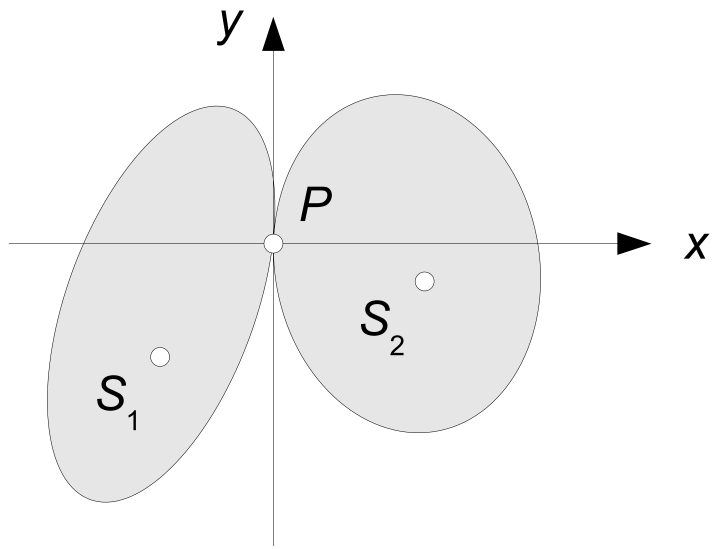
2. Exzentrischer Stoß

2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Aufgabenstellung:
  - Zwei glatte Körper stoßen aufeinander.
  - Bekannt sind die Massen m_1 und m_2, die Massenträgheitsmomente J_{S1} und J_{S2} , die Schwerpunktsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ sowie die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 vor dem Stoß.
  - Gesucht sind die Schwerpunktsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{V}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ sowie die Winkelgeschwindigkeiten Ω_1 und Ω_2 nach dem Stoß.

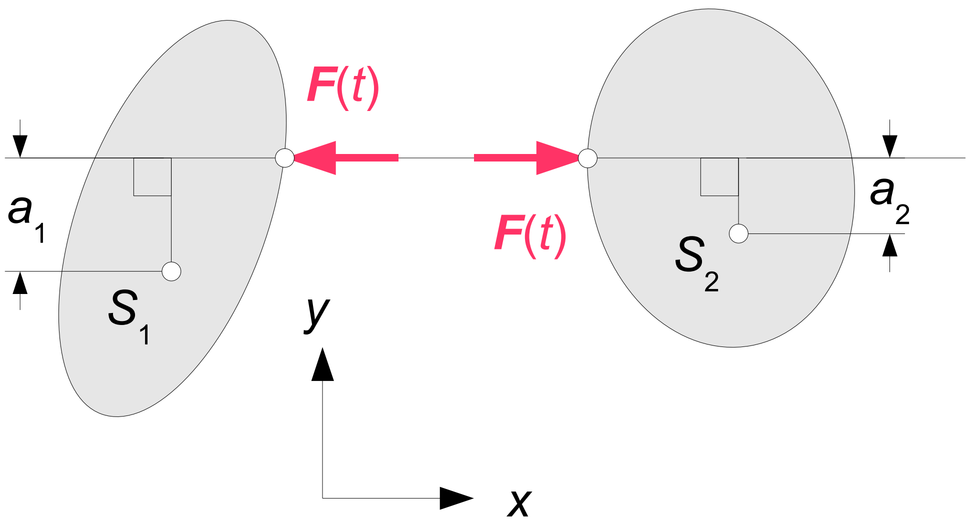
2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Koordinatensystem:
  - Die *x*-Achse zeigt entlang der Stoßnormalen.
  - Die *y*-Achse liegt in der Berührungsebene.



