

4. Geführte Drehungen

- Bei geführten Drehungen ist die Drehbewegung vorgegeben.
- Die nötigen Kräfte und Momente können aus Impuls- und Drallsatz bestimmt werden.

4. Geführte Drehungen

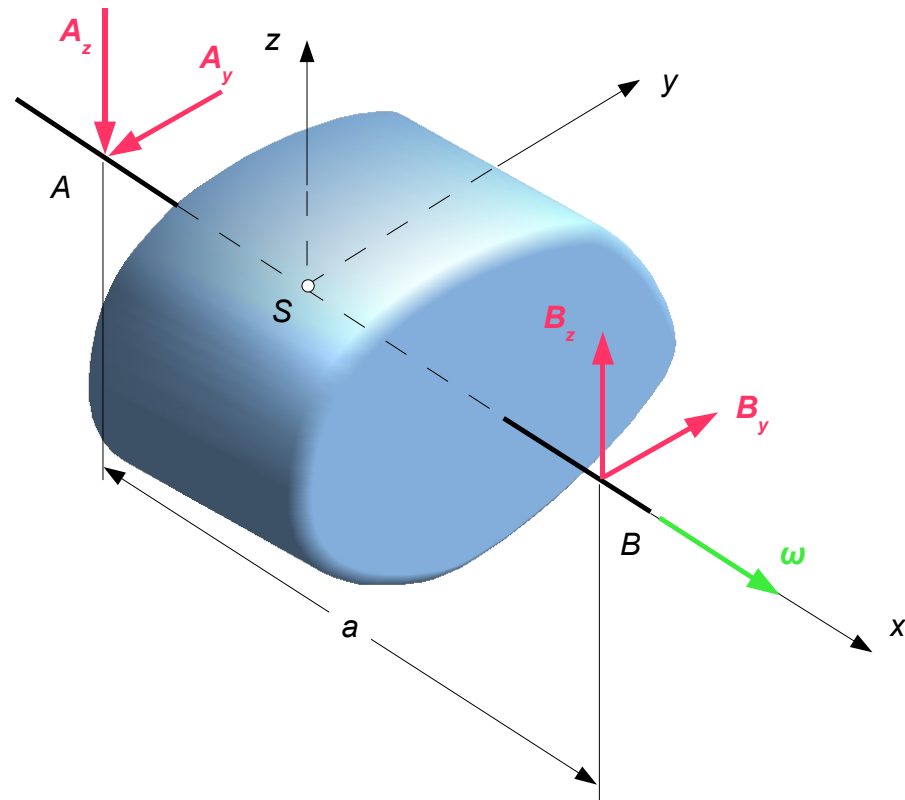
4.1 Dynamische Unwucht

4.2 Kollergang

4.3 Moment auf Radkappe

4.1 Dynamische Unwucht

- Aufgabenstellung:
 - Ein starrer Körper rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine raumfeste Achse durch seinen Schwerpunkt, die keine Hauptachse ist.
 - Welche Kräfte treten dabei in den Lagern der Achse auf?

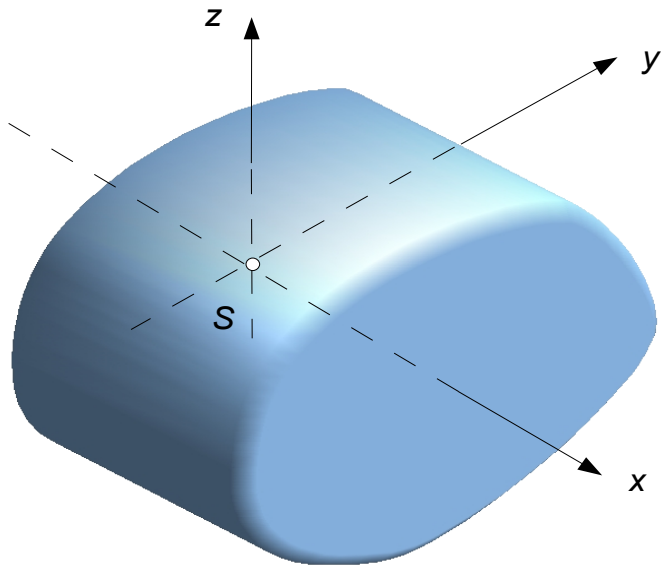


4.1 Dynamische Unwucht

- Koordinatensysteme:

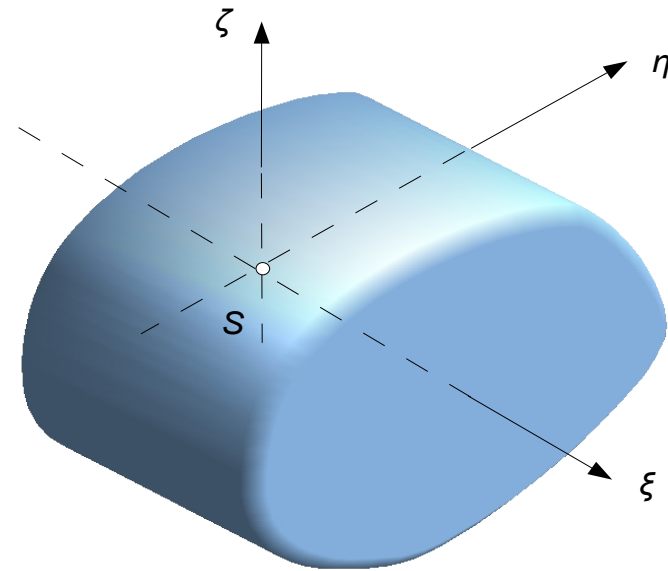
Ortsfest:

