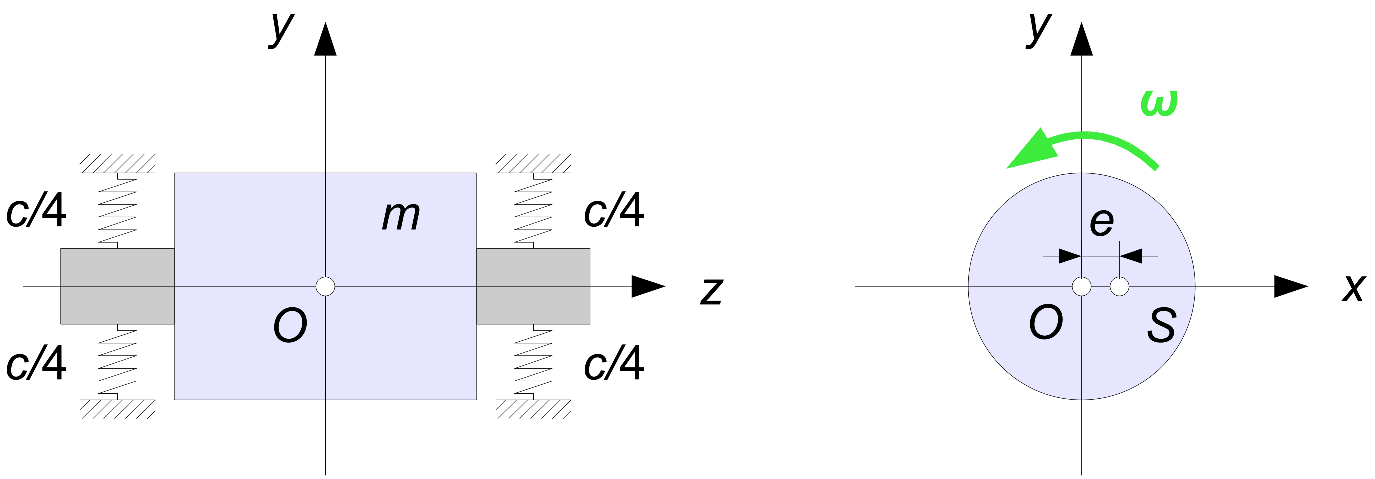
1. Selbstzentrierung

- Aufgabenstellung:
  - Ein starrer Körper der Masse *m* dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit *ω* um die ortsfeste *z*-Achse.
  - Der Körper ist elastisch gelagert, wobei die Steifigkeit der Lagerung in allen Richtungen in der *xy*-Ebene den gleichen Wert hat.
  - Ebenso hat die Dämpfung der Lagerung in allen Richtungen in der *xy*-Ebene den gleichen Wert.
  - Der Schwerpunkt des Körpers hat den Abstand *e* von der Drehachse.