2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Aufstellen der Gleichungen:
  - Freischnitt:



2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Integrierter Impulssatz für Körper 1:

$$m_1 \left(V_{1x} - v_{1x} \right) = -\hat{F}_x$$
$$m_1 \left(V_{1y} - v_{1y} \right) = 0$$

- Integrierter Drallsatz für Körper 1:

$$J_{S1} \left(\Omega_1 - \omega_1 \right) = a_1 \hat{F}_x$$

- Integrierter Impulssatz für Körper 2:

$$m_2 \left(V_{2x} - v_{2x} \right) = \hat{F}_x$$
$$m_2 \left(V_{2y} - v_{2y} \right) = 0$$

- Integrierter Drallsatz für Körper 2:

$$J_{S2} \left(\Omega_2 - \omega_2 \right) = -a_2 \hat{F}_x$$

2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Damit stehen sechs Gleichungen zur Ermittlung der sieben unbekannten Größen V_{1x}, V_{1y}, V_{2x}, V_{2y}, Ω_1, Ω_2 und $\hat{F}_x$ zur Verfügung.
- Die fehlende Gleichung folgt aus der Stoßbedingung, die zwischen den Geschwindigkeiten im Punkt *P* besteht. Mit der Stoßzahl *k* gilt:

$$k=-\frac{V_{P1x}-V_{P2x}}{v_{P1x}-v_{P2x}}$$

- Für die Geschwindigkeiten im Punkt *P* gelten die kinematischen Beziehungen

$$\begin{aligned} v_{P1x} &= v_{1x}-a_1\omega_1 & \quad v_{P2x} &= v_{2x}-a_2\omega_2 \\ V_{P1x} &= V_{1x}-a_1\Omega_1 & \quad V_{P2x} &= V_{2x}-a_2\Omega_2 \end{aligned}$$

2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Auflösen der Gleichungen:
  - Aus dem integrierten Impulssatz in *y*-Richtung folgt:

    $$V_{1y} = v_{1y}\,, \quad V_{2y} = v_{2y}$$

  - Aus dem integrierten Impulssatz in *x*-Richtung folgt:

    $$V_{1x} = v_{1x} - \frac{\hat{F}_x}{m_1}\,, \quad V_{2x} = v_{2x} + \frac{\hat{F}_x}{m_2}$$

  - Aus dem integrierten Drallsatz folgt:

    $$\Omega_1 = \omega_1 + \frac{a_1 \hat{F}_x}{J_{S1}}\,, \quad \Omega_2 = \omega_2 - \frac{a_2 \hat{F}_x}{J_{S2}}$$

  - Damit lassen sich die gesuchten Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten berechnen, wenn der Kraftstoß bekannt ist.

2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Aus der Stoßbedingung folgt: $k\left(v_{P1x}-v_{P2x}\right)+V_{P1x}-V_{P2x}=0$

- Mit den kinematischen Beziehungen ergibt sich:

$$k\left(v_{1x}-a_1\omega_1-v_{2x}+a_2\omega_2\right)+V_{1x}-a_1\Omega_1-V_{2x}+a_2\Omega_2=0$$

$$\rightarrow \quad V_{1x}-V_{2x}-a_1\Omega_1+a_2\Omega_2=-k\left(v_{1x}-v_{2x}-a_1\omega_1-a_2\omega_2\right)$$

- Einsetzen der Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten und dem Kraftstoß führt auf:

$$v_{1x}-v_{2x}-\hat{F}_x\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-a_1\omega_1+a_2\omega_2-\hat{F}_x\left(\frac{a_1^2}{J_{S1}}+\frac{a_2^2}{J_{S2}}\right)$$
$$=-k\left(v_{1x}-v_{2x}-a_1\omega_1+a_2\omega_2\right)$$

2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Daraus folgt:

$$(1+k)(v_{1x}-v_{2x}-a_1\omega_1+a_2\omega_2)=\hat{F}_x\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{a_1^2}{J_{S1}}+\frac{a_2^2}{J_{S2}}\right)$$

- Ergebnis:

