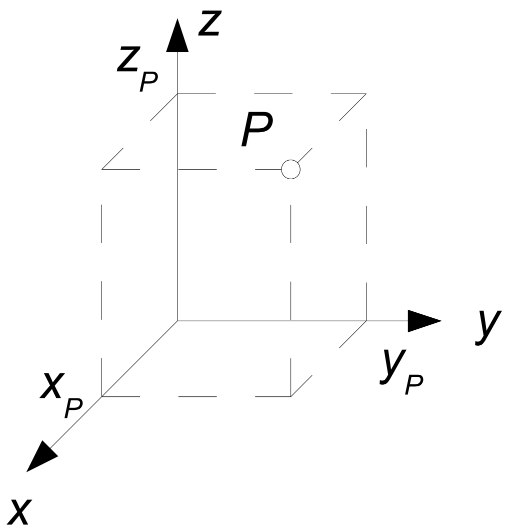
1. Prinzip der virtuellen Leistung

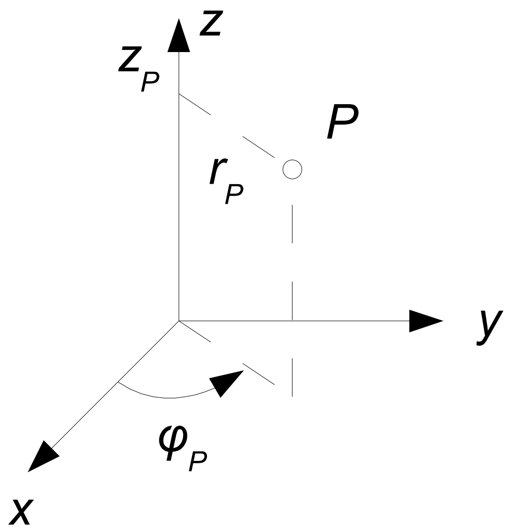
1.1 Freiheitsgrade

- Definition:
  - Die unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten eines Systems von starren Körpern werden als Freiheitsgrade bezeichnet.
  - Die Anzahl der Freiheitsgrade entspricht der Anzahl der Parameter, die vorgegeben werden müssen, damit die Lage der Körper eindeutig definiert ist.
- Massenpunkt im Raum:
  - Die Lage eines Punktes im Raum ist durch die Angabe von 3 Koordinaten eindeutig festgelegt.
  - Ein Massenpunkt im Raum hat also 3 Freiheitsgrade.

1.1 Freiheitsgrade

- Kooordinatensysteme:
  - Kartesisch: $\left(x_P, y_P, z_P\right)$
  - Zylindrisch: $\left(r_P, \phi_P, z_P\right)$



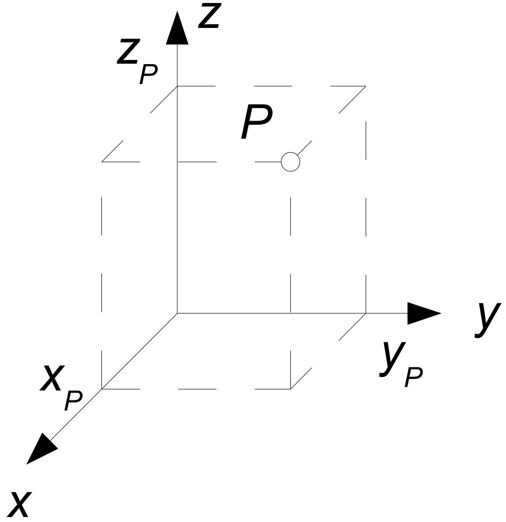


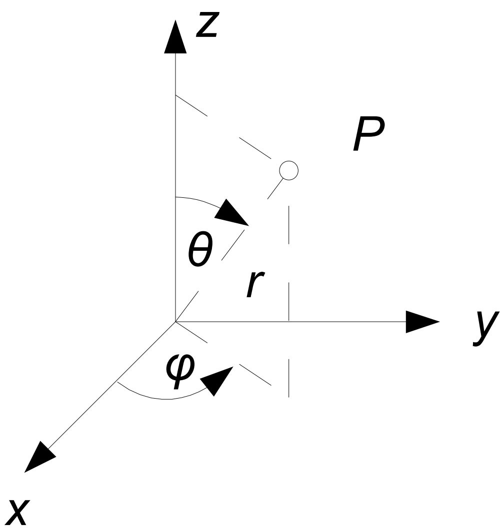
$$
\begin{aligned}
x_P &= r_P \cos\left(\phi_P\right) \\
y_P &= r_P \sin\left(\phi_P\right) \\
z_P &= z_P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_P &= \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \\
\phi_P &= \arctan\left(y_P / x_P\right) \\
z_P &= z_P
\end{aligned}
$$