1. Selbstzentrierung



- Beispiel: Trommel einer Waschmaschine

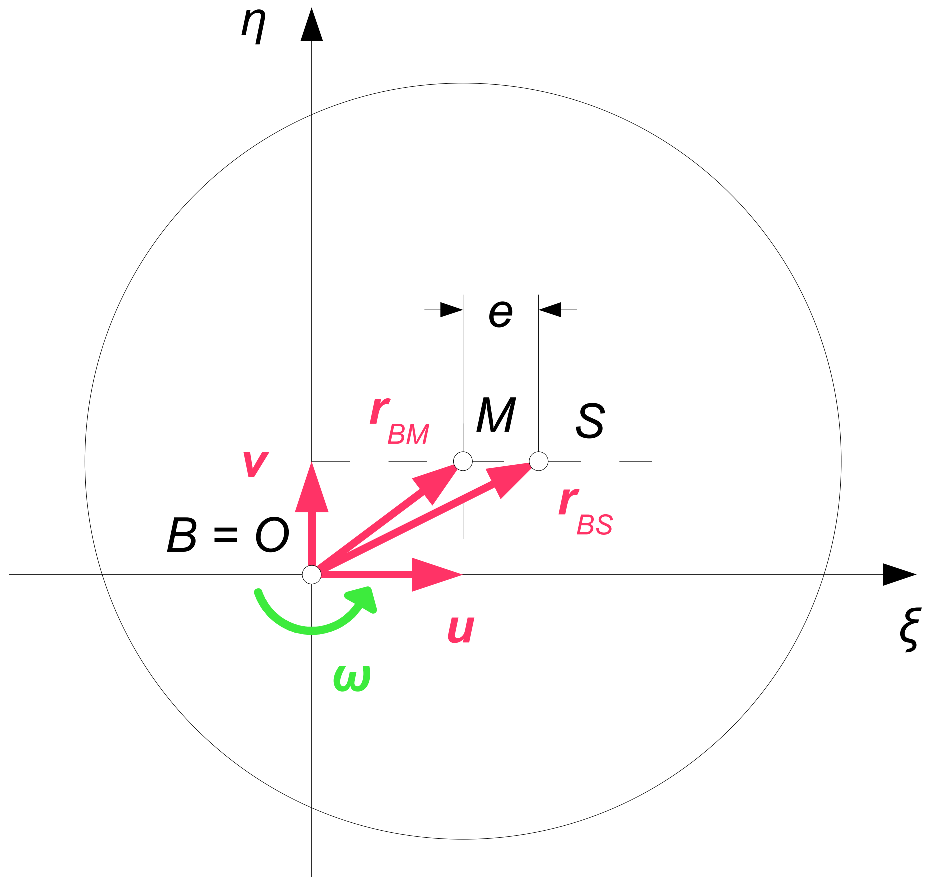
1. Selbstzentrierung

1.1 Bewegungsgleichung

- Annahmen:
  - Die z-Achse ist eine Hauptachse des Körpers.
  - Der Schwerpunkt des Körpers liegt in der Mitte zwischen den Federn.
  - Dann sind die Kräfte in den Federn auf beiden Seiten gleich groß, und der Körper kippt nicht.

1.1 Bewegungsgleichung

- Mitrotierendes Koordinatensystem:
  - Der Ursprung *B* liegt auf der *z*-Achse des ortsfesten Koordinatensystems, um die sich der Körper dreht.
  - Am Mittelpunkt *M* greifen die Lagerkräfte an.



1.1 Bewegungsgleichung

- Beziehungen im mitrotierenden Koordinatensystem:
  - Ortsvektor des Mittelpunkts: $\boldsymbol{r}_{BM} = u\,\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta$
  - Ortsvektor des Schwerpunkts: $\boldsymbol{r}_{BS} = (u+e)\,\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta$
  - Relativgeschwindigkeit des Mittelpunkts: ${}^{B}\boldsymbol{v}_M = \dot{u}\,\boldsymbol{b}_\xi + \dot{v}\,\boldsymbol{b}_\eta$
  - Relativgeschwindigkeit des Schwerpunkts: ${}^{B}\boldsymbol{v}_S = \dot{u}\,\boldsymbol{b}_\xi + \dot{v}\,\boldsymbol{b}_\eta$
  - Relativbeschleunigung des Schwerpunkts:

$$\boldsymbol{a}_r = {}^{B}\boldsymbol{a}_S = \ddot{u}\,\boldsymbol{b}_\xi + \ddot{v}\,\boldsymbol{b}_\eta$$

1.1 Bewegungsgleichung

- Für die Relativbeschleunigung gilt

$$m\,\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_f + \boldsymbol{F}_c$$

  mit

  - der resultierenden äußeren Kraft $\boldsymbol{F}$
  - der Führungskraft $\boldsymbol{F}_f$
  - und der Corioliskraft $\boldsymbol{F}_c$

- Resultierende äußere Kraft:
  - Die resultierende äußere Kraft besteht aus der Federkraft und der Dämpferkraft:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_F + \boldsymbol{F}_D$$

1.1 Bewegungsgleichung

- Für die Federkraft gilt: $\boldsymbol{F}_F = -c\,\boldsymbol{r}_{BM} = -c\left(u\,\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta\right)$

- Die Dämpferkraft ist proportional zur Absolutgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_M$ des Mittelpunkts, an dem die Lagerkräfte angreifen.

- Für die Absolutgeschwindigkeit des Mittelpunkts gilt:

$$\boldsymbol{v}_M = {}^B\boldsymbol{v}_M + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BM}$$

- Mit $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{b}_\zeta$ folgt:

$$\boldsymbol{v}_M = \dot{u}\,\boldsymbol{b}_\xi + \dot{v}\,\boldsymbol{b}_\eta + \omega\,\boldsymbol{b}_\zeta \times \left(u\,\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta\right) = \left(\dot{u} - \omega\,v\right)\boldsymbol{b}_\xi + \left(\dot{v} + \omega\,u\right)\boldsymbol{b}_\eta$$

- Damit gilt für die Dämpferkraft:

$$\boldsymbol{F}_D = -d\,\boldsymbol{v}_M = -d\left(\dot{u} - \omega\,v\right)\boldsymbol{b}_\xi - d\left(\dot{v} + \omega\,u\right)\boldsymbol{b}_\eta$$

