2. Lagrange-Gleichungen

- Mit dem Prinzip der virtuellen Leistung lassen sich die Bewegungsgleichungen für komplexe Systeme einfach aufstellen.
- Aus dem Prinzip der virtuellen Leistung lassen sich die Lagrange-Gleichungen herleiten, mit denen sich das Aufstellen der Bewegungsgleichungen weiter vereinfacht.
- Besonders einfach werden die Lagrange-Gleichungen für Systeme, bei denen alle eingeprägten Kräfte konservativ sind.

2. Lagrange-Gleichungen

2.1 Allgemeine Systeme

- Verallgemeinerte Koordinaten:
  - Bei einem System von *n* Massenpunkten wird die Lage der Massenpunkte durch *n* Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ beschrieben.
  - Wenn das System *f* Freiheitsgrade hat, dann sind die *n* Ortsvektoren Funktionen von *f* unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten q_j: $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \dots, q_f), \quad i = 1, \dots, n$
  - Für die virtuellen Geschwindigkeiten gelten die Beziehungen

$$\delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} \delta \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_f} \delta \dot{q}_f = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, n$$

2.1 Allgemeine Systeme

- Virtuelle Leistung der eingeprägten Kräfte:
  - Für die virtuelle Leistung der eingeprägten Kräfte gilt:

$$\delta P = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j = \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j$$

  - Die Reihenfolge der Summation darf vertauscht werden:

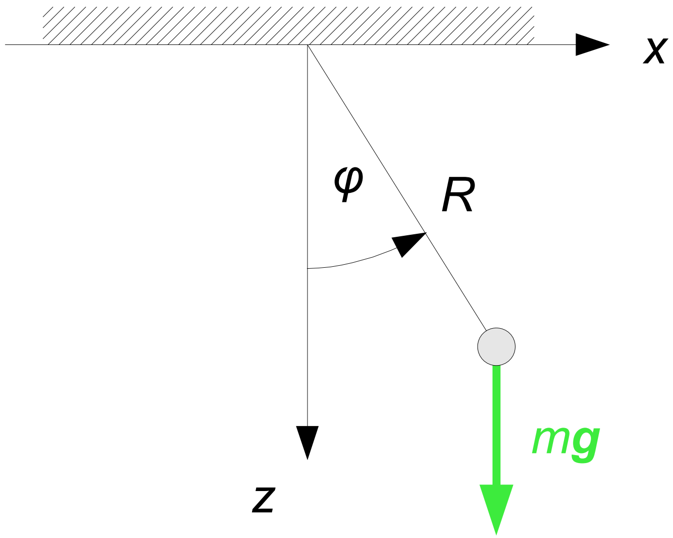
$$\delta P = \sum_j \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j$$

  - Mit den verallgemeinerten Kräften $Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$

folgt: $\delta P = \sum_j Q_j \delta \dot{q}_j$

2.1 Allgemeine Systeme

- Beispiel: Pendel



$$\boldsymbol{r}(\phi)=R\left(\sin(\phi)\boldsymbol{e}_x+\cos(\phi)\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}=R\left(\cos(\phi)\boldsymbol{e}_x-\sin(\phi)\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$\boldsymbol{F}^{(e)}=mg\,\boldsymbol{e}_z$$

$$Q_\phi=\boldsymbol{F}^{(e)}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}=mg\,\boldsymbol{e}_z\cdot R\left(\cos(\phi)\boldsymbol{e}_x-\sin(\phi)\boldsymbol{e}_z\right)=-mg\,R\sin(\phi)$$

$$\delta P=Q_\phi\,\delta\dot{\phi}=-mg\,R\sin(\phi)\,\delta\dot{\phi}$$

- Virtuelle Leistung der Trägheitskräfte:
  - Für die virtuelle Leistung der Trägheitskräfte gilt:

$$\delta P_T = -\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = -\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j$$

$$= -\sum_i \sum_j m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j = -\sum_j \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j$$

  - Wegen $\dfrac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) = \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$

    gilt: $m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = m_i \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$

2.1 Allgemeine Systeme

- Aus $\quad \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \ldots, q_f), \quad i = 1, \ldots, n$

  folgt: $\quad \dot{\boldsymbol{r}}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_f}\dot{q}_f = \sum_j \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$