1.1 Freiheitsgrade

- Kartesisch: $\left(x_P, y_P, z_P\right)$
- Sphärisch: $\left(r_P, \theta_P, \phi_P\right)$





$$
\begin{aligned}
x_P &= r_P \sin(\theta_P)\cos(\phi_P) \\
y_P &= r_P \sin(\theta_P)\sin(\phi_P) \\
z_P &= r_P \cos(\theta_P)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_P &= \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + zP^2} \\
\phi_P &= \arctan\left(y_P / x_P\right) \\
\theta_P &= \arctan\left(\sqrt{x_P^2 + y_P^2} / z_P\right)
\end{aligned}
$$

1.1 Freiheitsgrade

- Starrer Körper im Raum:
  - Ein starrer Körper im Raum hat 6 Freiheitsgrade.
  - 3 Koordinaten werden benötigt, um den Ort des Schwer-punktes im Raum festzulegen.
  - 3 weitere Koordinaten werden benötigt, um die Orientierung des Körpers im Raum festzulegen.
  - Die Orientierung im Raum kann z.B. durch die Euler-Winkel oder die Kardanwinkel beschrieben werden.

1.1 Freiheitsgrade

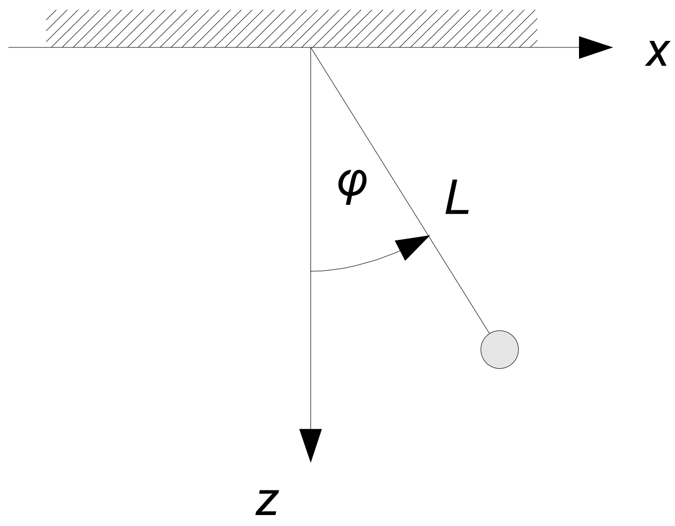
- Ergebnis:
  - Die Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems liegt fest.
  - Es gibt in der Regel verschiedene Möglichkeiten dafür, welche Variablen als Freiheitsgrade gewählt werden.
  - Es darf jedoch kein Freiheitsgrad von einem anderen abhängig sein.
  - Durch geschickte Wahl der Freiheitsgrade lassen sich viele Aufgaben stark vereinfachen.

1.2 Zwangsbedingungen

- Zwangsbedingungen schränken die Bewegungsmöglich-keiten ein:
  - Ein Massenpunkt, der sich auf einer Fläche bewegen muss, hat nur noch 2 Freiheitsgrade.
  - Ein Massenpunkt, der sich auf einer Kurve bewegen muss, hat nur noch 1 Freiheitsgrad.

1.2 Zwangsbedingungen

- Ebenes Pendel:
  - Der Massenpunkt muss sich auf einem Kreis bewegen.
  - Er hat nur einen Freiheitsgrad.
  - Als Freiheitsgrad kann z.B. der Winkel φ gewählt werden.

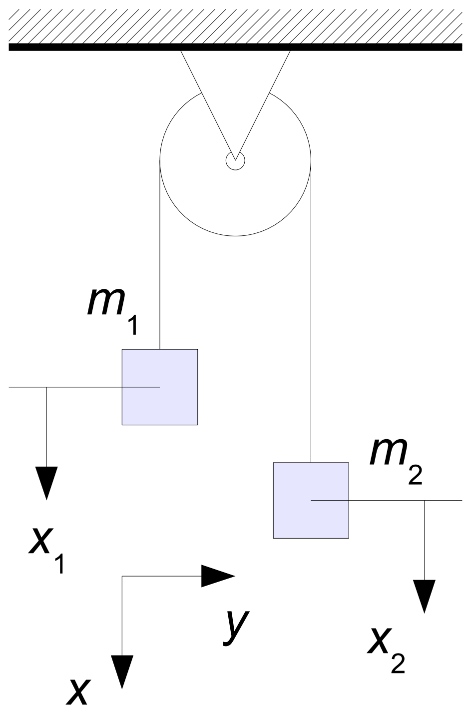


$$y = 0$$

$$x^2 + z^2 = L^2$$

1.2 Zwangsbedingungen

- Verbundene Massen:
  - Die beiden Massen können sich nur in x-Richtung bewegen.
  - Sie sind durch ein masseloses dehnstarres Seil verbunden.
  - Das System hat 1 Freiheitsgrad.
  - Zur Beschreibung kann z.B. x_1 gewählt werden.



$$y_1 = c_1, \quad y_2 = c_2, \quad z_1 = z_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 = 0$$