$O = Sxyz$



Körperfest:

$K = S\xi\eta\zeta$



4.1 Dynamische Unwucht

- Als Ursprung für beide Koordinatensysteme wird der Schwerpunkt gewählt.
- Die x -Achse des ortsfesten Koordinatensystems $O = Sxyz$ stimmt mit der Drehachse überein.
- Das körperfeste Koordinatensystem $K = S\xi\eta\zeta$ dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die ortsfeste x -Achse.
- Die ξ -Achse des körperfesten Koordinatensystems stimmt mit der x -Achse des ortsfesten Koordinatensystems überein.

4.1 Dynamische Unwucht

- Drallvektor: $\mathbf{L}_S = \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega}$
 - Im körperfesten Koordinatensystem $K = S\xi\eta\zeta$ gilt:

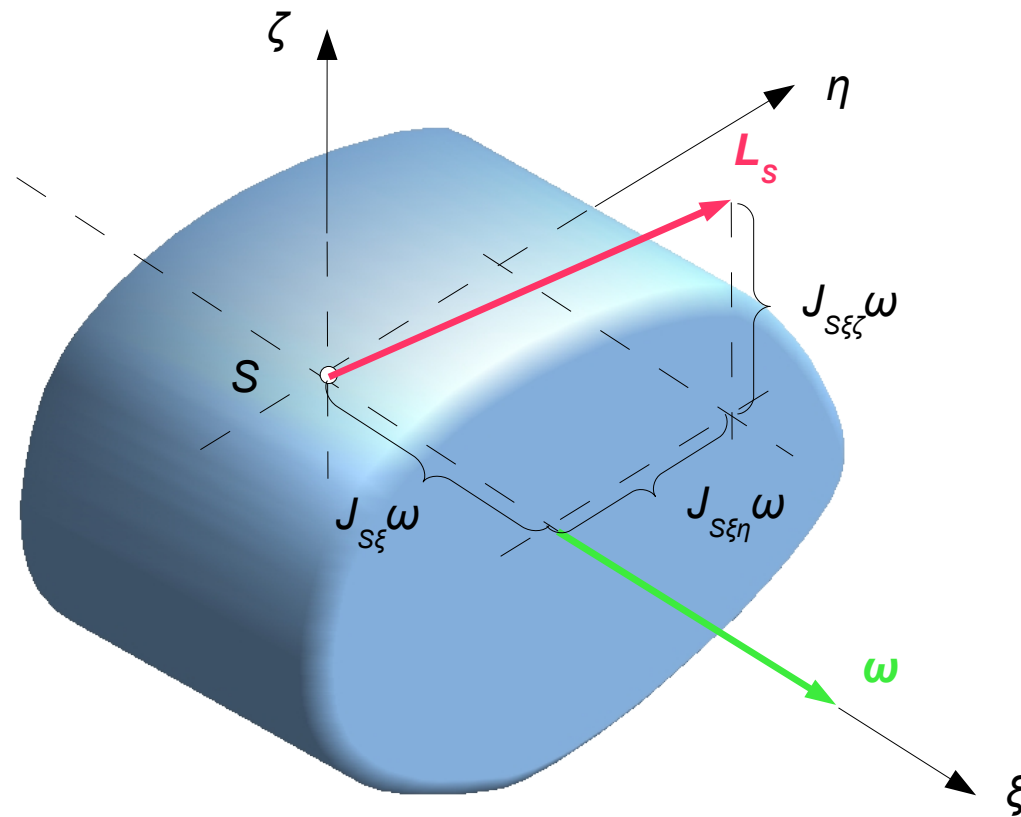
$$[\mathbf{L}_S]_K = [\mathbf{J}_S]_K [\boldsymbol{\omega}]_K$$

$$\begin{bmatrix} L_{S\xi} \\ L_{S\eta} \\ L_{S\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{S\xi} & J_{S\xi\eta} & J_{S\xi\zeta} \\ J_{S\xi\eta} & J_{S\eta} & J_{S\eta\zeta} \\ J_{S\xi\zeta} & J_{S\eta\zeta} & J_{S\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} J_{S\xi} \\ J_{S\xi\eta} \\ J_{S\xi\zeta} \end{bmatrix}$$

- Wenn die Deviationsmomente nicht verschwinden, stimmt die Richtung des Drallvektors nicht mit der Richtung der Drehachse überein.