- Ableiten nach $\dot{q}_j$ führt auf $\quad \dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$

- Damit gilt:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

2.1 Allgemeine Systeme

- Wegen
$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) = m_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = 2 m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$
$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) = m_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = 2 m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

gilt:
$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right)$$

- Die kinetische Energie eines Massenpunktes ist
$$T_i = \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 = \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2$$

2.1 Allgemeine Systeme

- Damit gilt für die virtuelle Leistung der Trägheitskräfte:

$$\delta P_T = -\sum_j \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j = -\sum_j \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \right) \delta \dot{q}_j$$

- Mit der kinetischen Energie $T = \sum_i T_i$ des Gesamtsystems folgt:

$$\delta P_T = -\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta \dot{q}_j$$

2.1 Allgemeine Systeme

- Prinzip der virtuellen Leistung:
  - Aus dem Prinzip der virtuellen Leistung folgt damit:

$$\delta P + \delta P_T = 0 \quad : \quad \sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta \dot{q}_j = 0$$

  - Da die virtuellen Geschwindigkeiten unabhängig voneinander sind und das Prinzip der virtuellen Leistung für beliebige virtuelle Geschwindigkeiten gilt, muss jeder Summand für sich verschwinden.

2.1 Allgemeine Systeme

- Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j, \quad j=1,\ldots,f}$$

2.1 Allgemeine Systeme

- Beispiel: Pendel
  - Kinetische Energie: $T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{z}^2\right)$
  - Mit der verallgemeinerten Koordinate *φ* gilt:

$$\dot{x}=R\,\dot{\phi}\cos(\phi),\quad \dot{z}=-R\,\dot{\phi}\sin(\phi)\ \rightarrow\ T=\frac{1}{2}m\,R^2\,\dot{\phi}^2$$

  - Ableitungen der kinetischen Energie:

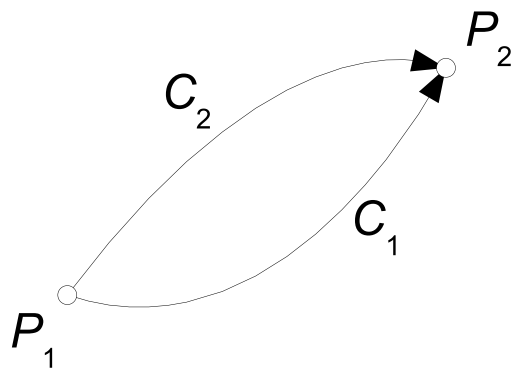
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}=m\,R^2\,\dot{\phi},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}=m\,R^2\,\ddot{\phi},\quad \frac{\partial T}{\partial\phi}=0$$

  - Bewegungsgleichung: $m\,R^2\,\ddot{\phi}=Q_\phi=-mg\,R\sin(\phi)$

2.2 Konservative Systeme

- Konservative Systeme:
  - Eine Kraft heißt konservativ, wenn die Arbeit, die sie an einem Massenpunkt verrichtet, nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bahn abhängt, die der Massenpunkt beschreibt, aber unabhängig von der Bahnkurve ist.

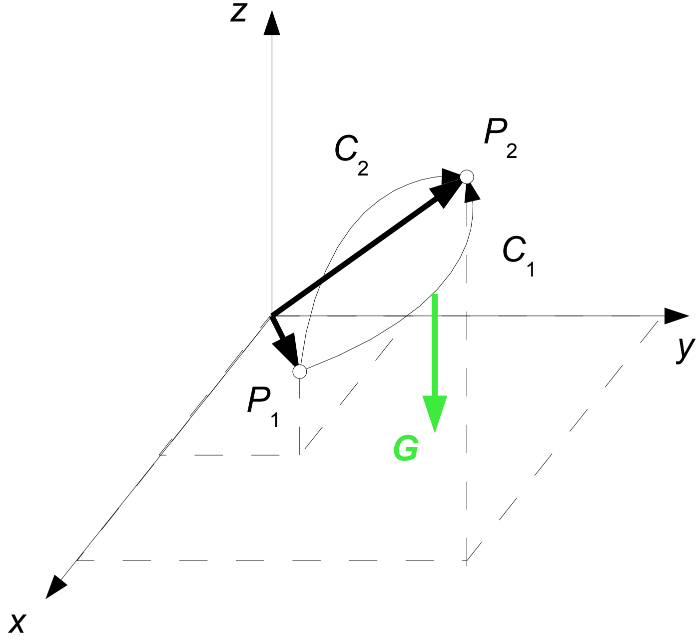
$$W_{12} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$



  - Ein System heißt konservativ, wenn alle eingeprägten Kräfte konservativ sind.

