5. Zustandsgleichung des starren Körpers

5.1 Zustandsgleichung

- Zustand:
  - Der Zustand eines starren Körpers ist durch seine Lage und seine Geschwindigkeit gekennzeichnet.
  - Lageparameter:
    - Ortsvektor des Bezugspunkts
    - Euler-Winkel (oder andere Parameter zur Beschreibung der Orientierung im Raum)
  - Geschwindigkeitsparameter:
    - Geschwindigkeit des Bezugspunkts
    - Winkelgeschwindigkeit

5.1 Zustandsgleichung

- Die Komponenten des Ortsvektors und des Geschwindigkeitsvektors des Bezugspunkts werden üblicherweise im ortsfesten Koordinatensystem angegeben.
- Die Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit werden in der Regel im körperfesten Koordinatensystem angegeben.
- Bei Verwendung von Euler-Winkeln lauten die Zustandsparameter:

$$[\boldsymbol{z}] = \begin{bmatrix} x_B & y_B & z_B & \phi & \theta & \psi & v_{Bx} & v_{By} & v_{Bz} & \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \end{bmatrix}^T$$

5.1 Zustandsgleichung

- Zur Ermittlung der 12 Zustandsparameter stehen 6 kinematische und 6 kinetische Gleichungen zur Verfügung.
- Kinematik:
  - Für die Ableitungen der Lageparameter gelten die kinematischen Beziehungen:

$$\dot{x}_B = v_{Bx} \qquad \dot{\phi} = \omega_\xi + \sin(\phi)\tan(\theta)\,\omega_\eta + \cos(\phi)\tan(\theta)\,\omega_\zeta$$

$$\dot{y}_B = v_{By} \qquad \dot{\theta} = \cos(\phi)\,\omega_\eta - \sin(\phi)\,\omega_\zeta$$

$$\dot{z}_B = v_{Bz} \qquad \dot{\psi} = \frac{1}{\cos(\theta)}\left(\sin(\phi)\,\omega_\eta + \cos(\phi)\,\omega_\zeta\right)$$

5.1 Zustandsgleichung

- Kinetik:
  - Für die Ableitungen der Geschwindigkeitsparameter gelten Schwerpunktsatz und Drallsatz.
  - Schwerpunktsatz: $m\,\dot{\boldsymbol{v}}_S = \boldsymbol{F}$
    - Mit $\dot{\boldsymbol{v}}_S = \dot{\boldsymbol{v}}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{BS} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BS}\right)$ folgt:

      $$m\,\dot{\boldsymbol{v}}_B = \boldsymbol{F} - m\,\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{BS} - m\,\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BS}\right)$$

    - Für *B* = *S* vereinfacht sich der Schwerpunktsatz zu

      $$m\,\dot{\boldsymbol{v}}_S = \boldsymbol{F}$$

    - Im ortsfesten Koordinatensystem gilt: $m\left[\dot{\boldsymbol{v}}_S\right]_O = \left[\boldsymbol{F}\right]_O$

5.1 Zustandsgleichung

- Drallsatz:
  - Ist der Bezugspunkt *B* ortsfest oder gleich dem Schwerpunkt, dann lautet der Drallsatz:

$$\frac{{}^{B}d\,\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{B}}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B}}$$

  - Im körperfesten Koordinatensystem gilt:

$$[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}]_B[\dot{\boldsymbol{\omega}}]_B=[\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B}}]_B-[\boldsymbol{\omega}]_B\times[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}]_B[\boldsymbol{\omega}]_B$$

5.1 Zustandsgleichung

- In einem Hauptachsensystem lautet diese Gleichung:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_{B1} \\ M_{B2} \\ M_{B3} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

- Ausrechnen ergibt:

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 &= M_{B1} + \left(J_2-J_3\right)\omega_2\omega_3 \\ J_2\dot{\omega}_2 &= M_{B2} + \left(J_3-J_1\right)\omega_3\omega_1 \\ J_3\dot{\omega}_3 &= M_{B3} + \left(J_1-J_2\right)\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

- Diese Gleichungen werden als Eulersche Kreiselgleichungen bezeichnet.

5.1 Zustandsgleichung

- Zustandsgleichung:
  - Die 6 kinematischen und die 6 kinetischen Gleichungen bilden ein System von 12 gekoppelten Differenzialgleichungen:

$$[\dot{\boldsymbol{z}}]=[\boldsymbol{f}([\boldsymbol{z}],t)]$$

  - Bei gegebenen Anfangsbedingungen $[\boldsymbol{z}(0)]=[\boldsymbol{z}_0]$

    lassen sich daraus die Zustandsparameter für jeden beliebigen Zeitpunkt berechnen.
  - Die Zustandsgleichung kann in der Regel nur numerisch integriert werden.

5.2 Körper im Schwerefeld

- Aufgabenstellung:
  - Für einen Körper, an dem nur die Gewichtskraft angreift, soll die Zustandsgleichung aufgestellt werden.
- Vereinbarungen:
  - Die Schwerkraft wirkt entgegen der ortsfesten z-Achse.
  - Als körperfestes Koordinatensystem wird ein Hauptachsensystem gewählt.
  - Als Bezugspunkt wird der Schwerpunkt gewählt.