4.1 Dynamische Unwucht

- Drallvektor im körperfesten System:



4.1 Dynamische Unwucht

- Zeitliche Änderung des Dralls:
 - Für einen körperfesten mitrotierenden Beobachter ändert sich der Drall nicht:

$$\frac{{}^K d \mathbf{L}_S}{dt} = \mathbf{0}$$

- Für einen ortsfesten Beobachter dreht sich der Drallvektor mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um die x-Achse:

$$\frac{d \mathbf{L}_S}{dt} = \dot{\mathbf{L}}_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_S$$

4.1 Dynamische Unwucht

- Moment:
 - Das Moment wird mit dem Drallsatz berechnet:

$$\dot{\mathbf{L}}_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_S = \mathbf{M}_S$$

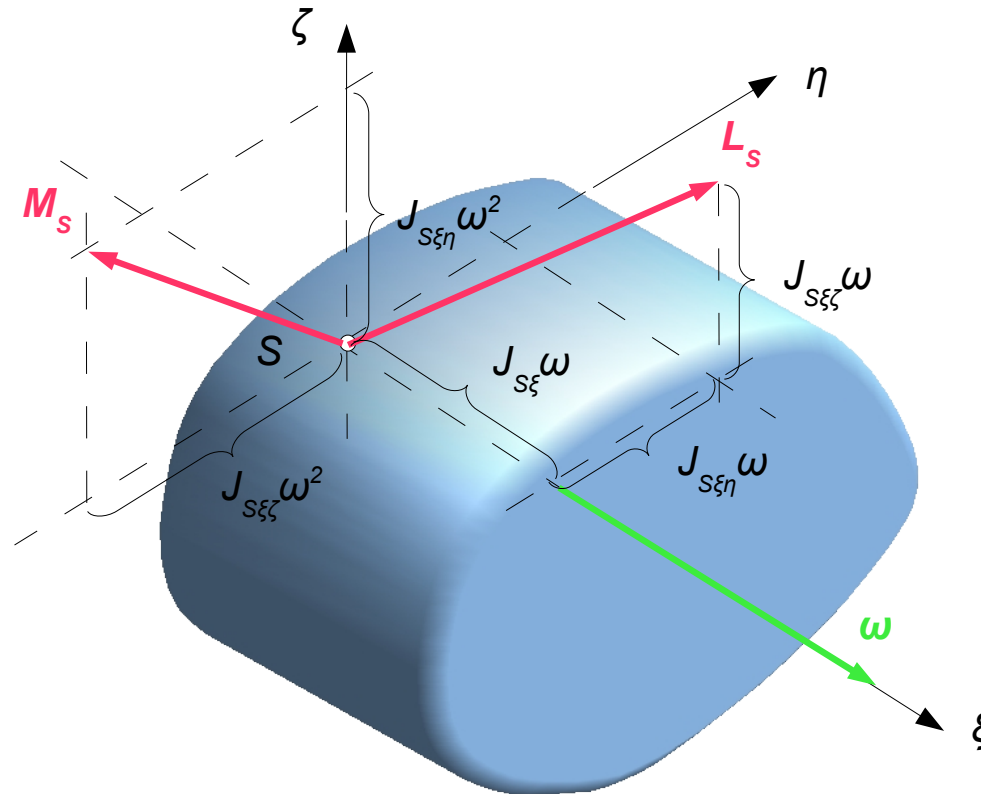
- Im körperfesten Koordinatensystem K gilt:

$$[\mathbf{M}_S]_K = [\boldsymbol{\omega}]_K \times [\mathbf{L}_S]_K$$

$$\begin{bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{S\xi\xi} \\ J_{S\xi\eta} \\ J_{S\xi\zeta} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -J_{S\xi\zeta} \\ J_{S\xi\eta} \end{bmatrix}$$

