2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Zu einem Anfangswertproblem 2. Ordnung gehören folgende Daten:
  - Eine Differenzialgleichung 2. Ordnung: $\ddot{x}(t) = f\left[x(t), \dot{x}(t), t\right]$
  - Die Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$
  - Das zu untersuchende Zeitintervall: $t \in \left[0, \ t_E\right]$

2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Beispiel:
  - Für das mathematische Pendel lautet die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\sin(\phi)$$

  - Mit $x = \phi$ gilt: $f[x(t), \dot{x}(t), t] = f[\phi(t)] = -\frac{g}{L}\sin(\phi)$
  - Um den Winkel φ im Intervall $[0, t_E]$ berechnen zu können, muss der Winkel φ_0 und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben sein.

2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Rückführung auf ein Anfangswertproblem 1. Ordnung:
  - Mit den neuen Variablen $z_1(t)=x(t), \; z_2(t)=\dot{x}(t)$

    geht die Differenzialgleichung 2. Ordnung in ein System von 2 Differenzialgleichungen 1. Ordnung über:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= f\left[z_1, z_2, t\right]\end{aligned}$$

2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Beispiel: Mathematisches Pendel
  - Differenzialgleichung: $\ddot{\phi} = f(\phi, t) = -\frac{g}{L}\sin(\phi)$
  - Neue Variablen: $z_1 = \phi, \quad z_2 = \dot{\phi}$
  - Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{g}{L}\sin(z_1) \end{aligned}$$

  - Anfangsbedingungen: $z_1(0) = \phi_0$ und $\dot{z}_2(0) = \dot{\phi}_0 = 0$

2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Daten:
  - Pendellänge: $L = 1m$
  - Anfangswinkel: $\phi_0 = 30°$, $\phi_0 = 90°$ und $\phi_0 = 150°$
- Lösungsverfahren:
  - Das Gleichungssystem wird mit dem vierstufigen Runge-Kutta-Verfahren gelöst.

```
# Funktion

  global c = g / l;

  function dotx = f(x, t)
     global c;
     dotx(1) = x(2);
     dotx(2) = - c * sin(x(1));
  end
```