1.1 Bewegungsgleichung

- Führungskraft:
  - Im allgemeinen Fall ist die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant. Dann gilt für die Führungskraft:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_f &= -m\,\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_{BS} - m\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BS}\right)\\
&= -m\,\dot{\omega}\,\boldsymbol{b}_\zeta\times\left[\left(u+e\right)\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta\right] - m\,\omega^2\,\boldsymbol{b}_\zeta\times\left[\boldsymbol{b}_\zeta\times\left(\left(u+e\right)\boldsymbol{b}_\xi + v\,\boldsymbol{b}_\eta\right)\right]\\
&= -m\,\dot{\omega}\left[\left(u+e\right)\boldsymbol{b}_\eta - v\,\boldsymbol{b}_\xi\right] - m\,\omega^2\,\boldsymbol{b}_\zeta\times\left[\left(u+e\right)\boldsymbol{b}_\eta - v\,\boldsymbol{b}_\xi\right]\\
&= m\left[\dot{\omega}\,v + \omega^2\left(u+e\right)\right]\boldsymbol{b}_\xi - m\left[\dot{\omega}\left(u+e\right) - \omega^2\,v\right]\boldsymbol{b}_\eta
\end{aligned}
$$

- Corioliskraft:

$$
\boldsymbol{F}_c = -2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times{}^B\boldsymbol{v}_S = -2\,m\,\omega\,\boldsymbol{b}_\zeta\times\left(\dot{u}\,\boldsymbol{b}_\xi + \dot{v}\,\boldsymbol{b}_\eta\right) = 2\,m\,\omega\left(\dot{v}\,\boldsymbol{b}_\xi - \dot{u}\,\boldsymbol{b}_\eta\right)
$$

1.1 Bewegungsgleichung

- Bewegungsgleichung:
  - Einsetzen der Kräfte in die Gleichung für die Relativbeschleunigung führt auf die Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
m\ddot{u} &= -c\,u - d\left(\dot{u}-\omega v\right) + m\left[\dot{\omega} v + \omega^2\left(u+e\right)\right] + 2m\omega\dot{v} \\
m\ddot{v} &= -c\,v - d\left(\dot{v}+\omega u\right) - m\left[\dot{\omega}\left(u+e\right) - \omega^2 v\right] - 2m\omega\dot{u}
\end{aligned}
$$

  - Mit $c/m=\omega_0^2$ und $d/m=2\delta$ folgt daraus:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\ddot{u} + 2\delta\dot{u} - 2\omega\dot{v} + \left(\omega_0^2-\omega^2\right)u - \left(2\delta\omega+\dot{\omega}\right)v &= \omega^2 e \\
\ddot{v} + 2\omega\dot{u} + 2\delta\dot{v} + \left(2\delta\omega+\dot{\omega}\right)u + \left(\omega_0^2-\omega^2\right)v &= -\dot{\omega} e
\end{aligned}
}
$$

1.2 Kritische Drehzahl

- Stationärer Zustand:
  - Im stationären Zustand ist die Winkelgeschwindigkeit ω konstant. Ebenso sind die Auslenkungen $u = u_S$ und $v = v_S$ konstant.
  - Aus der Bewegungsgleichung folgt:

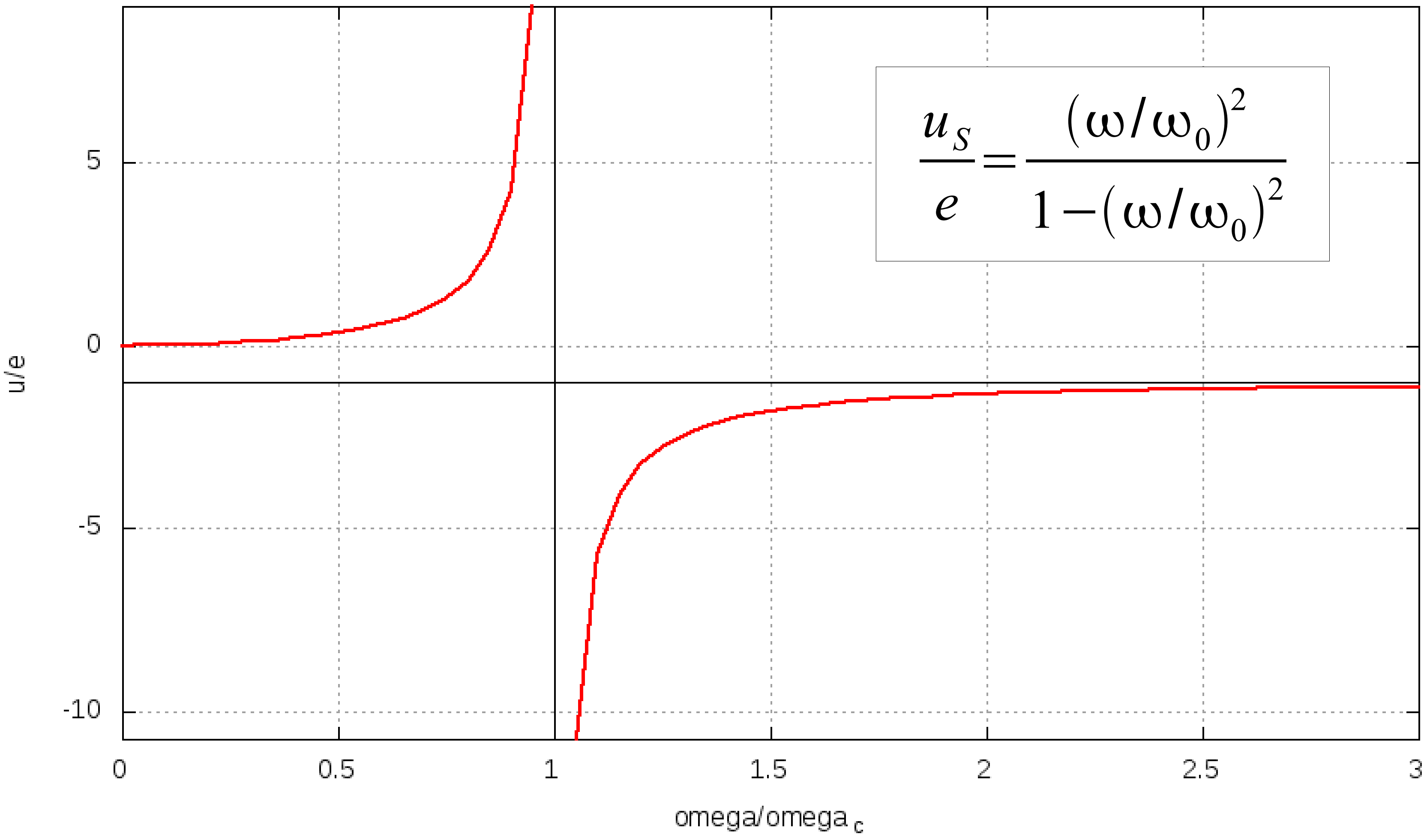
$$\begin{aligned} \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) u_S \quad &- \quad 2\delta\omega v_S &= \quad \omega^2 e \\ 2\delta\omega u_S \quad &+ \quad \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) v_S &= \quad 0 \end{aligned}$$

  - Zentrifugalkraft, Dämpferkraft und Federkraft sind im statischen Gleichgewicht.

1.2 Kritische Drehzahl

- Ungedämpfter Fall:
  - Für $\delta = 0$ folgt:
  $$\frac{u_S}{e} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1-(\omega/\omega_0)^2}, \quad v_S = 0$$
  - Für $\omega = \omega_c = \omega_0$ wird die Auslenkung unendlich groß.
  - Die Winkelgeschwindigkeit ω_c heißt kritische Winkelgeschwindigkeit. Die zugehörige Drehzahl
  $$n_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$
  wird als kritische Drehzahl bezeichnet.

1.2 Kritische Drehzahl



1.2 Kritische Drehzahl

- Die kritische Winkelgeschwindigkeit stimmt mit der Eigen-kreisfrequenz des elastisch gelagerten Körpers überein.
- In beiden Fällen sind die elastischen Kräfte gleich den Trägheitskräften.
- Unterkritischer Bereich:
  - Die Drehzahl ist kleiner als die kritische Drehzahl.
  - Die statische Auslenkung ist positiv.
  - Die statische Auslenkung nimmt mit zunehmender Drehzahl zu.

1.2 Kritische Drehzahl

- Kritische Drehzahl:
  - Wenn die Drehzahl mit der kritischen Drehzahl übereinstimmt, wird die statische Auslenkung unendlich groß.
  - Ein Betrieb mit der kritischen Drehzahl führt zur Zerstörung des Bauteils.
- Überkritischer Bereich:
  - Die Drehzahl ist größer als die kritische Drehzahl.
  - Die statische Auslenkung ist negativ.
  - Sie strebt mit zunehmender Drehzahl gegen $-e$.

