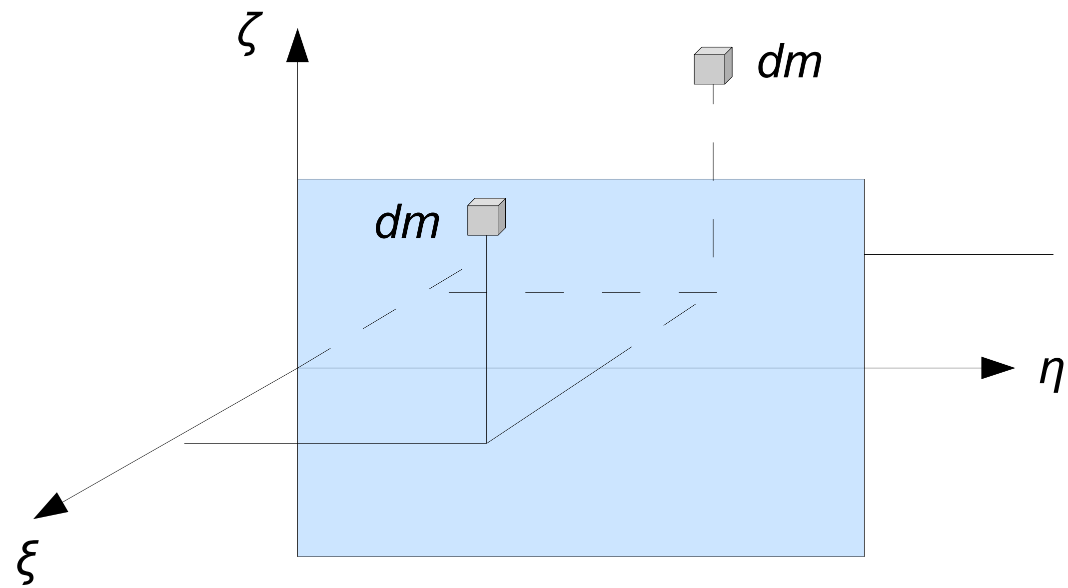
- Wenn die Hauptträgheitsmomente bekannt sind, können die Hauptachsen aus den linearen Gleichungssystemen

  $$\left(\left[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}} \right]_B - J_k \left[\boldsymbol{I} \right]_B \right) \left[\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{k}} \right]_B = \left[\boldsymbol{0} \right]_B , \quad k = 1, 2, 3$$

  berechnet werden.
- In der Praxis werden Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen in der Regel mithilfe eines numerischen Verfahrens zur Lösung von symmetrischen Eigenwertproblemen ermittelt.
- Gebräuchliche Verfahren sind z.B. das Verfahren von Jacobi oder die Vektoriteration.

3.5 Hauptachsen

- Symmetrische Körper:
  - Hat ein Körper eine Symmetrieebene, so kann eine Hauptachse sofort angegeben werden.
  - Symmetrie bezüglich $\eta\zeta$ - Ebene:



3.5 Hauptachsen

- Zu jedem Massenelement an der Stelle (ξ, η, ζ) gibt es ein entprechendes Massenelement an der Stelle (-ξ, η, ζ).
- Also gilt:

$$J_{\xi\eta} = -\int_K \xi\eta \, dm = 0, \quad J_{\xi\zeta} = -\int_K \xi\zeta \, dm = 0$$

– Entsprechend folgt für Symmetrie bezüglich der $\xi\eta$ - Ebene

$$J_{\eta\zeta} = -\int_K \eta\zeta \, dm = 0, \quad J_{\xi\zeta} = -\int_K \xi\zeta \, dm = 0$$

und für Symmetrie bezüglich der $\xi\zeta$ - Ebene:

$$J_{\xi\eta} = -\int_K \xi\eta \, dm = 0, \quad J_{\eta\zeta} = -\int_K \eta\zeta \, dm = 0$$

3.5 Hauptachsen

Symmetrieebene	Trägheitstensor	Hauptachse
$\xi\eta$	$\begin{bmatrix} J_\xi & J_{\xi\eta} & 0 \\ J_{\xi\eta} & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix}$	ζ-Achse
$\eta\zeta$	$\begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & J_{\eta\zeta} \\ 0 & J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{bmatrix}$	ξ-Achse
$\xi\zeta$	$\begin{bmatrix} J_\xi & 0 & J_{\xi\zeta} \\ 0 & J_\eta & 0 \\ J_{\xi\zeta} & 0 & J_\zeta \end{bmatrix}$	η-Achse

3.5 Hauptachsen

- Die übrigen beiden Hauptträgheitsmomente sind Nullstellen einer quadratischen Gleichung.
- Bei Symmetrie bezüglich der *ξη*-Ebene lautet die charakteristische Gleichung z.B.

$$0=\begin{vmatrix} J_\xi - J & J_{\xi\eta} & 0 \\ J_{\xi\eta} & J_\eta - J & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta - J \end{vmatrix} = \left(J_\zeta - J\right)\left[\left(J_\xi - J\right)\left(J_\eta - J\right) - J_{\xi\eta}^2\right]$$

$$=\left(J_\zeta - J\right)\left[J^2 - \left(J_\xi + J_\eta\right)J + J_\xi J_\eta - J_{\xi\eta}^2\right]$$

- Sie hat die Lösungen $J_1 = J_\zeta$ und

$$J_{2/3} = \frac{J_\xi + J_\eta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_\xi - J_\eta}{2}\right)^2 + J_{\xi\eta}^2}$$

3.5 Hauptachsen

- Rotationssymmetrische Körper:
  - Bei einem rotationssymmetrischen Körper ist die Rotationsachse eine Hauptachse.
  - In der Ebene senkrecht zur Rotationsachse ist jede Achse eine Hauptachse. Es können zwei senkrechte Hauptachsen beliebig gewählt werden.
  - Die Massenträgheitsmomente bezüglich der beiden zur Symmetrieachse senkrechten Hauptachsen sind gleich groß.

3.5 Hauptachsen

- Kugelsymmetrische Körper:
  - Bei einem kugelsymmetrischen Körper sind alle Achsen Hauptachsen.
  - Es können drei senkrechte Hauptachsen beliebig gewählt werden.
  - Alle drei Hauptträgheitsmomente sind gleich groß.