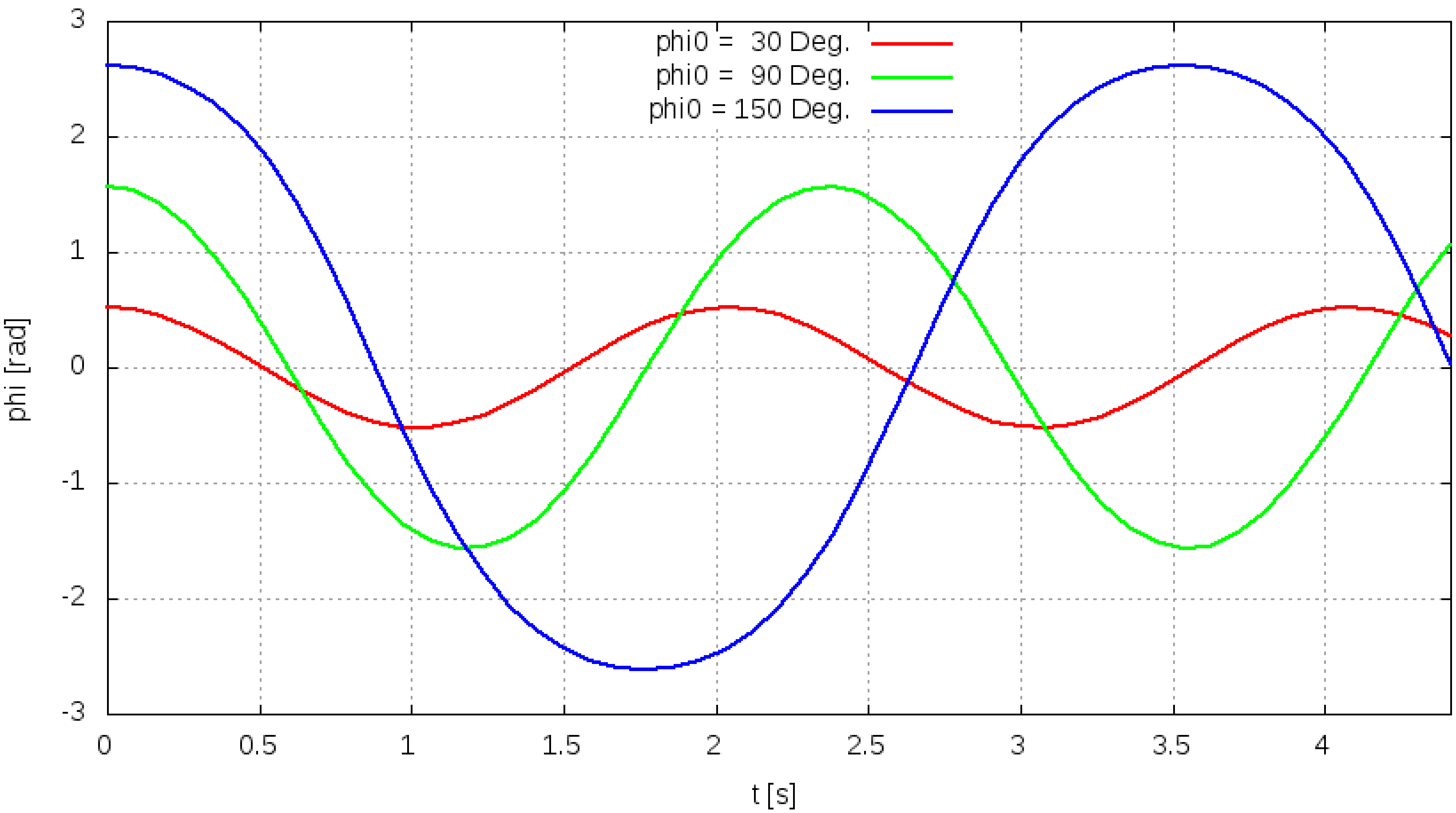
2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

```
# Startwerte

  phi0 = 150;
  z = zeros(n + 1, 2);
  z(1, 1) = phi0 * pi / 180;
  z(1, 2) = 0;

# Runge-Kutta-Verfahren

  for i = 1 : n
      k1 = f(z(i, :), t(i));
      k2 = f(z(i, :) + k1 * dt / 2, t(i) + dt / 2);
      k3 = f(z(i, :) + k2 * dt / 2, t(i) + dt / 2);
      k4 = f(z(i, :) + k3 * dt, t(i) + dt);
      k  = (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
      z(i + 1, :) = z(i, :) + k * dt;
  end
```