1.2 Kritische Drehzahl

- Gedämpfter Fall:
  - Mit $\eta = \omega / \omega_0$ und $D = \delta / \omega_0$ gilt bei Berücksichtigung der Dämpfung:

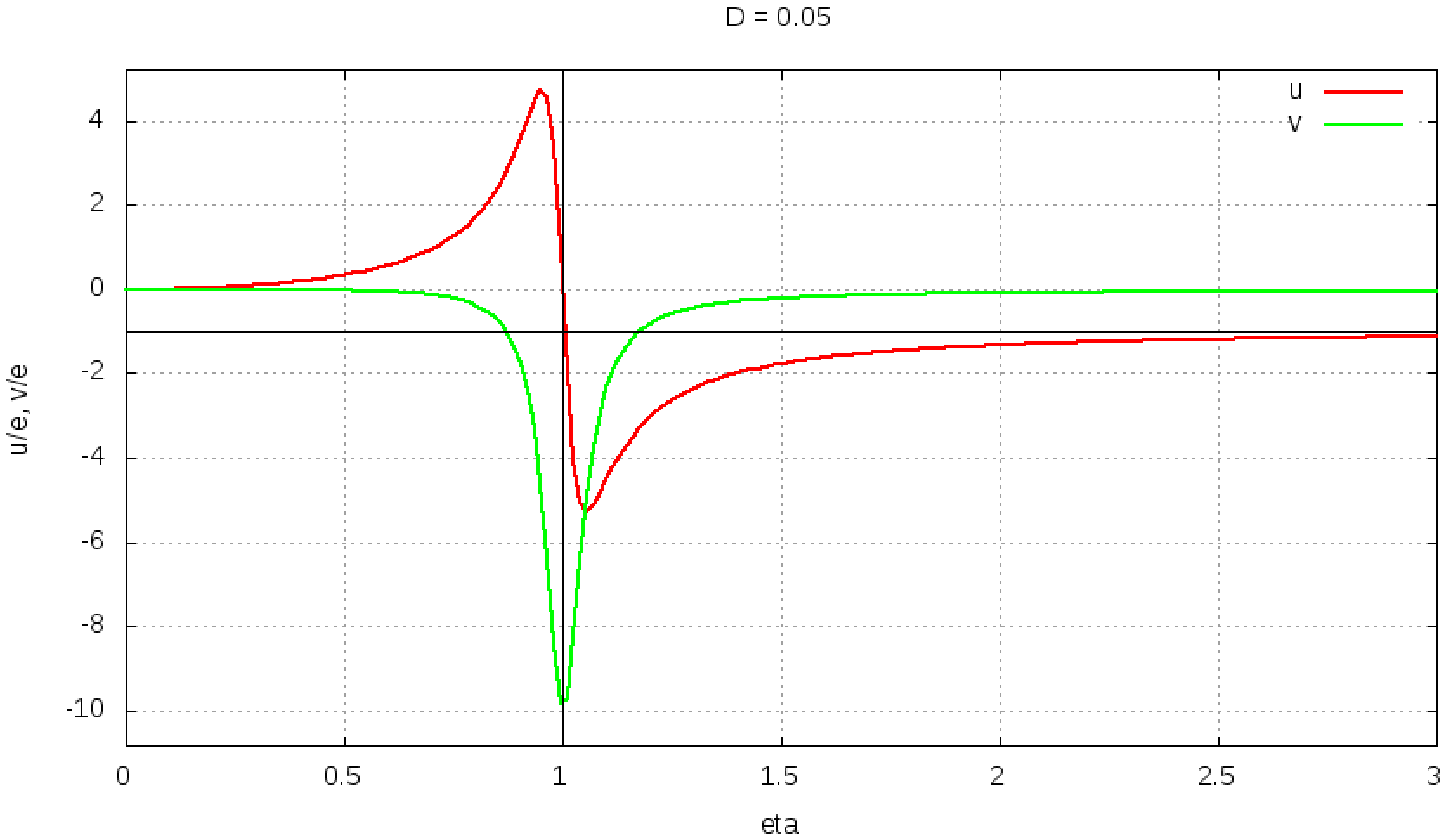
$$\begin{aligned} \left(1-\eta^2\right) u_S \quad &- \quad 2 D \eta v_S &= \quad \eta^2 e \\ 2 D \eta u_S \quad &+ \quad \left(1-\eta^2\right) v_S &= \quad 0 \end{aligned}$$

  - Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$\frac{u_S}{e} = \frac{\eta^2\left(1-\eta^2\right)}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4 D^2 \eta^2}, \quad \frac{v_S}{e} = \frac{-2 D \eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4 D^2 \eta^2}$$