1.2 Zwangsbedingungen

- Allgemeine Form der Zwangsbedingungen:
  - Zwangsbedingungen werden durch im Allgemeinen nichtlineare Gleichungen der Form

    $$F_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

    beschrieben (holonome skleronome Zwangsbedingungen).
  - Beispiele:
    - Pendel: $F(x, z) = x^2 + z^2 - L^2 = 0$
    - Verbundene Massen: $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 0$

1.2 Zwangsbedingungen

- Anzahl der Freiheitsgrade:
  - Für ein System von Massenpunkten gilt: $f = 3n - r$
  - Für ein System von starren Körpern gilt: $f = 6n - r$
  - Dabei ist *f* die Anzahl der Freiheitsgrade, *n* die Anzahl der Körper und *r* die Anzahl der Zwangsbedingungen (Restriktionen).

1.2 Zwangsbedingungen

- Verallgemeinerte Koordinaten:
  - Ein System mit *f* Freiheitsgraden lässt sich durch *f* unabhängige verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ beschreiben.
  - Die physikalischen Koordinaten sind Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten:

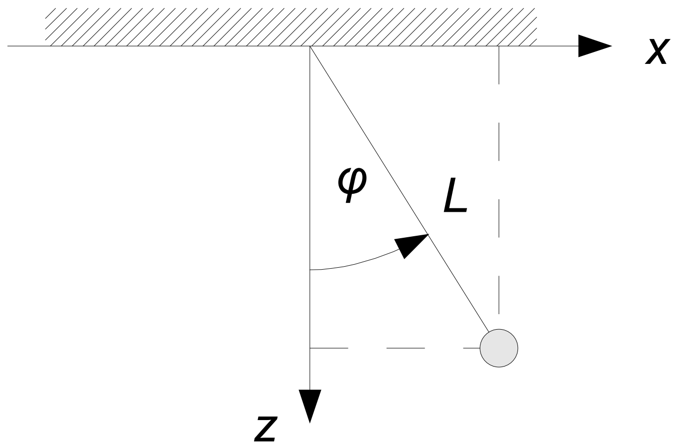
$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, \ldots, q_f) \\ y_k &= y_k(q_1, \ldots, q_f) \quad , \quad k = 1, \ldots, n \\ z_k &= z_k(q_1, \ldots, q_f) \end{aligned}$$

  - Die verallgemeinerten Koordinaten werden so gewählt, dass die Zwangsbedingungen erfüllt sind.

1.2 Zwangsbedingungen

- Beispiel: Pendel
  - Die physikalischen Koordinaten sind die Koordinaten *x* und *z* des Massenpunktes.
  - Wird als verallgemeinerte Koordinate der Winkel *φ* gewählt, dann gilt für die physikalischen Koordinaten:

$$x(\phi) = L\sin(\phi)$$
$$z(\phi) = L\cos(\phi)$$



  - Die Zwangsbedingung

$$0 = x^2 + z^2 - L^2$$
$$= L^2\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right) - L^2$$

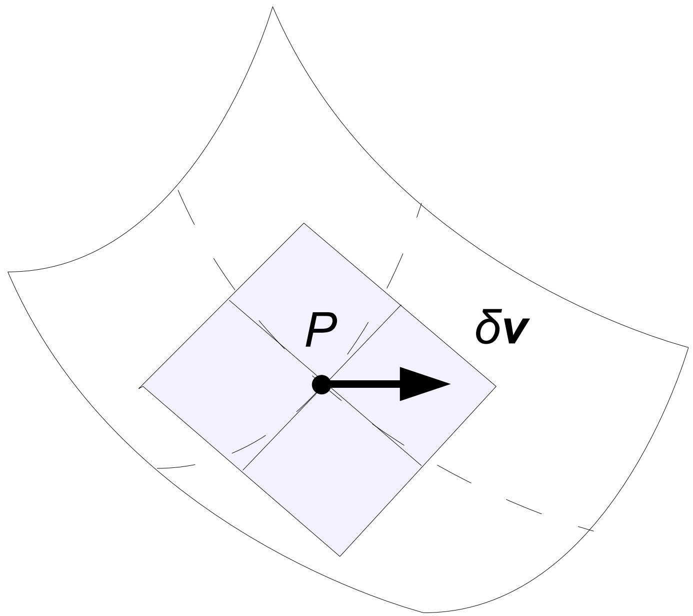
ist für jeden Winkel *φ* erfüllt.

1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Definition:
  - Virtuelle Geschwindigkeiten $\delta \boldsymbol{v}$ sind beliebige gedachte Geschwindigkeiten des Systems, die mit den Zwangsbedingungen vereinbar sind.
  - Virtuelle Geschwindigkeiten können daher als tatsächliche Geschwindigkeiten auftreten, wenn entsprechende äußere Kräfte auf das System einwirken.