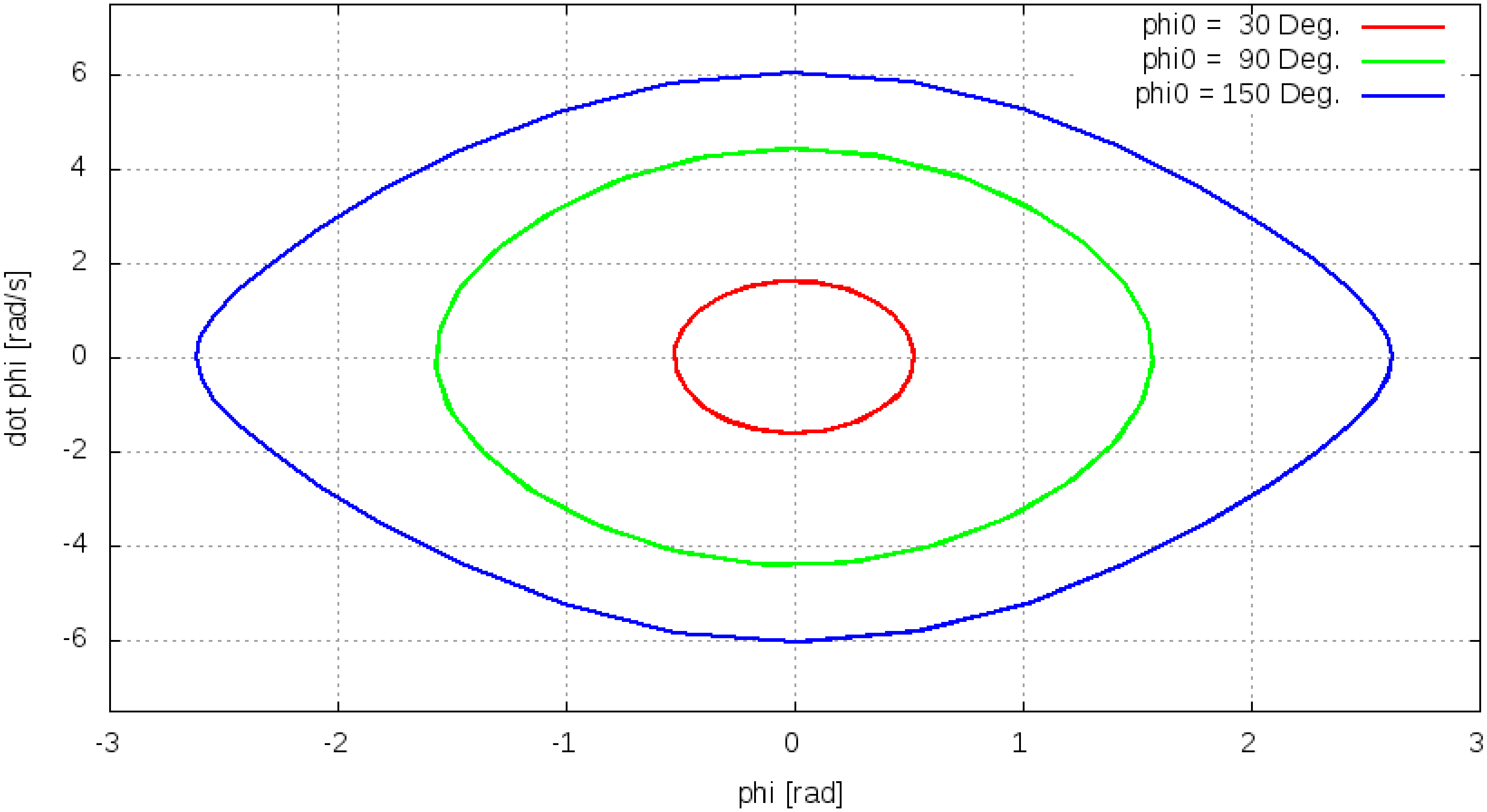
- Ergebnisse:
  - Die Diagramme auf den folgenden Seiten zeigen den Winkel als Funktion der Zeit sowie das Phasendiagramm.

2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Winkel $\phi(t)$:



- Phasendiagramm $\dot{\phi}(\phi)$:



2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Differenzialgleichungssysteme 2. Ordnung:
  - Ein Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung hat die Form

    $$[\ddot{\boldsymbol{x}}(t)] = \left[\boldsymbol{f}\left[[\boldsymbol{x}(t)], [\dot{\boldsymbol{x}}(t)], t\right]\right]$$

    mit den Anfangsbedingungen $[\boldsymbol{x}(0)] = [\boldsymbol{x}_0], \quad [\dot{\boldsymbol{x}}(0)] = [\dot{\boldsymbol{x}}_0]$

  - Für die neuen Variablen $[\boldsymbol{z}_1(t)] = [\boldsymbol{x}(t)], \quad [\boldsymbol{z}_2(t)] = [\dot{\boldsymbol{x}}(t)]$ gilt:

    $$\begin{aligned} [\dot{\boldsymbol{z}}_1] &= [\boldsymbol{z}_2] \\ [\dot{\boldsymbol{z}}_2] &= \left[\boldsymbol{f}\left[[\boldsymbol{z}_1], [\boldsymbol{z}_2], t\right]\right] \end{aligned}$$