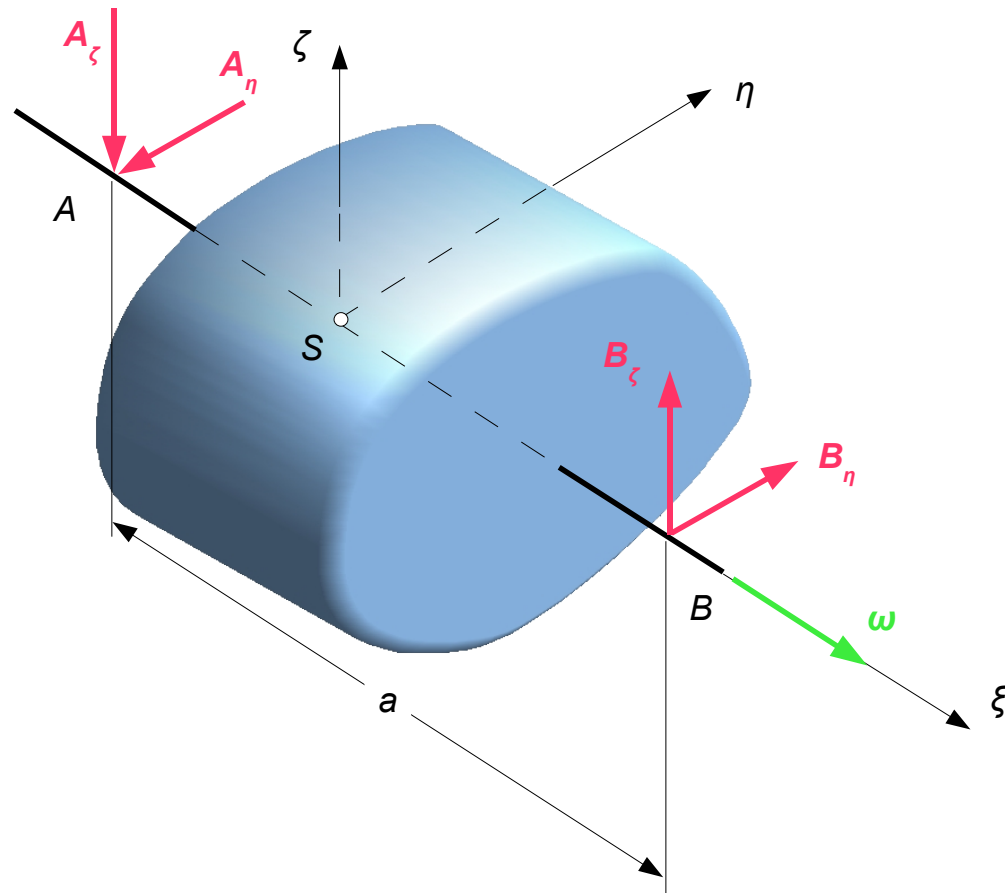
4.1 Dynamische Unwucht

- Momentenvektor im körperfesten System:



4.1 Dynamische Unwucht

- Lagerkräfte:



4.1 Dynamische Unwucht

- Da der Schwerpunkt in Ruhe ist, folgt aus dem Schwerpunktsatz:

$$\sum F_{\eta} = 0 : B_{\eta} - A_{\eta} = 0 \rightarrow B_{\eta} = A_{\eta} = F_{\eta}$$

$$\sum F_{\zeta} = 0 : B_{\zeta} - A_{\zeta} = 0 \rightarrow B_{\zeta} = A_{\zeta} = F_{\zeta}$$

- Für die Momente dieser beiden Kräftepaare gilt:

$$M_{\eta} = -a F_{\zeta}, \quad M_{\zeta} = a F_{\eta}$$

- Mit dem Drallsatz folgt:

$$F_{\eta} = \frac{M_{\zeta}}{a} = \omega^2 \frac{J_{S\xi\eta}}{a}, \quad F_{\zeta} = -\frac{M_{\eta}}{a} = \omega^2 \frac{J_{S\xi\zeta}}{a}$$

4.1 Dynamische Unwucht

- Im körperfesten Koordinatensystem sind die Komponenten der Lagerkräfte zeitlich konstant.
- Für die Komponenten im ortsfesten Koordinatensystem gilt:

$$[\mathbf{F}]_O = [\mathbf{T}]_{OK} [\mathbf{F}]_K$$

- Mit den Euler-Winkeln $\phi = \omega t$, $\psi = \theta = 0$ berechnet sich die Transformationsmatrix zu

$$[\mathbf{T}]_{OK} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ 0 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

4.1 Dynamische Unwucht

- Damit folgt für die Lagerkräfte

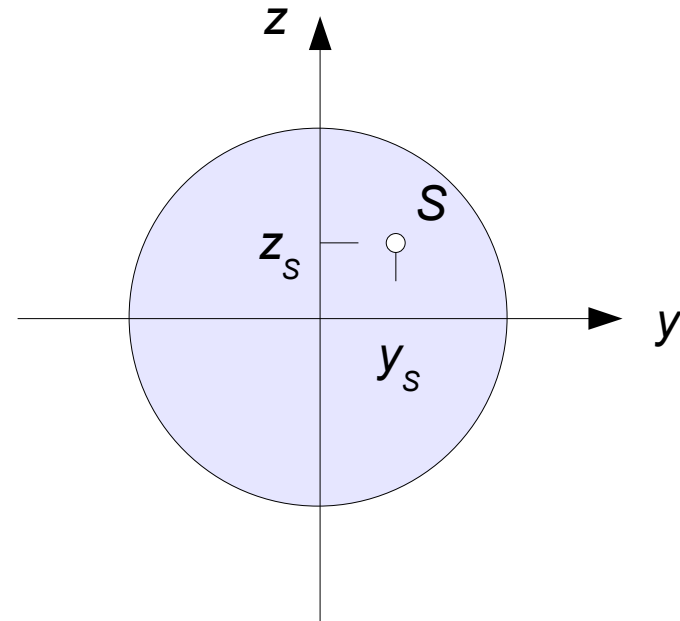
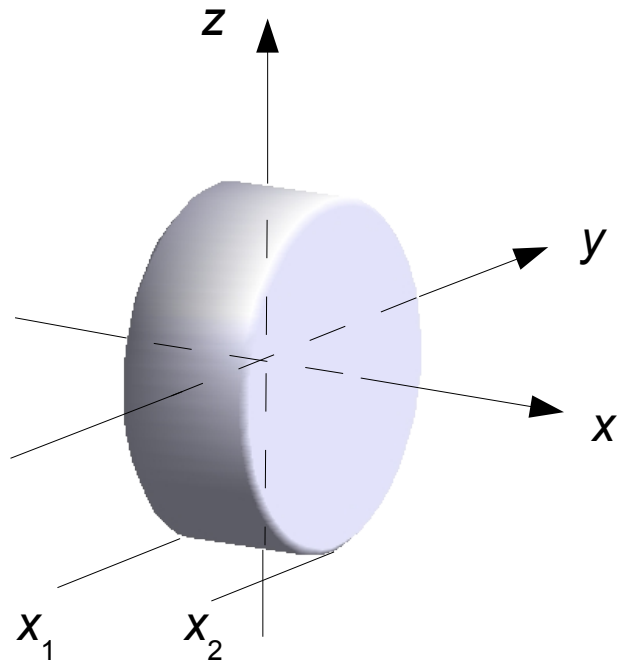
$$\begin{aligned} [\mathbf{F}]_O &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ 0 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_\eta \\ F_\zeta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_\eta \cos(\omega t) - F_\zeta \sin(\omega t) \\ F_\eta \sin(\omega t) + F_\zeta \cos(\omega t) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega t + \beta) \\ \sin(\omega t + \beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit $F = \sqrt{F_\eta^2 + F_\zeta^2}$, $\tan(\beta) = \frac{F_\zeta}{F_\eta} = \frac{J_{S\xi\zeta}}{J_{S\xi\eta}}$