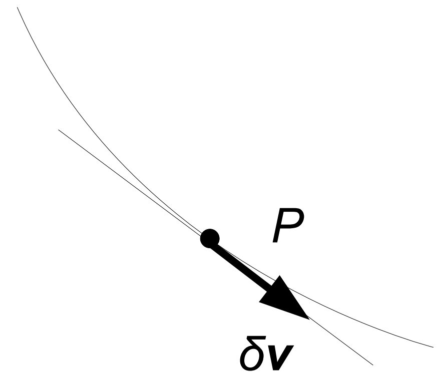
1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Beispiel: Massenpunkt auf Fläche
  - Der Vektor der virtuellen Geschwindigkeit liegt in der Ebene, die im Punkt *P* tangential zur Fläche ist, auf der sich der Punkt bewegen kann.



1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Beispiel: Massenpunkt auf Kurve
  - Der Vektor der virtuellen Geschwindigkeit ist tangential zu der Kurve, auf der sich der Massenpunkt bewegen kann.



1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Zwangsbedingungen für die Geschwindigkeiten:
  - Ableiten der Zwangsbedingungen nach der Zeit führt auf die Zwangsbedingungen für die Geschwindigkeiten:

$$\frac{d}{dt} F_i\left(x_1(t), y_1(t), z_1(t), \ldots, x_n(t), y_n(t), z_n(t)\right)$$

$$= \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\dot{y}_1 + \frac{\partial F_i}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial z_n}\dot{z}_n = 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

  - Für die virtuellen Geschwindigkeiten folgen daraus die Bedingungen

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\delta\dot{x}_1 + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\delta\dot{y}_1 + \frac{\partial F_i}{\partial z_1}\delta\dot{z}_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial z_n}\delta\dot{z}_n = 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Zusammenhang mit den verallgemeinerten Koordinaten:
  - Ableiten der Beziehungen für die Koordinaten nach der Zeit ergibt

$$\dot{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial q_f} \dot{q}_f , \quad k = 1, \ldots, n$$

  - Für die virtuellen Geschwindigkeiten folgt daraus:

$$\delta \dot{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \delta \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial q_f} \delta \dot{q}_f , \quad k = 1, \ldots, n$$

  - Entsprechende Gleichungen gelten auch für die Koordinaten y_k und z_k.

1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

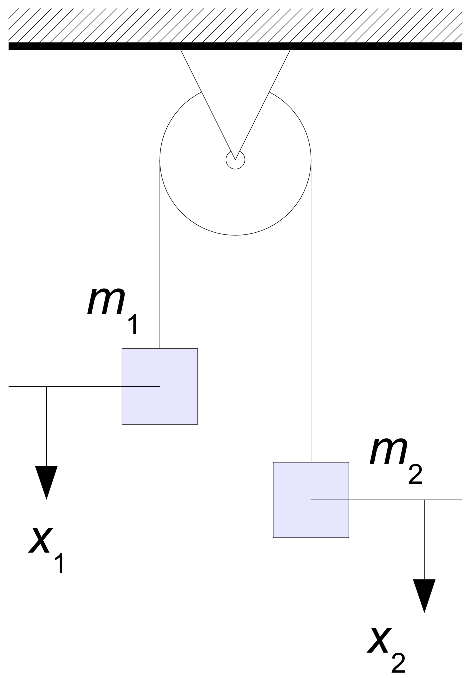
- Beispiel: Verbundene Massen
  - Zwangsbedingung:

    $$F\left(x_1, x_2\right) = x_1 + x_2 = 0$$

  - Virtuelle Geschwindigkeiten:

    $$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 1$$

    $$\rightarrow \quad \delta \dot{x}_1 + \delta \dot{x}_2 = 0$$



1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

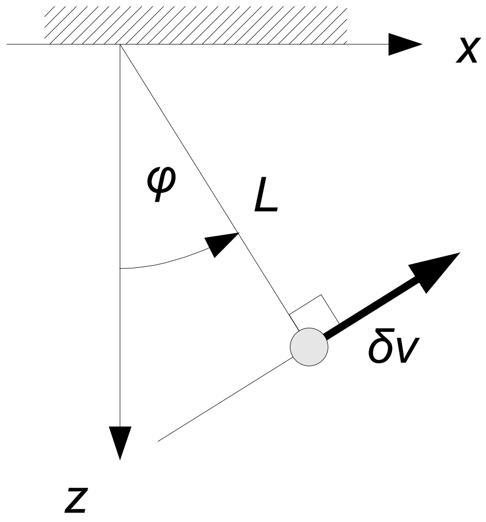
- Beispiel: Pendel
  - Zwangsbedingung:

$$F(x, z) = x^2 + z^2 - L^2 = 0$$

  - Virtuelle Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$\rightarrow \quad x\,\delta\dot{x} + z\,\delta\dot{z} = 0$$