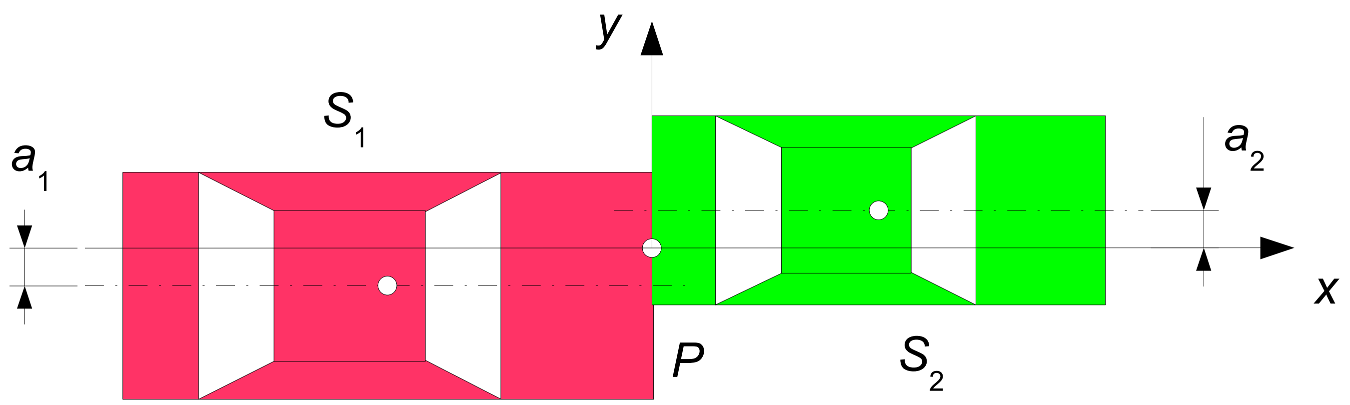
$$\hat{F}_x=(1+k)\frac{v_{1x}-v_{2x}-a_1\omega_1+a_2\omega_2}{\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{a_1^2}{J_{S1}}+\dfrac{a_2^2}{J_{S2}}}$$

$$V_{1x}=v_{1x}-\frac{\hat{F}_x}{m_1},\quad V_{1y}=v_{1y},\quad \Omega_1=\omega_1+\frac{a_1\hat{F}_x}{J_{S1}}$$

$$V_{2x}=v_{2x}+\frac{\hat{F}_x}{m_2},\quad V_{2y}=v_{2y},\quad \Omega_2=\omega_2-\frac{a_2\hat{F}_x}{J_{S2}}$$

2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Beispiel:
  - Ein Fahrzeug fährt seitlich versetzt auf ein langsameres Fahrzeug auf.



2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Daten für Fahrzeug 1:
  - Masse $m_1 = 2000kg$
  - Massenträgheits-moment $J_{S1} = 1500kgm^2$
  - Geschwindigkeit $v_1 = 180km/h$
  - Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 0s^{-1}$
  - Abstand $a_1 = 0{,}5m$
- Daten für Fahrzeug 2:
  - Masse $m_2 = 1000kg$
  - Massenträgheits-moment $J_{S2} = 500kgm^2$
  - Geschwindigkeit $v_2 = 140km/h$
  - Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = 0s^{-1}$
  - Abstand $a_2 = -0{,}3m$
- Stoßzahl: $k = 0{,}4$

2.1 Ebener Stoß zwischen freien Körpern

- Bemerkung:
  - Der Wert des Abstandes a_2 ist negativ, da sich der Stoßpunkt *P* unterhalb des Schwerpunktes S_2 befindet.
- Ergebnisse:
  - Kraftstoß: $\hat{F}_x = 8423{,}6\,Ns$
  - Geschwindigkeiten: $V_1 = 164{,}8\,km/h\,,\quad V_2 = 170{,}3\,km/h$
  - Winkelgeschwindigkeiten: $\Omega_1 = 2{,}81\,s^{-1}\,,\quad \Omega_2 = 5{,}05\,s^{-1}$