1.2 Kritische Drehzahl

- Ergebnisse für *D* = 0,05:



1.2 Kritische Drehzahl

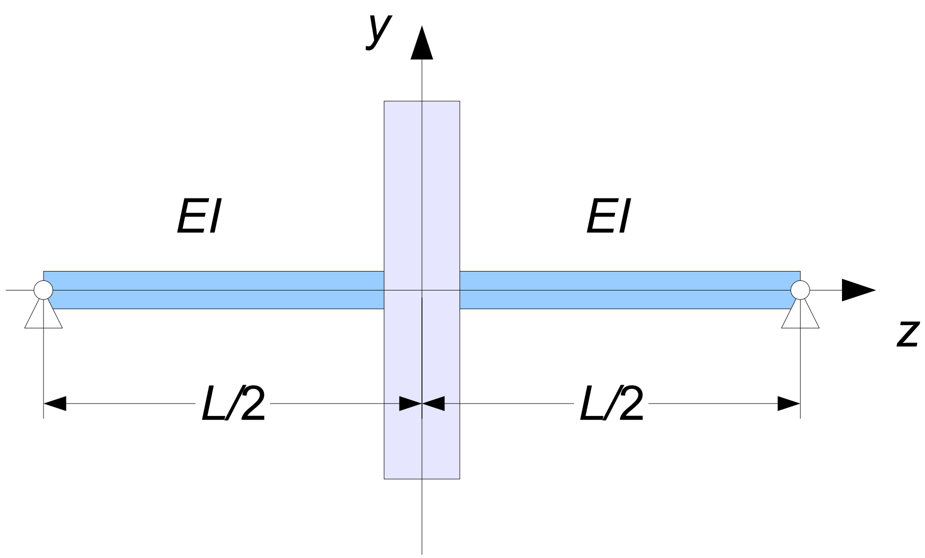
- Die Verschiebung bleibt endlich.
- Die Verschiebung u hat kurz vor Erreichen der kritischen Drehzahl ein Maximum. Bei der kritischen Drehzahl ist die Verschiebung u null und nimmt anschließend ein negatives Minimum an.
- Der Betrag der Verschiebung v hat bei der kritischen Drehzahl ein Maximum.
- Ist die Drehzahl sehr groß gegenüber der kritischen Drehzahl, so geht die Verschiebung v gegen null und die Verschiebung u gegen $-e$.

1.2 Kritische Drehzahl

- Selbstzentrierung:
  - Für $\omega \gg \omega_c$ gilt: $u_S \to -e\,,\quad v_S \to 0$
  - Die statische Verschiebung stellt sich so ein, dass der Schwerpunkt auf der Drehachse liegt.
  - Dieser Effekt wird als Selbstzentrierung bezeichnet.
  - Bauteile, bei denen sich eine statische Unwucht nicht vermeiden lässt, werden weich gelagert und überkritisch betrieben.
  - Beim Ein- und Ausschalten muss der kritische Bereich schnell durchfahren werden.
  - Beispiel: Waschmaschine

1.2 Kritische Drehzahl

- Biegewellen:
  - Eine starre Scheibe sitzt auf einer elastischen Welle, die um die *z*-Achse rotiert.



1.2 Kritische Drehzahl

- Anstelle der Lagersteifigkeit ist die Biegesteifigkeit für die Auslenkung der Welle an der Stelle, an der sich die Scheibe befindet, zu nehmen.
- Für eine beidseitig gelenkig gelagerte Welle, bei der sich die Scheibe in der Mitte befindet, gilt z.B.

$$c = 48 \frac{EI}{L^3}$$

- Die kritische Drehzahl bei Biegewellen wird als biegekritische Drehzahl bezeichnet.

1.2 Kritische Drehzahl

- Überkritisch laufende Wellen wurden zuerst von Gustav de Laval im Jahre 1883 experimentell untersucht.
- Der theoretische Nachweis für die Stabilität wurde von Föppl (1895) und Stodola (1904) erbracht.

1.3 Stabilität

- Der stationäre Zustand ist stabil, wenn der Körper nach einer Störung wieder in den stationären Zustand zurückkehrt.
- Gleichungen für die Störung:
  - Im gestörten Zustand gilt: $u(t) = u_S + \bar{u}(t), \quad v(t) = v_S + \bar{v}(t)$
  - Einsetzen in die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Bedingungen für den stationären Zustand führt auf

$$\ddot{\bar{u}} + 2\delta\dot{\bar{u}} - 2\omega\dot{\bar{v}} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\bar{u} - 2\delta\omega\bar{v} = 0$$
$$\ddot{\bar{v}} + 2\omega\dot{\bar{u}} + 2\delta\dot{\bar{v}} + 2\delta\omega\bar{u} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\bar{v} = 0$$

1.3 Stabilität

- Die Gleichungen für die Störung sind linear. Sie gelten auch für große Störungen.