4.1 Dynamische Unwucht

- Auswuchten:
 - Gegeben ist ein Rad der Masse m_0 , das sich um die x -Achse dreht.
 - Der Schwerpunkt des Rades hat die Koordinaten y_s und z_s .
 - Die Deviationsmomente sind J_{xy0} und J_{xz0} .
 - Zwei Ausgleichsmassen der Masse m sollen auf der Vorder- und Rückseite des Rades so angebracht werden, dass das Rad ausgewuchtet ist.

4.1 Dynamische Unwucht



- Vorderseite: $x = x_2$
- Rückseite: $x = x_1$

4.1 Dynamische Unwucht

- Das Rad ist statisch ausgewuchtet, wenn der Gesamtschwerpunkt nach Anbringen der Ausgleichsmassen auf der Drehachse liegt:

$$m_0 y_S + m(y_1 + y_2) = 0, \quad m_0 z_S + m(z_1 + z_2) = 0$$

- Das Rad ist dynamisch ausgewuchtet, wenn die Deviationsmomente verschwinden:

$$J_{xy0} - (x_1 y_1 + x_2 y_2) m = 0, \quad J_{xz0} - (x_1 z_1 + x_2 z_2) m = 0$$

- Aus den Gleichungen für statisches Auswuchten folgt:

$$y_2 = -y_1 - \frac{m_0}{m} y_S, \quad z_2 = -z_1 - \frac{m_0}{m} z_S$$

4.1 Dynamische Unwucht

- Aus den Gleichungen für dynamisches Auswuchten folgt damit:

$$\frac{J_{xy0}}{m} = x_1 y_1 - x_2 y_1 - \frac{m_0}{m} x_2 y_S, \quad \frac{J_{xz0}}{m} = x_1 z_1 + x_2 z_1 - \frac{m_0}{m} x_2 z_S$$

- Daraus lassen sich y_1 und z_1 berechnen:

$$y_1 = \frac{J_{xy0} + x_2 y_S m_0}{m(x_1 - x_2)}, \quad z_1 = \frac{J_{xz0} + x_2 z_S m_0}{m(x_1 - x_2)}$$

4.1 Dynamische Unwucht

- Für y_2 und z_2 ergibt sich:

$$y_2 = -\frac{J_{xy0} + x_2 y_S m_0}{m(x_1 - x_2)} - \frac{m_0}{m} y_S = -\frac{J_{xy0} + x_2 y_S m_0 + x_1 y_S m_0 - x_2 y_S m_0}{m(x_1 - x_2)}$$

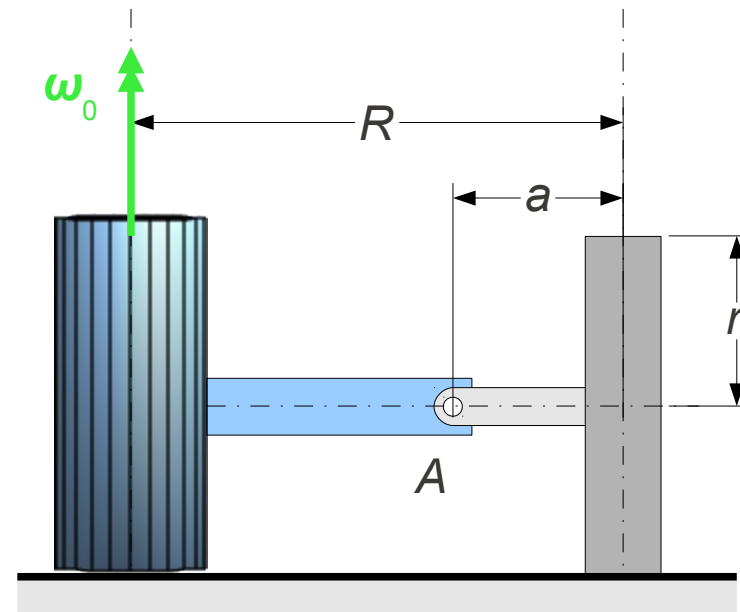
$$z_2 = -\frac{J_{xz0} + x_2 z_S m_0}{m(x_1 - x_2)} - \frac{m_0}{m} z_S = -\frac{J_{xz0} + x_2 z_S m_0 + x_1 z_S m_0 - x_2 z_S m_0}{m(x_1 - x_2)}$$