2.2 Ebener Stoß auf gelagerten Körper

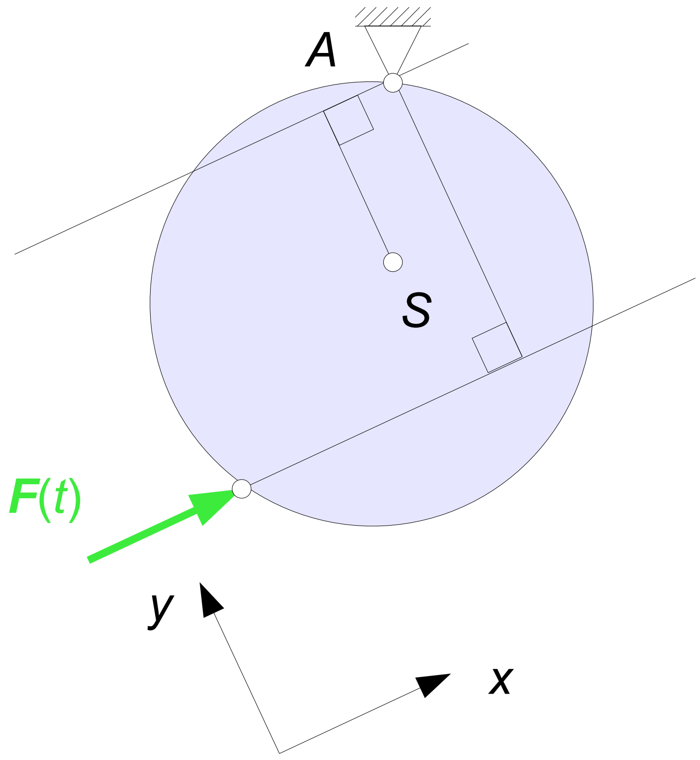
- Beim Stoß auf einen gelagerten Körper treten auch am Lager Stoßkräfte auf.
- Die Stoßkräfte am Lager haben die gleiche Größenordnung wie die Stoßkräfte am Stoßpunkt.
- Alle anderen Kräfte können gegenüber den Stoßkräften vernachlässigt werden.

2.2 Stoß auf gelagerten Körper

- Aufgabenstellung:
  - Auf einen gelenkig gelagerten Körper wirkt ein Stoß.
  - Der gestoßene Körper ist vor dem Stoß in Ruhe.
  - Bekannt ist der Kraftstoß $\hat{\boldsymbol{F}}$, die Masse m und das Massenträgheitsmoment J_A des gestoßenen Körpers.
  - Gesucht sind die Lagerkräfte während des Stoßes und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers nach dem Stoß.