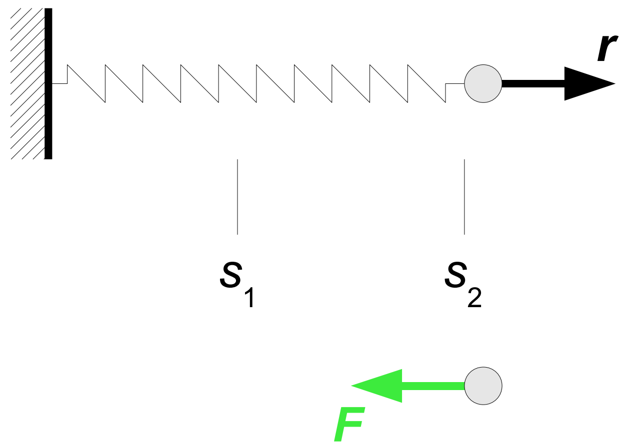
2.2 Konservative Systeme

- Die Gewichtskraft ist eine konservative Kraft:



$$W^G = -mg\left(z_2 - z_1\right)$$

- Die Kraft einer linear elastischen Feder ist eine konservative Kraft:

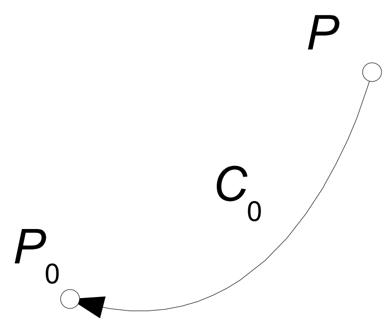


$$W^F = -\frac{1}{2}c\left(s_2^2 - s_1^2\right)$$

2.2 Konservative Systeme

- Potenzial:
  - Der Wert des Potenzials einer konservativen Kraft an einem Ort *P* ist gleich dem Wert der Arbeit, den die Kraft an einem Massenpunkt verrichtet, wenn er vom Ort *P* an einen festen Bezugspunkt P_0 verschoben wird:

$$V(P) = W_0 = \int_{P}^{P_0} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r} = -\int_{P_0}^{P} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r}$$



2.2 Konservative Systeme

- Potenzial der Gewichtskraft:
  - Wird der Bezugspunkt bei $z = 0$ gewählt, dann gilt für das Potenzial der Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche:

$$V^G(x, y, z) = mg\, z$$

- Potenzial der Federkraft:
  - Wird als Bezugspunkt der unverformte Zustand gewählt, dann gilt für das Potenzial der Federkraft:

$$V^F(s) = \frac{1}{2} c\, s^2$$

2.2 Konservative Systeme

- Zusammenhang zwischen Kraft und Potenzial:
  - Sei *P′* ein Punkt, der sehr nahe bei Punkt *P* liegt.
  - Dann gilt für das Potenzial im Punkt *P′*:

$$V(P')=V(P)+\Delta V=V(P)+\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\Delta z$$

  - Dabei sind *Δx*, *Δy* und *Δz* die kleinen Differenzen zwischen den Koordinaten von Punkt *P′* und von Punkt *P*.
  - Aus der Definition des Potenzials folgt:

$$V(P')=-\int_{P_0}^{P'}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{P_0}^{P}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}-\int_{P}^{P'}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

2.2 Konservative Systeme

- Das erste Integral auf der rechten Seite ist gleich *V*(*P*).
- Da *P'* nahe bei *P* liegt, gilt für das zweite Integral:

$$\int_P^{P'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

- Damit ist gezeigt:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{F} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$$

- Die Kraft ist gleich dem negativen Gradienten des Potenzials.