- Ergebnis:

$$y_2 = \frac{J_{xy0} + x_1 y_S m_0}{m(x_2 - x_1)}, \quad z_2 = \frac{J_{xz0} + x_1 z_S m_0}{m(x_2 - x_1)}$$

4.2 Kollergang

- Der Kollergang ist ein Mahlwerk zum Zerkleinern von Steinen, Erzen und Lebensmitteln.
- Ein oder zwei senkrecht stehende Mahlsteine drehen sich um eine senkrechte Achse und zerquetschen das Mahlgut.

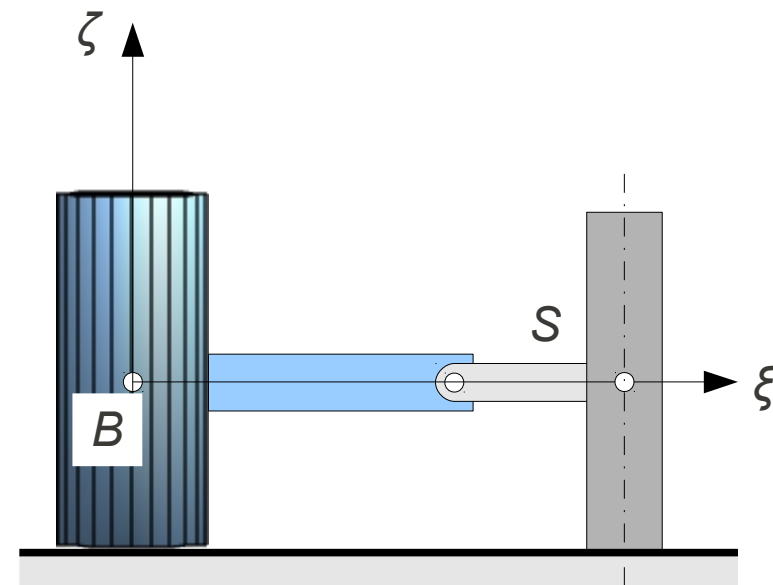


4.2 Kollergang

- Gegeben:
 - Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Drehung um die senkrechte Achse
 - Masse m des Mahlsteins, der als homogener Zylinder angenommen wird
 - Radien R und r und Abstand a
- Gesucht:
 - Mahlkraft F_M
 - Kräfte im Gelenk A

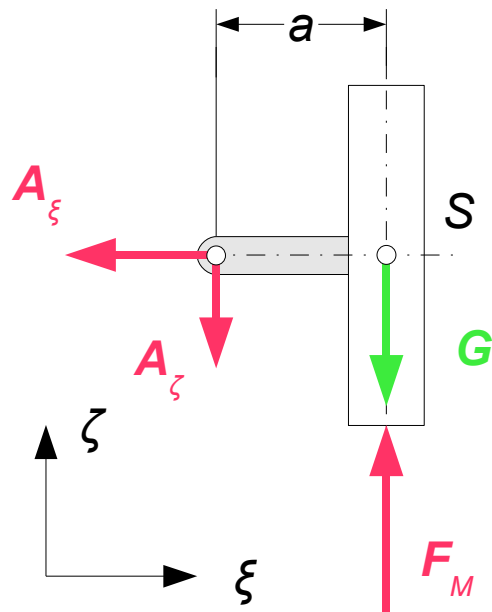
4.2 Kollergang

- Koordinatensystem:
 - Es wird ein bewegtes Koordinatensystem $B\xi\eta\zeta$ eingeführt, das mit der senkrechten Achse rotiert.
 - S ist der Schwerpunkt des Mahlsteins.