5.2 Körper im Schwerefeld

- Kinematik:
  - Ableitungen des Ortsvektors: $[\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{S}}]_O = [\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{S}}]_O$

$$\dot{x}_S = v_{Sx}$$
$$\dot{y}_S = v_{Sy}$$
$$\dot{z}_S = v_{Sz}$$

  - Ableitungen der Euler-Winkel:

$$\dot{\phi} = \omega_1 + \sin(\phi)\tan(\theta)\omega_2 + \cos(\phi)\tan(\theta)\omega_3$$
$$\dot{\theta} = \cos(\phi)\omega_2 - \sin(\phi)\omega_3$$
$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos(\theta)}\left(\sin(\phi)\omega_2 + \cos(\phi)\omega_3\right)$$

5.2 Körper im Schwerefeld

- Kinetik:
  - Schwerpunktsatz: $\left[\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{S}}\right]_O = \dfrac{1}{m}\left[\boldsymbol{F}\right]_O$

$$\dot{v}_{Sx} = 0, \quad \dot{v}_{Sy} = 0, \quad \dot{v}_{Sz} = -g$$

  - Drallsatz: $\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}\right]_B = \left[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}\right]_B^{-1}\left(\left[\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{S}}\right]_B - \left[\boldsymbol{\omega}\right]_B \times \left[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}\right]\left[\boldsymbol{\omega}\right]_B\right)$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1}\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2}\omega_3\omega_1, \quad \dot{\omega}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}\omega_1\omega_2$$

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Aufgabenstellung:
  - Betrachtet wird ein starrer Körper, der beliebige Drehungen um den Schwerpunkt ausführen kann.
  - Das Moment der äußeren Kräfte bezüglich des Schwerpunkts ist null.
  - Es soll untersucht werden, wie der Körper auf kleine Störungen reagiert.

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Lösungen der Eulerschen Kreiselgleichungen:
  - Da keine Momente auftreten, lauten die Eulerschen Kreiselgleichungen

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 &= \left(J_2 - J_3\right) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 &= \left(J_3 - J_1\right) \omega_3 \omega_1 \\ J_3 \dot{\omega}_3 &= \left(J_1 - J_2\right) \omega_1 \omega_2 \end{aligned}$$

  - Drei Lösungen dieser Gleichungen können sofort angegeben werden:

$$\left[\boldsymbol{\omega}_1\right]_B = \begin{bmatrix} \omega_{01} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\boldsymbol{\omega}_2\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{02} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\boldsymbol{\omega}_3\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{03} \end{bmatrix}, \quad \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03} = const.$$

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Das sind Drehungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine der drei Hauptachsen.

- Stabilitätsanalyse:
  - Bei der Stabilitätsanalyse wird untersucht, wie sich eine anfangs kleine Störung einer Lösung zeitlich entwickelt.
  - Für die Drehung um die 1. Hauptachse lautet die gestörte Lösung:

$$\omega_1(t) = \omega_{01} + \Delta\omega_1(t)$$
$$\omega_2(t) = \Delta\omega_2(t)$$
$$\omega_3(t) = \Delta\omega_3(t)$$

  - Die Störungen sind zeitabhängige Funktionen.

- Einsetzen der gestörten Größen in die Eulerschen Kreiselgleichungen liefert:

$$
\begin{aligned}
J_1 \Delta \dot{\omega}_1 &- \left(J_2 - J_3\right) \Delta \omega_2 \Delta \omega_3 &= 0 \\
J_2 \Delta \dot{\omega}_2 &- \left(J_3 - J_1\right) \Delta \omega_3 \left(\omega_{01} + \Delta \omega_1\right) &= 0 \\
J_3 \Delta \dot{\omega}_3 &- \left(J_1 - J_2\right) \left(\omega_{01} + \Delta \omega_1\right) \Delta \omega_2 &= 0
\end{aligned}
$$

- Erste Methode von Ljapunow:
  - Bei der so genannten ersten Methode von Ljapunow werden die Gleichungen linearisiert, indem Produkte und höhere Potenzen der Störgrößen vernachlässigt werden.

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Die Linearisierung führt auf

$$\begin{aligned} J_1 \Delta \dot{\omega}_1 & & &= 0 \\ J_2 \Delta \dot{\omega}_2 &- &\left(J_3 - J_1\right) \omega_{01} \Delta \omega_3 &= 0 \\ J_3 \Delta \dot{\omega}_3 &- &\left(J_1 - J_2\right) \omega_{01} \Delta \omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Aus der ersten Gleichung folgt: $\Delta \omega_1 = const.$
- Die zweite Gleichung kann nach $\Delta\omega_3$ aufgelöst werden:

$$\Delta \omega_3 = \frac{J_2}{J_3 - J_1} \frac{\Delta \dot{\omega}_2}{\omega_{01}}$$