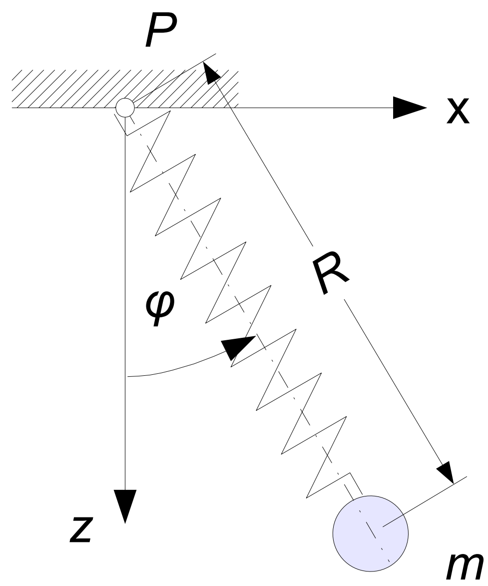
  - Das ist ein Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung der doppelten Dimension.

- Beispiel: Federpendel
  - Freiheitsgrade:

$$q_1 = \frac{R}{R_0}, \quad q_2 = \phi$$

  - Dabei ist R_0 die Länge der entspannten Feder.
  - Kartesische Koordinaten:

$$x = R \sin(\phi) = R_0 q_1 \sin(q_2)$$
$$z = R \cos(\phi) = R_0 q_1 \cos(q_2)$$



2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{q}_1 = q_1 \dot{q}_2^2 - \omega_F^2 (q_1 - 1) + \omega_P^2 \cos(q_2)$$
$$\ddot{q}_2 = -\frac{1}{q_1}\left(2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \omega_P^2 \sin(q_2)\right)$$

mit $\omega_F^2 = \frac{c}{m}, \quad \omega_P^2 = \frac{g}{R_0}$

- Die Transformation $z_1 = q_1, \quad z_2 = q_2, \quad z_3 = \dot{q}_1, \quad z_4 = \dot{q}_2$ führt auf das Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\dot{z}_1 = z_3$$
$$\dot{z}_2 = z_4$$
$$\dot{z}_3 = z_1 z_4^2 - \omega_F^2 (z_1 - 1) + \omega_P^2 \cos(z_2)$$
$$\dot{z}_4 = -\frac{1}{z_1}\left(2 z_3 z_4 + \omega_P^2 \sin(z_2)\right)$$

2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Daten: $\omega_F^2 = 24\,s^{-2}, \quad \omega_P^2 = 8\,s^{-2}$
- Statische Ruhelage:

$$\left.\begin{aligned} \omega_F^2 (q_{s1} - 1) &= \omega_P^2 \cos(q_{s2}) \\ 0 &= \omega_P^2 \sin(q_{s2}) \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} &q_{s2} = 0 \\ &q_{s1} = 1 + \left(\frac{\omega_P}{\omega_F}\right)^2 = 1{,}333 \end{aligned}$$

- Anfangsbedingungen:
  - Fall 1: $q_{01} = 1{,}05, \quad q_{02} = 0{,}02, \dot{q}_{01} = 0, \quad \dot{q}_{02} = 0$
  - Fall 2: $q_{01} = 1{,}05, \quad q_{02} = 3{,}00, \dot{q}_{01} = 0, \quad \dot{q}_{02} = 0$
- Zeitbereich: 0*s* ≤ *t* ≤ 50*s*, *Δt* = 0,02*s*
- Lösungsverfahren: Octave-Funktion `lsode`