4.2 Kollergang

- Kräfte am freigeschnittenen Mahlstein:



- Impulssatz:

$$m \mathbf{a}_S = -A_{\xi} \mathbf{b}_{\xi} + (F_M - G - A_{\zeta}) \mathbf{b}_{\zeta}$$

- Absolutbeschleunigung:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_S &= \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{BS}) \\ &= \omega_0^2 \mathbf{b}_{\zeta} \times (\mathbf{b}_{\zeta} \times R \mathbf{b}_{\xi}) \\ &= -\omega_0^2 R \mathbf{b}_{\xi} \end{aligned}$$

- Damit folgt:

$$\begin{aligned} A_{\xi} &= \omega_0^2 R m \\ F_M &= G + A_{\zeta} \end{aligned}$$

4.2 Kollergang

- Drallsatz bezüglich Schwerpunkt:

$$\dot{\mathbf{L}}_S = -a \mathbf{b}_\xi \times (-A_\zeta \mathbf{b}_\zeta) = -a A_\zeta \mathbf{b}_\eta$$

- Winkelgeschwindigkeit des Mahlsteins:

$$\boldsymbol{\omega}_M = -\omega_M \mathbf{b}_\xi = -\omega_0 \frac{R}{r} \mathbf{b}_\xi$$

- Drall des Mahlsteins:

$$\mathbf{L}_S = -J_S \boldsymbol{\omega}_M \mathbf{b}_\xi = -\frac{1}{2} m r^2 \omega_0 \frac{R}{r} \mathbf{b}_\xi = -\frac{1}{2} m \omega_0 R r \mathbf{b}_\xi$$

- Zeitliche Änderung des Dralls:

$$\dot{\mathbf{L}}_S = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{L}_S = \omega_0 \mathbf{b}_\zeta \times \left(-\frac{1}{2} m \omega_0 R r \mathbf{b}_\xi \right) = -\frac{1}{2} m \omega_0^2 R r \mathbf{b}_\eta$$

4.2 Kollergang

- Damit folgt:

$$A_{\zeta} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \frac{r R}{a}$$

- Ergebnis:

- Gelenkkräfte: $A_{\xi} = m \omega_0^2 R, \quad A_{\zeta} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 R \frac{r}{a}$

- Mahlkraft: $F_M = m \left(g + \frac{1}{2} \omega_0^2 R \frac{r}{a} \right)$

- Bemerkung:

- Ähnliche Verhältnisse liegen beim Rad eines Autos vor, das um eine Kurve fährt.

4.2 Kollergang

- Zahlenwerte:

- Für $\omega_0 = 4\text{s}^{-1}$, $m = 500\text{kg}$, $R = 1\text{m}$, $a = 0,5\text{m}$ und $r = 0,5\text{m}$ gilt:

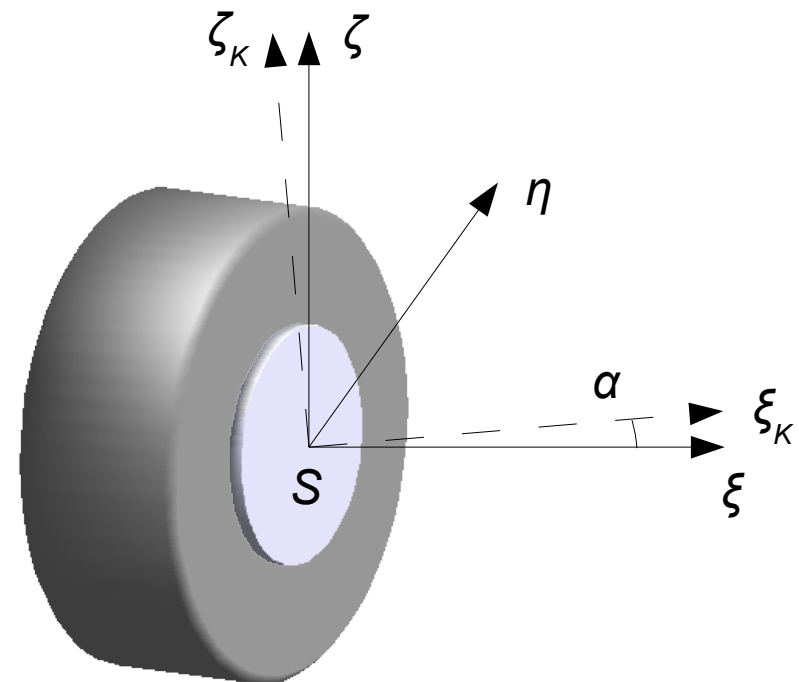
$$A_\xi = 500\text{ kg} \cdot 4^2\text{ s}^{-2} \cdot 1\text{ m} = \underline{8000\text{ N}}$$

$$A_\zeta = \frac{1}{2} \cdot 500\text{ kg} \cdot 4^2\text{ s}^{-2} \cdot 1 \frac{\text{m} \cdot 0,5\text{ m}}{0,5\text{ m}} = \underline{4000\text{ N}}$$

$$F_M = 500\text{ kg} \cdot 9,81\text{ m/s}^2 + 4000\text{ N} = 4905\text{ N} + 4000\text{ N} = \underline{8905\text{ N}}$$

4.3 Moment auf Radkappe

- Die abgebildete Radkappe sitzt etwas schräg auf dem Rad.
- Das radkappenfeste Koordinatensystem $K = S\xi_K \eta_K \zeta_K$ ist um den Winkel α um die η -Achse des radfesten Koordinatensystems $R = S\xi\eta\zeta$ gedreht.
- S ist der Schwerpunkt der Radkappe.