- Lösung der Gleichungen für die Störung:
  - Lösungsansatz: $\bar{u} = u_0 e^{\alpha t}, \quad \bar{v} = v_0 e^{\alpha t}$
  - Einsetzen ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} \left(\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 - \omega^2\right) & u_0 & - & 2\omega\left(\alpha+\delta\right) & v_0 & = & 0 \\ 2\omega\left(\alpha+\delta\right) & u_0 & + & \left(\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 - \omega^2\right) & v_0 & = & 0 \end{array}$$

  - Das homogene Gleichungssystem hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante null ist.

1.3 Stabilität

- Diese Bedingung führt auf die charakteristische Gleichung

$$\left(\alpha^2+2\delta\alpha+\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2\left(\alpha+\delta\right)^2=0$$

- Daraus folgt: $\alpha^2+2\delta\alpha+\omega_0^2-\omega^2=\pm 2i\omega\left(\alpha+\delta\right)$
- Fall 1: $\alpha^2+2\delta\alpha+\omega_0^2-\omega^2=2i\omega\left(\alpha+\delta\right)$
  - Aus $\alpha^2+2\left(\delta-i\omega\right)\alpha+\omega_0^2-\omega^2-2i\omega\delta=0$ folgt:

$$\begin{aligned}\alpha_{1/2}&=-\delta+i\omega\pm\sqrt{\left(\delta-i\omega\right)^2-\omega_0^2+\omega^2+2i\omega\delta}\\&=-\delta+i\omega\pm i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\end{aligned}$$

  - Der Realteil beider Lösungen ist immer negativ.

1.3 Stabilität

- Fall 2: $\alpha^2+2\delta\alpha+\omega_0^2-\omega^2=-2i\omega(\alpha+\delta)$
  - Aus $\alpha^2+2(\delta+i\omega)\alpha+\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\delta=0$ folgt:

$$\begin{aligned}\alpha_{3/4}&=-\delta-i\omega\pm\sqrt{(\delta+i\omega)^2-\omega_0^2+\omega^2-2i\omega\delta}\\&=-\delta-i\omega\pm i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\end{aligned}$$

  - Der Realteil beider Lösungen ist immer negativ.

- Ergebnis:
  - Der stationäre Zustand ist sowohl im unterkritischen als auch im überkritischen Bereich stabil.

1.4 Anfahrvorgang

- Zur Untersuchung des Anfahrvorgangs wird die Bewegungsgleichung für vorgegebenes $\omega(t)$ numerisch gelöst.
- Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung:
  - Mit den Substitutionen $z_1 = u,\ z_2 = v,\ z_3 = \dot{u},\ z_4 = \dot{v}$ lautet die Bewegungsgleichung:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) z_1 + \left(2\delta\omega + \dot{\omega}\right) z_2 - 2\delta z_3 + 2\omega z_4 + \omega^2 e \\ -\left(2\delta\omega + \dot{\omega}\right) z_1 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) z_2 - 2\omega z_3 - 2\delta z_4 - \dot{\omega} e \end{bmatrix}$$

1.4 Anfahrvorgang

- Anfangsbedingungen:
  - Der Anfahrvorgang startet aus der Ruhe:

$$z_1(0)=z_2(0)=0, \quad z_3(0)=z_4(0)=0$$

- Daten:
  - Der zeitliche Verlauf der Winkelgeschwindigkeit ist

$$\omega(t)=\omega_E\left(1-e^{-t/T}\right)$$

mit $\omega_E = 167{,}6s^{-1}$ (entsprechend einer Drehzahl von $1600 min^{-1}$) und $T = 1s$.

1.4 Anfahrvorgang

- Kritische Drehzahl:
  - Die statische Einfederung y_S unter Eigengewicht beträgt 2*mm*.
  - Aus $y_S = \dfrac{m\,g}{c}$ folgt: $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{g}{y_s} = 4905\,\dfrac{1}{s^2} \;\rightarrow\; \omega_0 = 70{,}04\,\dfrac{1}{s}$
- Zeit bis zum Erreichen der kritischen Winkelgeschwindig-keit:
  - Aus $\omega_0 = \omega_E\left(1 - e^{-t_{crit}/T}\right)$ folgt: $t_{crit} = T\ln\left(\dfrac{\omega_E}{\omega_E - \omega_0}\right)$
  - Zahlenwert: $t_{crit} = 0{,}541\,s$