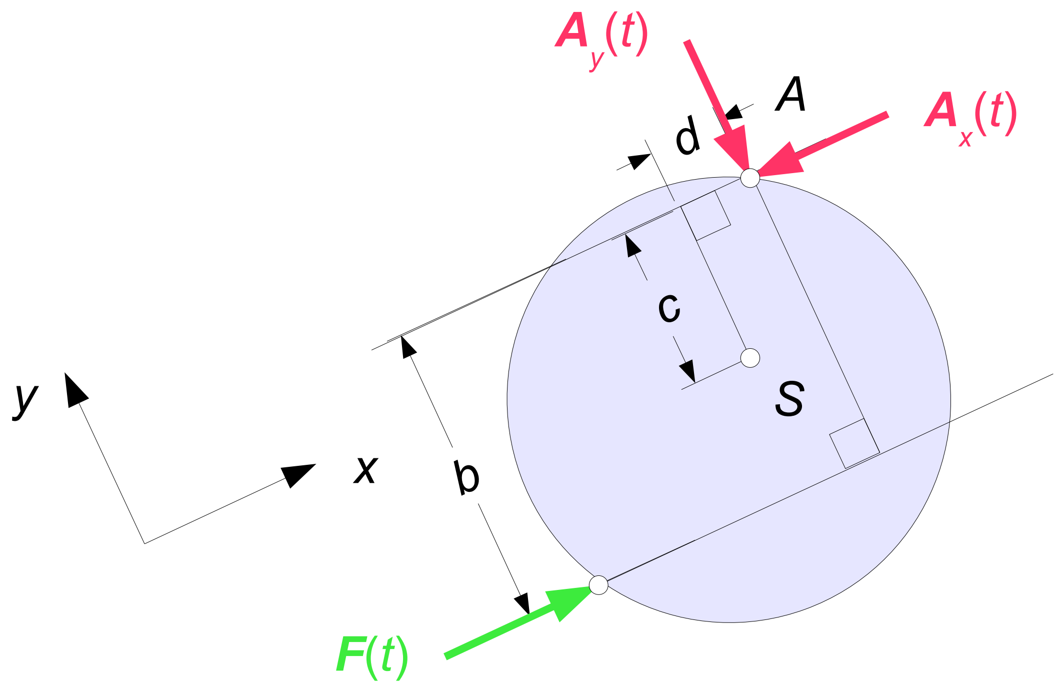
2.2 Ebener Stoß auf gelagerten Körper

- Koordinatensystem:
  - Die *x*-Achse wird so gewählt, dass sie in Richtung des Kraftstoßes zeigt.



2.2 Ebener Stoß auf gelagerten Körper

- Aufstellen der Gleichungen:
  - Freischnitt:



2.2 Ebener Stoß auf gelagerten Körper

- Integrierter Impulssatz: $m V_x = \hat{F} - \hat{A}_x$

  $$m V_y = -\hat{A}_y$$

- Integrierter Drallsatz bezüglich des ortsfesten Punktes *A*:

  $$J_{Az} \Omega = b \hat{F} \quad \rightarrow \quad \Omega = \frac{b \hat{F}}{J_{Az}}$$

- Kinematik: $V_x = c\,\Omega \,, \quad V_y = -d\,\Omega$

- Damit lassen sich die Lagerkräfte aus dem integrierten Impulssatz berechnen:

$$\hat{A}_x = \hat{F} - m V_x = \hat{F} - mc\,\Omega$$
$$\hat{A}_y = -m V_y = md\,\Omega$$

$$\longrightarrow$$

$$\hat{A}_x = \hat{F} \left(1 - \frac{mcb}{J_{Az}} \right)$$
$$\hat{A}_y = \hat{F} \frac{mdb}{J_{Az}}$$

2.2 Ebener Stoß auf gelagerten Körper

- Stoßmittelpunkt *Π*:
  - Der Stoßmittelpunkt ist der Punkt, in dem der Körper gelagert werden muss, damit im Lager keine Kräfte auftreten.
  - Damit die *x*-Komponente der Lagerkraft verschwindet, muss gelten:

$$1-\frac{mcb}{J_{Az}}=0 \quad \rightarrow \quad c=\frac{J_{Az}}{mb}$$

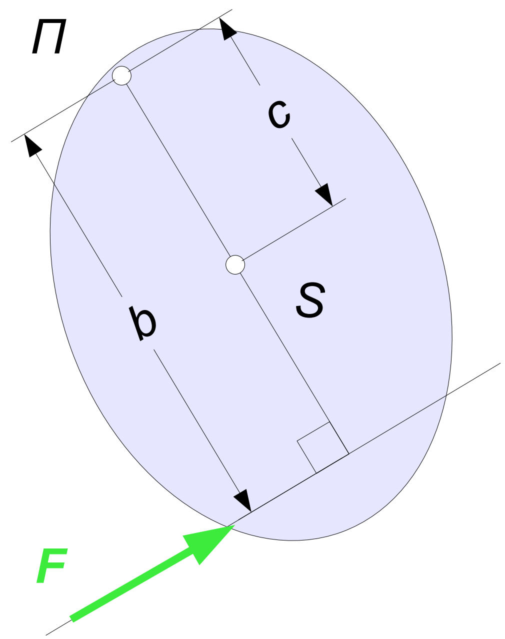
  - Mit dem Trägheitsradius $i_A=\sqrt{\frac{J_{Az}}{m}}$

    folgt: $c=\frac{i_A^2}{b}$

2.2 Stoß auf gelagerten Körper

- Damit die *y*-Komponente der Lagerkraft verschwindet, muss der Abstand *d* gleich Null sein.
- Der Stoßmittelpunkt liegt auf der zur Stoßkraft senkrechten Geraden durch den Schwerpunkt und hat vom Schwerpunkt den Abstand