2.2 Konservative Systeme

- Schwerkraft: $V^G(x, y, z) = mg\,z \;\rightarrow\; G_z = -\dfrac{\partial V^G}{\partial z} = -mg$

- Federkraft: $V^F(s) = \dfrac{1}{2} c\, s^2 \;\rightarrow\; F_s = -\dfrac{\partial V^F}{\partial s} = -c\, s$

- Systeme von Massenpunkten:
  - Bei einem System von Massenpunkten hängt die potenzielle Energie von den Koordinaten aller Massenpunkte ab:

$$V = V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n)$$

  - Wird nur ein Massenpunkt um $\Delta\boldsymbol{r}_i$ verschoben, dann verrichten nur die an diesem Massenpunkt angreifenden Kräfte Arbeit.

2.2 Konservative Systeme

- Für die Änderung des Potenzials gilt:

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = -\boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i$$

- Für die Kraft auf einen Massenpunkt gilt also: $\boldsymbol{F}_i^{(e)} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}$

- Damit berechnen sich die verallgemeinerten Kräfte zu

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

- Dabei ist $V(q_1, \ldots, q_f) = V\left(\boldsymbol{r}_1(q_1, \ldots, q_f), \ldots, \boldsymbol{r}_n(q_1, \ldots, q_f)\right)$

2.2 Konservative Systeme

- Lagrange-Gleichungen 2. Art für konservative Systeme:
  - Wenn alle eingeprägten Kräfte konservative Kräfte sind, lauten die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(T-V\right)=0$$

  - Die Funktion $\boxed{L=T-V}$

    wird als Lagrange-Funktion bezeichnet.

2.2 Konservative Systeme

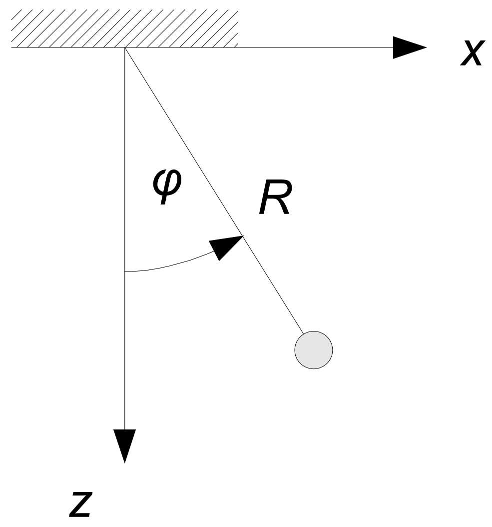
- Da die potenzielle Energie nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, erfüllt die Lagrange-Funktion die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,\quad j=1,\ldots,f$$

- Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen muss nur die kinetische und die potenzielle Energie berechnet werden.
- Die Bewegungsgleichungen folgen durch Differenzieren nach den verallgemeinerten Koordinaten.

2.2 Konservative Systeme

- Beispiel: Pendel



$$x = R\sin(\phi), \quad z = R\cos(\phi)$$

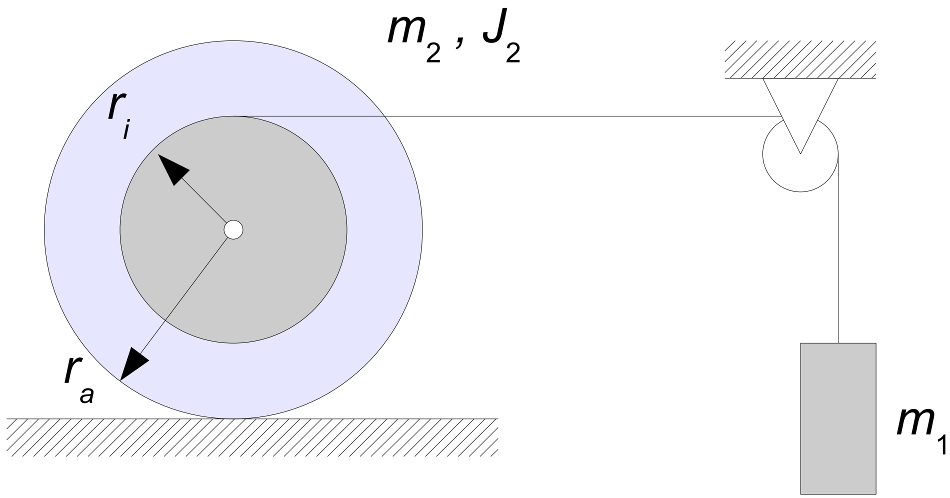
$$V = -mg\,z = -mg\,R\cos(\phi)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\,R^2\,\dot{\phi}^2 + mg\,R\cos(\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\,R^2\,\dot{\phi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = m\,R^2\,\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mg\,R\sin(\phi) \qquad \rightarrow \quad m\,R^2\,\ddot{\phi} + m\,g\,R\sin(\phi) = 0$$