1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Wird der Winkel φ als verallgemeinerter Freiheitsgrad gewählt, so gilt:

$$x = L\sin(\phi),\quad z = L\cos(\phi)$$

- Für die Geschwindigkeiten folgt:

$$\dot{x} = L\cos(\phi)\dot{\phi},\quad \dot{z} = -L\sin(\phi)\dot{\phi}$$

- Für die virtuellen Geschwindigkeiten gilt:

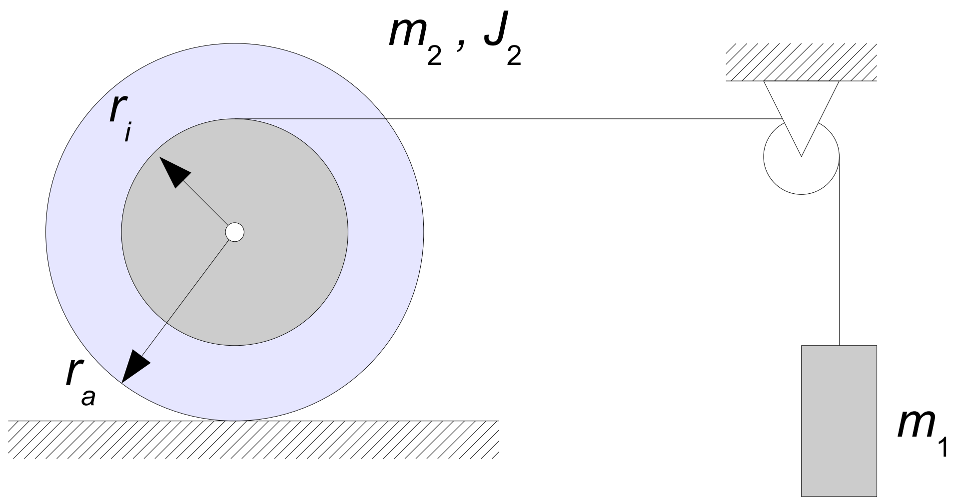
$$\delta\dot{x} = L\cos(\phi)\delta\dot{\phi},\quad \delta\dot{z} = -L\sin(\phi)\delta\dot{\phi}$$

- Sie erfüllen die Bedingung

$$x\,\delta\dot{x} + z\,\delta\dot{z} = L^2\left(\sin(\phi)\cos(\phi) - \cos(\phi)\sin(\phi)\right)\delta\dot{\phi} = 0$$

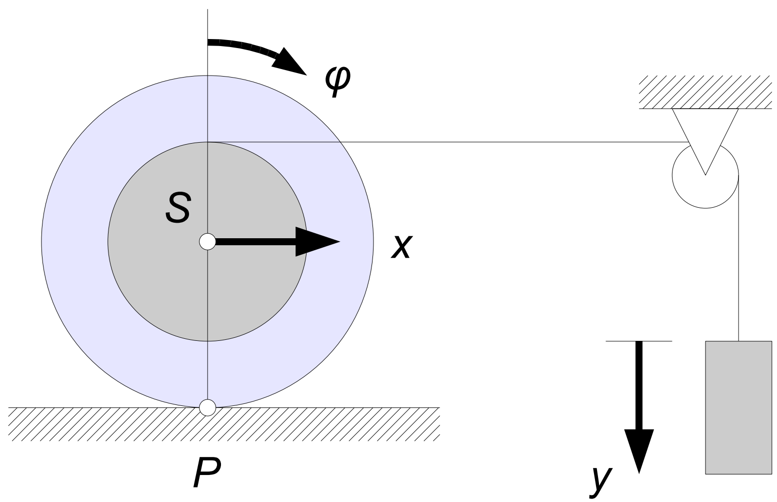
1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Beispiel:
  - Ein Klotz hängt an einem Seil, das über eine masselose Rolle geführt und auf einer Trommel aufgewickelt ist.



1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Physikalische Koordinaten:
  - Der Ort der Trommel wird durch die Koordinate *x* des Schwerpunktes beschrieben.
  - Die Lage der Trommel wird durch den Winkel *φ* beschrieben.
  - Der Ort des Klotzes wird durch die Koordinate *y* beschrieben.



1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Zwangsbedingungen:
  - Die Trommel dreht sich um den Fußpunkt *P*.
  - Für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes *S* gilt:

$$\dot{x} = r_a \dot{\phi} \;\rightarrow\; F_1(x, y, \phi) = x - r_a \phi = 0$$

  - Der Weg, den der Klotz zurückgelegt hat, ist die Summe des Weges, den der Schwerpunkt der Trommel zurückgelegt hat, und der Länge des während dieses Weges abgewickelten Seils:

$$y = x + r_i \phi \;\rightarrow\; F_2(x, y, \phi) = y - (r_a + r_i)\phi = 0$$

1.3 Virtuelle Geschwindigkeiten

- Für die virtuellen Geschwindigkeiten folgt daraus:

$$\delta\dot{x} - r_a\,\delta\dot{\phi} = 0$$
$$\delta\dot{y} - (r_a + r_i)\,\delta\dot{\phi} = 0$$