$$c=\frac{i_A^2}{b}$$

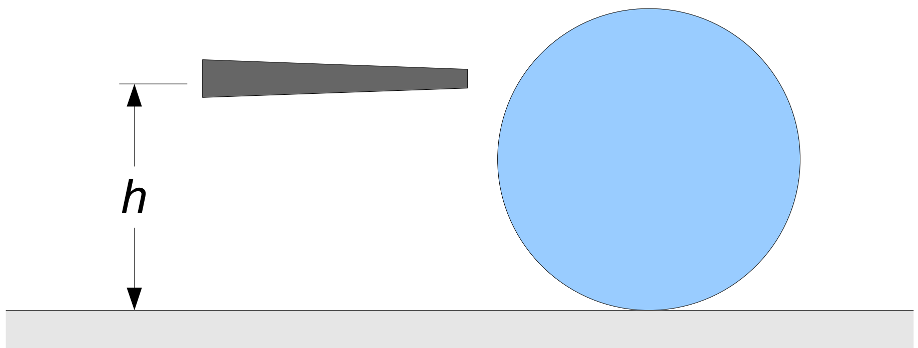


2.2 Ebener Stoß auf gelagerten Körper

- Bei Körpern, auf die Stöße wirken, wird versucht, den Lagerpunkt in den Stoßmittelpunkt zu legen:
  - Hammer
  - Tennisschläger
- Ein Körper, der nicht gelagert ist, dreht sich unmittelbar nach dem Stoß um den Stoßmittelpunkt. Der Stoßmittelpunkt ist der Momentanpol der freien Bewegung unmittelbar nach dem Stoß.

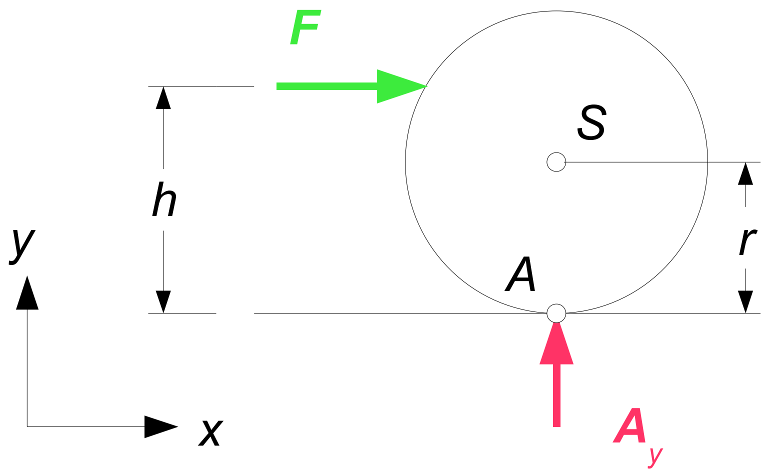
2.2 Ebener Stoß auf gelagerten Körper

- Beispiel:
  - In welcher Höhe *h* muss eine homogene Billardkugel horizontal angestoßen werden, damit sie auf glatter Ebene nach dem Stoß rollt?



2.2 Ebener Stoß auf gelagerten Körper

- Freigeschnittene Billardkugel:



- Da die Ebene glatt ist, muss die Horizontalkraft verschwinden.

2.2 Ebener Stoß auf gelagerten Körper

- Die Horizontalkraft verschwindet, wenn Punkt *A* der Stoßmittelpunkt ist.
- Dann muss gelten: $r = \frac{J_{Az}}{mh} \rightarrow h = \frac{J_{Az}}{mr}$
- Massenträgheitsmoment bezüglich Punkt *A*:

$$J_{Az} = J_{Sz} + m r^2 = \frac{2}{5} m r^2 + m r^2 = \frac{7}{5} m r^2$$

- Ergebnis: $h = \frac{7}{5} r$