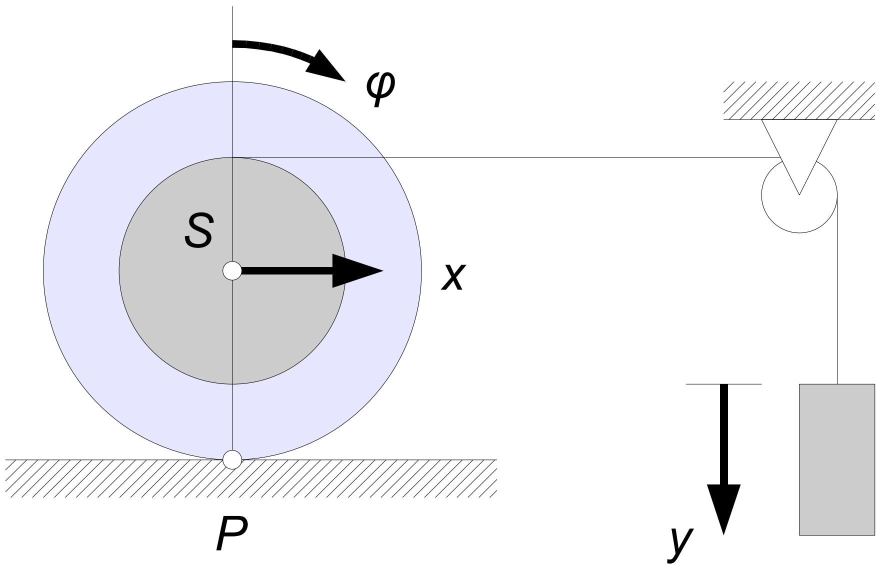
- Beispiel: Seiltrommel
  - Für das dargestellte System, bestehend aus einer Seil-trommel und einem Klotz, ist die Bewegungsgleichung auf-zustellen.



2.2 Konservative Systeme

- Als verallgemeinerte Koordinate wird der Winkel φ gewählt, der die Lage der Trommel beschreibt: $q = \varphi$
- Dann gilt:

$$\begin{aligned} x(q) &= r_a q \\ y(q) &= (r_a + r_i) q \\ \phi(q) &= q \end{aligned}$$



2.2 Konservative Systeme

- Kinetische Energie:

$$T(\dot{x},\dot{y},\dot{\phi})=\frac{1}{2}m_1\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\phi}^2$$

$$T(\dot{q})=\frac{1}{2}m_1\left(r_a+r_i\right)^2\dot{q}^2+\frac{1}{2}m_2r_a^2\dot{q}^2+\frac{1}{2}J_2\dot{q}^2$$

- Potenzielle Energie: $V(x,y,\phi)=-m_1 g\,y$

$$V(q)=-m_1 g\left(r_a+r_i\right)q$$

- Lagrange-Funktion: $L=T-V$

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\left[m_1\left(r_a+r_i\right)^2+m_2r_a^2+J_2\right]\dot{q}^2+m_1 g\left(r_a+r_i\right)q$$

2.2 Konservative Systeme

- Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \left[m_1 \left(r_a + r_i \right)^2 + m_2 r_a^2 + J_2 \right] \dot{q} \, , \quad \frac{\partial L}{\partial q} = m_1 g \left(r_a + r_i \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \left[m_1 \left(r_a + r_i \right)^2 + m_2 r_a^2 + J_2 \right] \ddot{q}$$

- Lagrange-Gleichungen: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$$\left[m_1 \left(r_a + r_i \right)^2 + m_2 r_a^2 + J_2 \right] \ddot{q} - m_1 g \left(r_a + r_i \right) = 0$$

$$\rightarrow \quad \ddot{q} = \frac{m_1 \left(r_a + r_i \right)}{m_1 \left(r_a + r_i \right)^2 + m_2 r_a^2 + J_2} g$$