- Damit lautet die dritte Gleichung:

$$\frac{1}{\omega_{01}} \frac{J_2 J_3}{J_3 - J_1} \Delta \ddot{\omega}_2 - \left(J_1 - J_2\right) \omega_{01} \Delta \omega_2 = 0$$

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Mit

$$\lambda^2 = \omega_{01}^2 \frac{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)}{J_2 J_3}$$

folgt daraus: $$\Delta \ddot{\omega}_2 + \lambda^2 \Delta \omega_2 = 0$$

- Fall 1: $\lambda^2 < 0$
  - Dieser Fall tritt ein, wenn J_1 das mittlere Hauptträgheitsmoment ist: $J_2 < J_1 < J_3$
  - Mit $a^2 = -\lambda^2 > 0$ lautet die Differenzialgleichung

$$\Delta \ddot{\omega}_2 - a^2 \Delta \omega_2 = 0$$

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Sie hat die Lösung: $\Delta\omega_2(t) = A_1 e^{at} + A_2 e^{-at}$
- Die Störung wächst exponentiell mit der Zeit an.
- Eine Drehung um die Hauptachse mit dem mittleren Haupt-trägheitsmoment ist instabil.

– Fall 2: $\lambda^2 > 0$

- Die Differenzialgleichung hat die Lösung

$$\Delta\omega_2(t) = A_1 \cos(\lambda t) + A_2 \sin(\lambda t)$$

- Es liegt ein so genannter kritischer Fall vor. Die Stabilität der Lösung kann nicht aus den linearisierten Gleichungen ermit-telt werden.

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Direkte Methode von Ljapunow:
  - Die Stabilität der Lösung im Fall 2 kann mit der direkten Methode von Ljapunow untersucht werden.
  - Dazu muss zunächst eine so genannte Ljapunow-Funktion definiert werden. Das ist eine beliebige Funktion der Störgrößen, für die gilt:

    (1) $V(0,0,0)=0$

    (2) $V(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega_3)>0$ innerhalb eines Gebiets um den Nullpunkt

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Eine Lösung ist stabil, wenn

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \Delta \omega_1} \Delta \dot{\omega}_1 + \frac{\partial V}{\partial \Delta \omega_2} \Delta \dot{\omega}_2 + \frac{\partial V}{\partial \Delta \omega_3} \Delta \dot{\omega}_3 \leq 0$$

  gilt, wobei die Störung $(\Delta \omega_1, \Delta \omega_2, \Delta \omega_3)$ eine Lösung der nichtlinearen Störgleichung ist.

- Eine Ljapunow-Funktion für den momentenfreien Körper lässt sich aus der kinetischen Energie und dem Quadrat des Dralls konstruieren.
  - Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} 2E^K &= J_1 \left(\omega_{01} + \Delta \omega_1\right)^2 + J_2 \Delta \omega_2^2 + J_3 \Delta \omega_3^2 \\ &= J_1 \Delta \omega_1^2 + J_2 \Delta \omega_2^2 + J_3 \Delta \omega_3^2 + J_1 \omega_{01}^2 + 2 J_1 \omega_{01} \Delta \omega_1 \end{aligned}$$

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Quadrat des Dralls:

$$L^2 = J_1^2 \left(\omega_{01} + \Delta \omega_1 \right)^2 + J_2 \Delta \omega_2^2 + J_3 \Delta \omega_3^2$$
$$= J_1^2 \Delta \omega_1^2 + J_2^2 \Delta \omega_2^2 + J_3^2 \Delta \omega_3^2 + J_1^2 \omega_{01}^2 + 2 J_1^2 \omega_{01} \Delta \omega_1$$

- Für die Funktion

$$V = L^2 - 2 J_1 E^K = J_2 \left(J_2 - J_1 \right) \Delta \omega_2^2 + J_3 \left(J_3 - J_1 \right) \Delta \omega_3^2$$

gilt: $V(0,0,0) = 0$

- Da keine äußeren Kräfte und Momente angreifen, sind E^K und L Erhaltungsgrößen. Daher ist V zeitlich konstant:

$$\dot{V} = 2 \left[J_2 \left(J_2 - J_1 \right) \Delta \omega_2 \Delta \dot{\omega}_2 + J_3 \left(J_3 - J_1 \right) \Delta \omega_3 \Delta \dot{\omega}_3 \right] = 0$$

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Fall a) $J_2 > J_1$ und $J_3 > J_1$
  - Die Drehung erfolgt um die Hauptachse mit dem kleinsten Massenträgheitsmoment.
  - Es gilt $V > 0$. V ist eine Ljapunow-Funktion und die Lösung daher stabil.
- Fall b) $J_2 < J_1$ und $J_3 < J_1$
  - Die Drehung erfolgt um die Hauptachse mit dem größten Massenträgheitsmoment.
  - Es gilt $-V > 0$. $-V$ ist eine Ljapunow-Funktion und die Lösung daher stabil.

5.3 Stabilität freier Rotationen

- Ergebnis:
  - Drehungen um die Hauptachse mit dem kleinsten oder dem größten Massenträgheitsmoment sind stabil.
  - Drehungen um die Hauptachse mit dem mittleren Massenträgheitsmoment sind instabil.