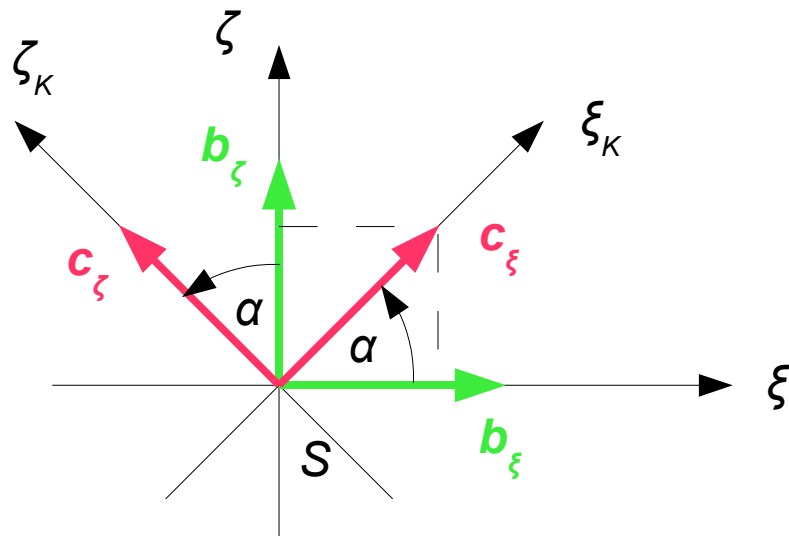


4.3 Moment auf Radkappe

- Gegeben:
 - Die Radkappe ist eine dünne homogene Scheibe.
 - Masse der Radkappe: $m = 200g$
 - Radius der Radkappe: $r = 20cm$
 - Schrägstellung: $\alpha = 5^\circ$
 - Winkelgeschwindigkeit um die radfeste ξ -Achse: $\omega = 100s^{-1}$
- Gesucht:
 - erforderliches Moment, um die Radkappe festzuhalten

4.3 Moment auf Radkappe

- Koordinatensysteme:



- Zusammenhang:

$$\mathbf{c}_\xi = \cos(\alpha) \mathbf{b}_\xi + \sin(\alpha) \mathbf{b}_\zeta$$

$$\mathbf{c}_\eta = \mathbf{b}_\eta$$

$$\mathbf{c}_\zeta = -\sin(\alpha) \mathbf{b}_\xi + \cos(\alpha) \mathbf{b}_\zeta$$

$$[\mathbf{T}]_{RK} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [\mathbf{c}_\xi]_R & [\mathbf{c}_\eta]_R & [\mathbf{c}_\zeta]_R \end{array}$$

4.3 Moment auf Radkappe

- Trägheitstensor:

- im radkappenfesten Koordinatensystem:

$$[\mathbf{J}_S]_K = \frac{1}{4} m r^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Im radfesten Koordinatensystem: $[\mathbf{J}_S]_R = [\mathbf{T}]_{RK} [\mathbf{J}_S]_K [\mathbf{T}]_{RK}^T$

$$[\mathbf{J}_S]_R = \frac{1}{4} m r^2 \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

4.3 Moment auf Radkappe

- Ausrechnen ergibt

$$[\mathbf{J}_S] = \frac{1}{4} m r^2 \begin{bmatrix} 2 \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) & 0 & \cos^2(\alpha) + 2 \sin^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

- Drall:

- Im radfesten Koordinatensystem R gilt: $[\mathbf{L}_S]_R = [\mathbf{J}_S]_R [\boldsymbol{\omega}]_R$

$$\begin{bmatrix} L_{S\xi} \\ L_{S\eta} \\ L_{S\zeta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} m r^2 \begin{bmatrix} 2 \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) & 0 & \cos^2(\alpha) + 2 \sin^2(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3 Moment auf Radkappe

- Ausrechnen ergibt:

$$\begin{bmatrix} L_{S\xi} \\ L_{S\eta} \\ L_{S\zeta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} m r^2 \omega \begin{bmatrix} 2 \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

- Moment:

- Aus dem Drallsatz $\mathbf{M}_S = \dot{\mathbf{L}}_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_S$ folgt:

$$[\mathbf{M}_S]_R = [\boldsymbol{\omega}]_R \times [\mathbf{L}_S]_R$$

$$\begin{bmatrix} M_{S\xi} \\ M_{S\eta} \\ M_{S\zeta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} m r^2 \omega^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} m r^2 \omega^2 \sin(2\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3 Moment auf Radkappe

- Zahlenwert:

$$M_{S_\eta} = -\frac{1}{8} \cdot 0,2 \text{ kg} \cdot 0,2^2 \text{ m}^2 \cdot 100^2 \text{ s}^{-2} \cdot \sin(10^\circ) = \underline{\underline{-1,736 \text{ Nm}}}$$

- Die Kappe versucht, sich in die $\eta\zeta$ -Ebene zu drehen.
- Bemerkung:
 - Die Transformation des Trägheitstensors lässt sich vermeiden, wenn im radkappenfesten System gerechnet wird.
 - Dazu muss die Winkelgeschwindigkeit in das radkappenfeste System transformiert und das Moment in das radfeste System zurück transformiert werden.