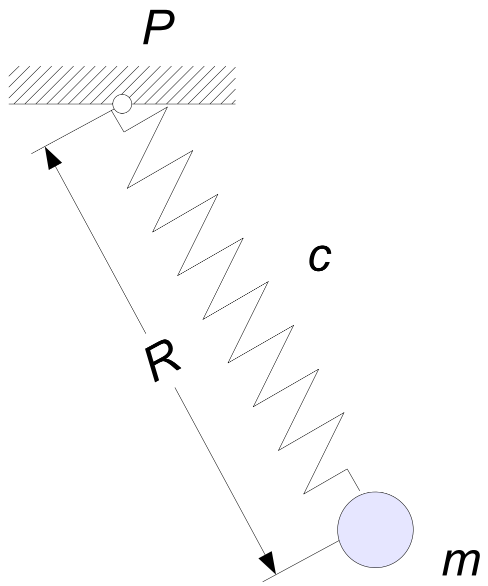
2.2 Konservative Systeme

- Systeme mit konservativen und dissipativen Kräfte:
  - Wirken auf ein System konservative und dissipative Kräfte, dann können die konservativen Kräfte in der Lagrange-Funktion berücksichtigt werden.
  - Die Lagrange-Gleichungen enthalten zusätzlich die verallgemeinerten dissipativen Kräfte:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j^{(d)}, \quad j=1,\ldots,f}$$

2.3 Beispiel: Federpendel

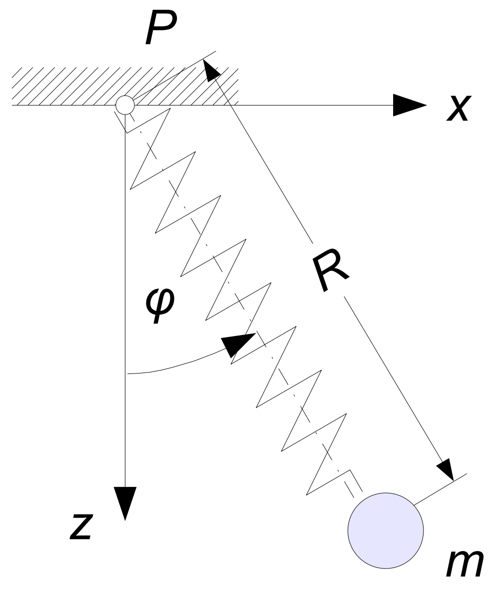
- Aufgabenstellung:
  - Der abgebildete Schwinger besteht aus einem Massenpunkt der Masse *m* und einer Feder mit der Federkonstanten *c*.
  - Die augenblickliche Länge der Feder ist *R*.
  - Die Länge der Feder im entspannten Zustand ist R_0.
  - Gesucht sind die Bewegungsgleichungen, wenn vorausgesetzt wird, dass der Schwinger sich nur in der Ebene bewegt.



2.3 Beispiel: Federpendel

- Verallgemeinerte Koordinaten:
  - Die Lage des Massenpunktes liegt eindeutig fest, wenn die aktuelle Länge *R* der Feder und der Winkel *φ* gegeben sind.
  - Als verallgemeinerte Koordinaten werden gewählt:

$$q_1 = \frac{R}{R_0}, \quad q_2 = \phi$$



2.3 Beispiel: Federpendel

- Zwischen den verallgemeinerten und den kartesischen Koordinaten besteht der Zusammenhang

$$x = R\sin(\phi) = R_0 q_1 \sin(q_2), \quad z = R\cos(\phi) = R_0 q_1 \cos(q_2)$$

- Daraus folgt für die Geschwindigkeit:

$$v_x = \dot{x} = R_0\left(\dot{q}_1 \sin(q_2) + q_1 \dot{q}_2 \cos(q_2)\right)$$

$$v_z = \dot{z} = R_0\left(\dot{q}_1 \cos(q_2) - q_1 \dot{q}_2 \sin(q_2)\right)$$

2.3 Beispiel: Federpendel

- Kinetische Energie:
  - Für die kinetische Energie des Massenpunkts gilt:

$$T(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_z^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m R_0^2 \left[\left(\dot{q}_1 \sin(q_2) + q_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) \right)^2 + \left(\dot{q}_1 \cos(q_2) - q_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m R_0^2 \left(\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 \right)$$