- Verallgemeinerte Koordinaten:
  - Das System hat 1 Freiheitsgrad.
  - Wird der Winkel φ als verallgemeinerte Koordinate gewählt, so gelten die folgenden Beziehungen zwischen physikalischen und verallgemeinerten Koordinaten:

$$x = r_a\,\phi \qquad \delta\dot{x} = r_a\,\delta\dot{\phi}$$
$$y = (r_a + r_i)\,\phi \qquad \delta\dot{y} = (r_a + r_i)\,\delta\dot{\phi}$$

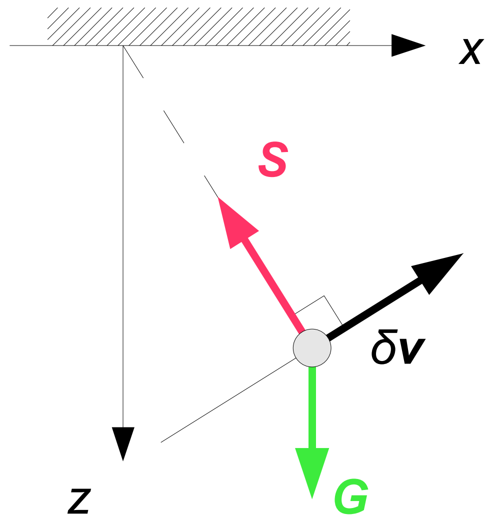
1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Impulssatz für den Massenpunkt:
  - Die am Massenpunkt angreifenden Kräfte können in eingeprägte Kräfte $\boldsymbol{F}^{(e)}$ und in Zwangskräfte $\boldsymbol{F}^{(z)}$ eingeteilt werden.
  - Der Impulssatz für den Massenpunkt lautet dann

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}^{(e)} + \boldsymbol{F}^{(z)}$$

1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Beispiel: Pendel
  - Eingeprägte Kraft: Gewichtskraft ***G***
  - Zwangskraft: Seilkraft ***S***
  - Die Seilkraft steht senkrecht auf der virtuellen Geschwindigkeit.



1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Prinzip von d'Alembert:
  - Wenn ein Massenpunkt sich auf einer Kurve bewegen muss, so steht die Zwangskraft senkrecht auf der Tangente an die Kurve.
  - Wenn ein Massenpunkt sich auf einer Fläche bewegen muss, so steht die Zwangskraft senkrecht auf der Tangentialebene an die Fläche.
  - Daraus folgt in beiden Fällen, das die Zwangskraft senkrecht zu den virtuellen Geschwindigkeiten ist.

1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Daraus lässt sich das Prinzip von d'Alembert folgern:

$$\boxed{\boldsymbol{F}^{(z)} \cdot \delta \boldsymbol{v} = 0}$$

> Ein Massenpunkt bewegt sich so, dass die virtuelle Leistung der Zwangskräfte zu jedem Zeitpunkt verschwindet.

1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Prinzip der virtuellen Leistung:
  - Aus dem Impulssatz für den Massenpunkt folgt:

$$m\,\boldsymbol{a}\cdot\delta\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}^{(e)}\cdot\delta\,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}^{(z)}\cdot\delta\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}^{(e)}\cdot\delta\,\boldsymbol{v}$$

  - Virtuelle Leistung der eingeprägten Kräfte:

$$\delta\,P=\boldsymbol{F}^{(e)}\cdot\delta\,\boldsymbol{v}$$

  - Virtuelle Leistung der d'Alembertschen Trägheitskraft:

$$\delta\,P_T=\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{T}}\cdot\delta\,\boldsymbol{v}=-m\,\boldsymbol{a}\cdot\delta\,\boldsymbol{v}$$

1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Prinzip der virtuellen Leistung für einen Massenpunkt:

$$\boxed{\delta P + \delta P_T = 0}$$

> Ein Massenpunkt bewegt sich so, dass bei jeder virtuellen Geschwindigkeit die Summe der virtuellen Leistungen der eingeprägten Kräfte und der d'Alembertschen Trägheitskräfte zu jedem Zeitpunkt verschwindet.

- Das Prinzip der virtuellen Leistung wird auch als Prinzip von Jourdain bezeichnet.