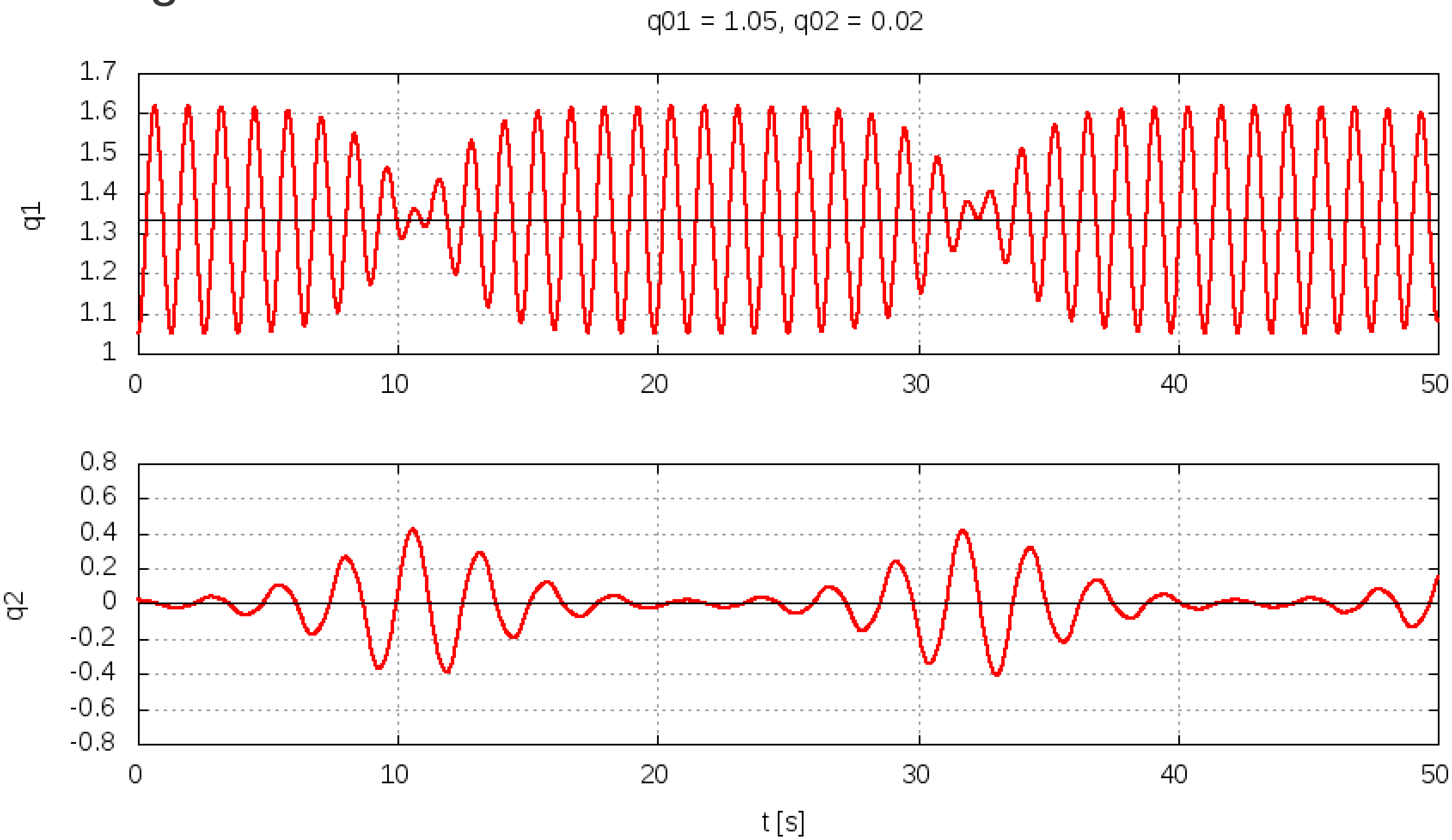
2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Octave-Code für die Differenzialgleichung:

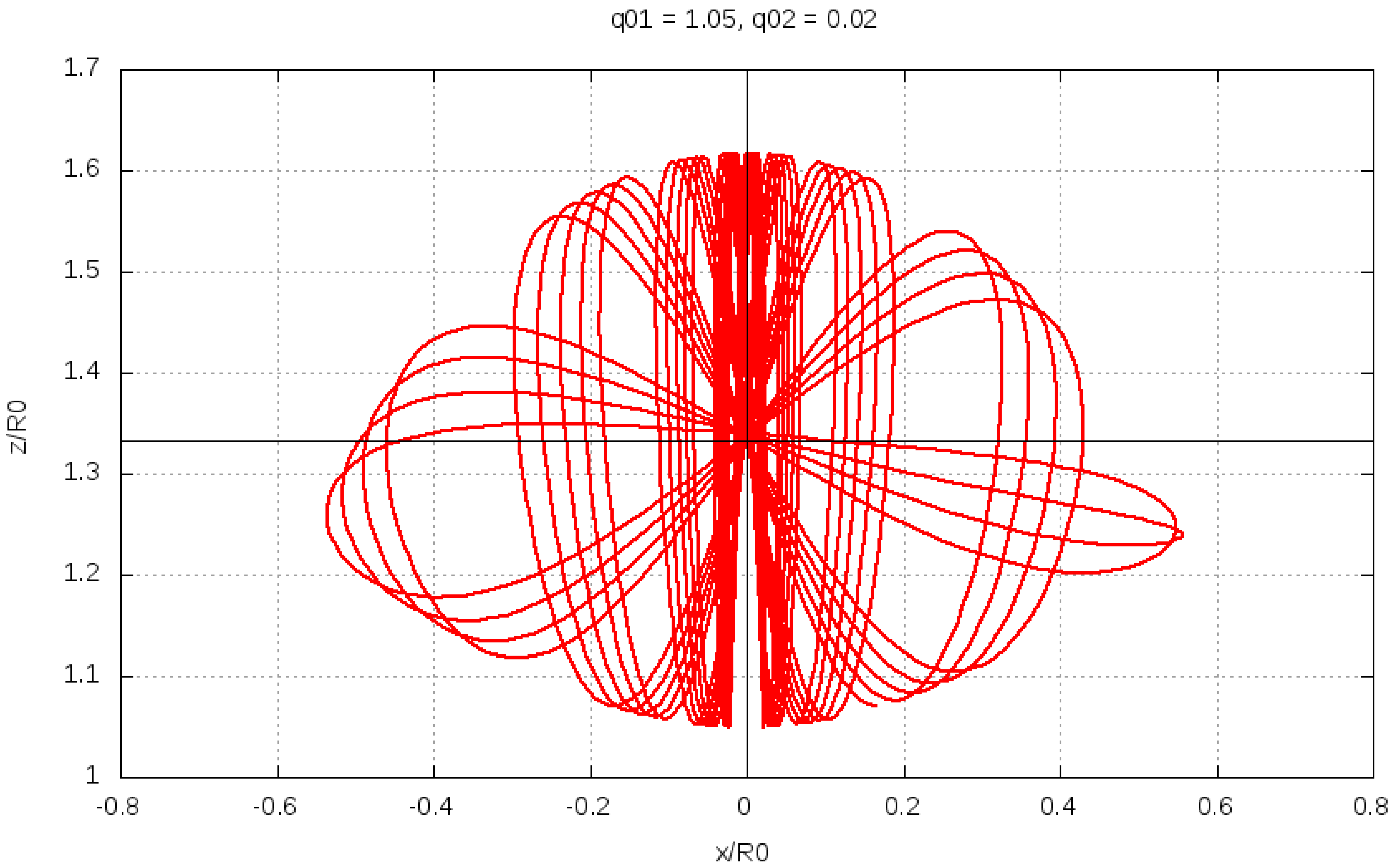
```
function dotx = f(x, t)
   global lambda1; global lambda2;
   dotx(1) = x(3);
   dotx(2) = x(4);
   dotx3   = x(1) * x(4)^2 - lambda1 * (x(1) - 1);
   dotx(3) = dotx3 + lambda2 * cos(x(2));
   dotx4   = 2 * x(3) * x(4) + lambda2 * sin(x(2));
   dotx(4) = - dotx4 / x(1);
endfunction
```

2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Ergebnisse für Fall 1:

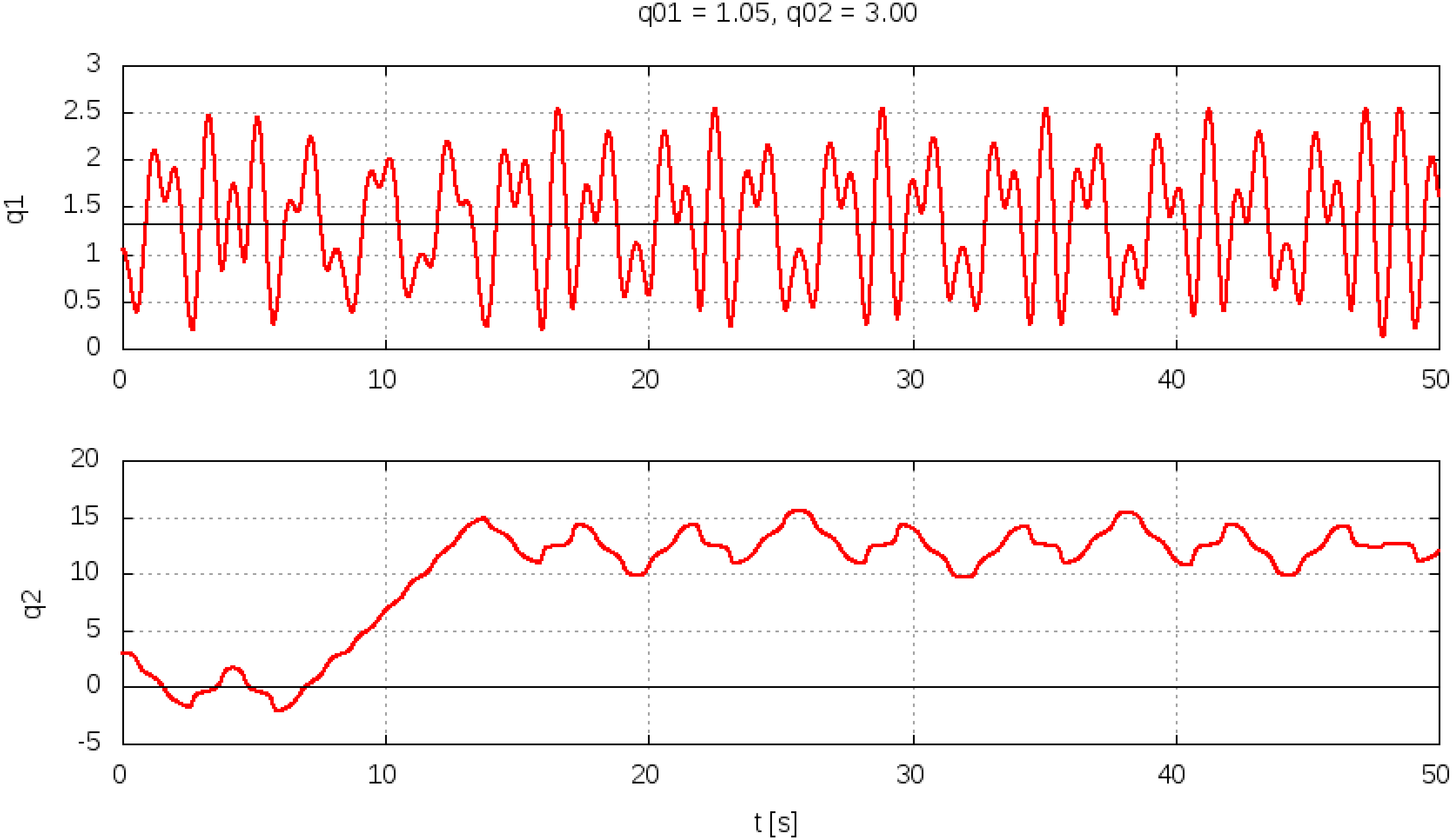


2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung



2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung

- Ergebnisse für Fall 2:



2. Anfangswertprobleme 2. Ordnung