2.3 Beispiel: Federpendel

- Potenzielle Energie:
  - Die potenzielle Energie setzt sich zusammen aus der potenziellen Energie der Federkraft und der potenziellen Energie der Gewichtskraft.
  - Als Bezugspunkt für die potenzielle Energie der Federkraft wird die entspannte Feder gewählt.
  - Dann gilt für die potenzielle Energie der Federkraft:

$$V^F(q_1, q_2) = \frac{1}{2} c \left(R - R_0 \right)^2 = \frac{1}{2} c R_0^2 \left(q_1 - 1 \right)^2$$

2.3 Beispiel: Federpendel

- Als Bezugspunkt für die potenzielle Energie der Gewichtskraft wird Punkt *P* gewählt.
- Dann gilt für die potenzielle Energie der Gewichtskraft:

$$V^G(q_1, q_2) = -mg\,z = -mg\,R_0 q_1 \cos(q_2)$$

- Lagrange-Funktion:
  - Mit $L = T - V^F - V^G$ folgt:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} m R_0^2 \left(\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2} c R_0^2 (q_1 - 1)^2$$
$$+ mg\,R_0 q_1 \cos(q_2)$$

2.3 Beispiel: Federpendel

- Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m R_0^2 \dot{q}_1 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = m R_0^2 \ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m R_0^2 q_1^2 \dot{q}_2 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = m R_0^2 \left(2 q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1^2 \ddot{q}_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = m R_0^2 q_1 \dot{q}_2^2 - c R_0^2 \left(q_1 - 1\right) + mg R_0 \cos\left(q_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -mg R_0 q_1 \sin\left(q_2\right)$$

2.3 Beispiel: Federpendel

- Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0$$

$$\rightarrow \quad m R_0^2 \ddot{q}_1 - m R_0^2 q_1 \dot{q}_2^2 + c R_0^2 \left(q_1 - 1\right) - mg R_0 \cos\left(q_2\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0$$

$$\rightarrow \quad m R_0^2 \left(2 q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1^2 \ddot{q}_2\right) + mg R_0 q_1 \sin\left(q_2\right) = 0$$

2.3 Beispiel: Federpendel

- Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2^2 + \frac{c}{m}\left(q_1 - 1\right) - \frac{g}{R_0}\cos(q_2) = 0$$

$$q_1 \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{g}{R_0}\sin(q_2) = 0$$

$$R = R_0 q_1, \quad \phi = q_2$$

2.3 Beispiel: Federpendel

- Spezialfall: Geradlinige Bewegung
  - Für die Anfangsbedingungen $q_2(0)=0,\ \dot{q}_2(0)=0$ ist

$$q_2(t)=0$$

    eine Lösung der zweiten Bewegungsgleichung.
  - Die erste Bewegungsgleichung lautet dann

$$\ddot{q}_1+\frac{c}{m}\left(q_1-1\right)-\frac{g}{R_0}=0 \;\rightarrow\; \ddot{q}_1+\frac{c}{m}q_1=\frac{c}{m}+\frac{g}{R_0}$$

  - Die statische Lösung dieser Gleichung ist

$$q_{1s}=1+\frac{mg}{c\,R_0} \;\rightarrow\; R_s=R_0+\frac{mg}{c}$$

2.3 Beispiel: Federpendel

- R_S ist die Länge, die die Feder infolge der Gewichtskraft in der Ruhelage hat.
- Mit $q_1 = q_{1s} + x$ folgt: $$\ddot{x} + \frac{c}{m}\left(q_{1s} + x\right) = \frac{c}{m} + \frac{g}{R_0}$$
- Daraus folgt: $$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = 0$$
- Die Variable *x* misst die Auslenkung gegenüber der statischen Ruhelage.
- Sie erfüllt die Schwingungsgleichung eines Einmassenschwingers.

2.3 Beispiel: Federpendel

- Grenzfall: Sehr steife Feder
  - Für $c/m \to \infty$ folgt aus der ersten Gleichung: $q_1 \to 1$
  - Damit lautet die zweite Gleichung: $\ddot{q}_2 + \frac{g}{R_0} \sin(q_2) = 0$
  - Das ist die Schwingungsgleichung des mathematischen Pendels.