1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Massenpunktsysteme:
  - Bei einem System von *n* Massenpunkten muss der Impulssatz für jeden Massenpunkt gelten:

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(z)}, \quad i = 1, \ldots, n$$

  - Für jeden einzelnen Massenpunkt ist die virtuelle Leistung der Zwangskräfte zu jedem Zeitpunkt null:

$$\boldsymbol{F}_i^{(z)} \cdot \delta \boldsymbol{v}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Damit folgt: $\sum_i \left(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}^{(e)} - m_i \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}} = 0$
- Mit $\delta P = \sum_i \delta P_i = \sum_i \boldsymbol{F}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$

  und $\delta P_T = \sum_i \delta P_{T\,i} = -\sum_i m_i \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}} \cdot \delta \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$

  folgt das Prinzip der virtuellen Leistung für Massenpunkt-systeme:

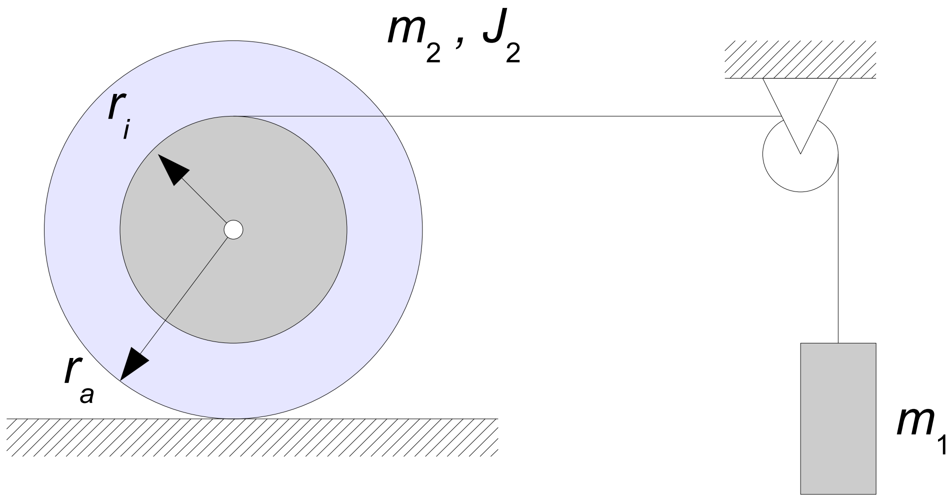
$$\boxed{\delta P + \delta P_T = 0}$$

1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Die Anzahl der unabhängigen virtuellen Geschwindigkeiten entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems.
- Damit liefert das Prinzip der virtuellen Leistung genau so viele Gleichungen, wie das System Freiheitsgrade hat.
- Das Prinzip der virtuellen Leistung gilt sinngemäß auch für Systeme aus starren Körpern.
- Der große Vorteil des Prinzips der virtuellen Leistung ist, dass es die Zwangskräfte nicht enthält.

1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Beispiel: Seiltrommel
  - Für das dargestellte System, bestehend aus einer Seiltrommel und einem Klotz, ist die Bewegungsgleichung aufzustellen.

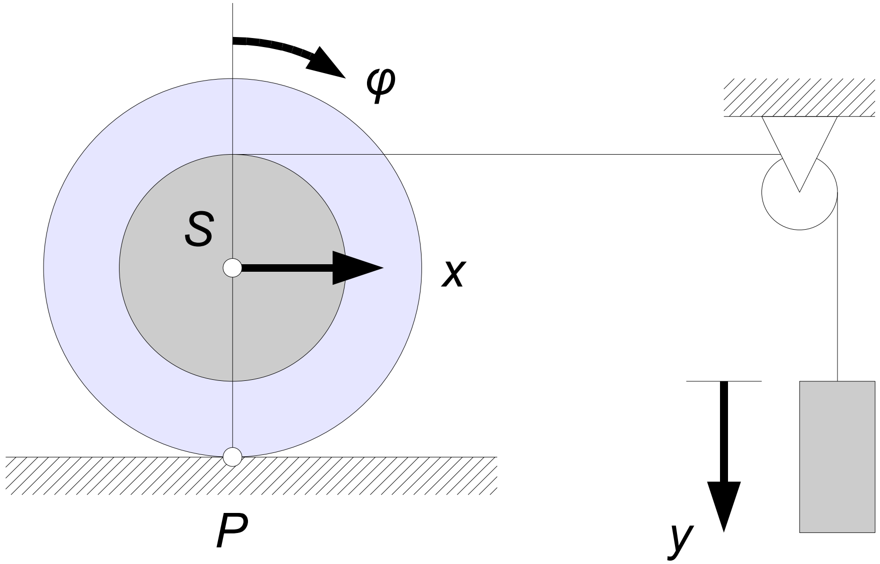


1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Die Zwangsbedingungen wurden bereits untersucht.
- Als verallgemeinerte Koordinate wird der Winkel φ gewählt, der die Lage der Trommel beschreibt.
- Dann gilt:

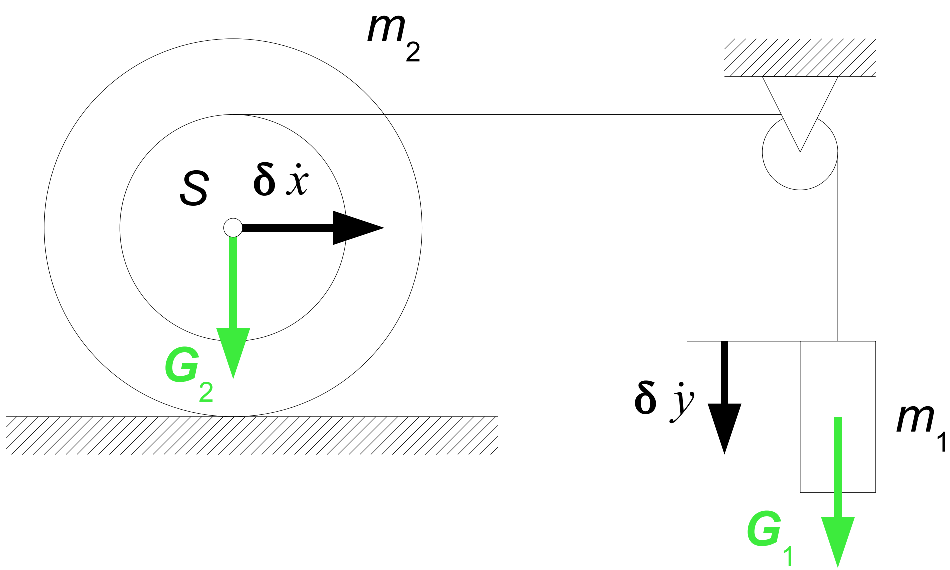
$$
\begin{aligned}
x &= r_a \phi \\
y &= (r_a + r_i) \phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta \dot{x} &= r_a \delta \dot{\phi} \\
\delta \dot{y} &= (r_a + r_i) \delta \dot{\phi}
\end{aligned}
$$



1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Virtuelle Leistung der eingeprägten Kräfte:



$$\delta P = G_1 \delta \dot{y} = m_1 g \left(r_a + r_i \right) \delta \dot{\phi}$$

1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

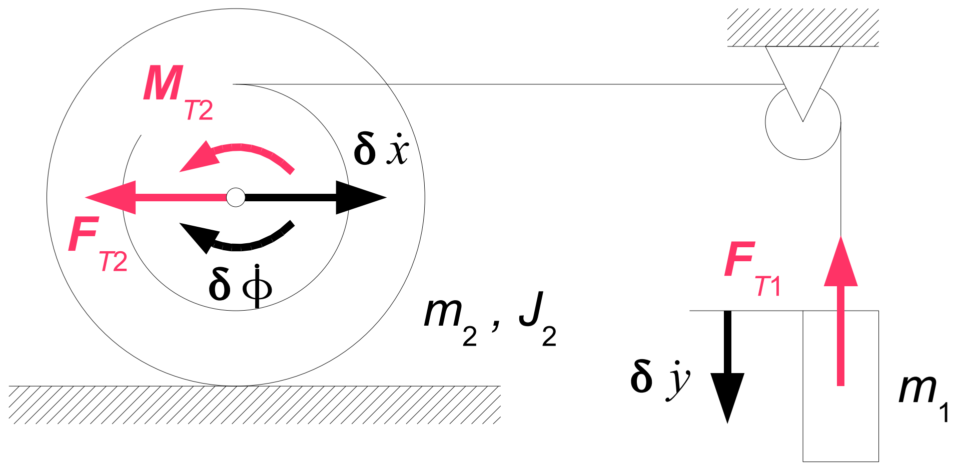
- Virtuelle Leistung der Trägheitskräfte:

$$\delta P_T = -F_{T1}\,\delta\dot{y} - F_{T2}\,\delta\dot{x} - M_{T2}\,\delta\dot{\phi}$$

$$F_{T1} = m_1\,\ddot{y} = m_1\left(r_a + r_i\right)\ddot{\phi}$$

$$F_{T2} = m_2\,\ddot{x} = m_2\,r_a\,\ddot{\phi}$$

$$M_{T2} = J_2\,\ddot{\phi}$$



1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

- Prinzip der virtuellen Leistung: $\delta P + \delta P_T = 0$

$$m_1 g \left(r_a + r_i\right) \delta \dot{\phi} - m_1 \left(r_a + r_i\right) \ddot{\phi} \left(r_a + r_i\right) \delta \dot{\phi}$$
$$- m_2 r_a \ddot{\phi} r_a \delta \dot{\phi} - J_2 \ddot{\phi} \delta \dot{\phi} = 0$$

- Da die virtuelle Geschwindigkeit $\delta \dot{\phi}$ beliebig ist, muss gelten:

$$m_1 g \left(r_a + r_1\right) - \left[m_1 \left(r_a + r_i\right)^2 + m_2 r_a^2 + J_2 \right] \ddot{\phi} = 0$$

- Daraus folgt für die Winkelbeschleunigung:

$$\ddot{\phi} = \frac{m_1 \left(r_a + r_1\right)}{m_1 \left(r_a + r_i\right)^2 + m_2 r_a^2 + J_2} g$$