1.4 Anfahrvorgang

- Exzentrizität: $e = 5mm$
- Dämpfung:
  - Lehrsches Dämpfungsmaß: $D = 5\%$
  - Daraus berechnet sich die Abklingkonstante zu

$$\delta = \omega_0 D = 3{,}502\, s^{-1}$$

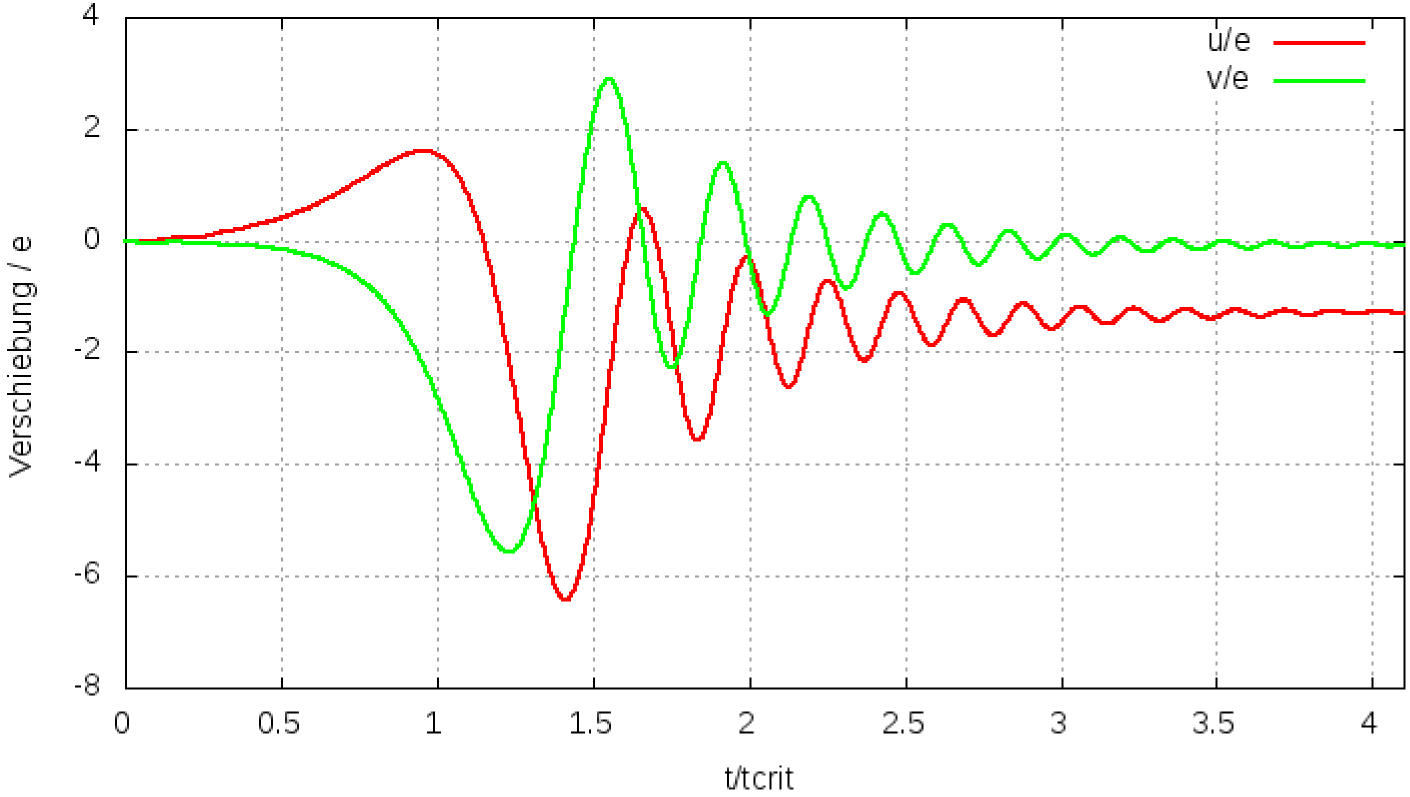
- Simulationsdauer: $t_E = 2\, t_{crit} + 4/\delta$
- Zeitschritt: $\Delta t = 0{,}002s$

• Lösungsverfahren:

- Das Differenzialgleichungssystem wird in Octave mit der Funktion `lsode` gelöst.

1.4 Anfahrvorgang

- Ergebnisse:
  - Verschiebungen *u* und *v*:



1.4 Anfahrvorgang

- Bahn des Schwerpunkts im mitrotierenden Koordinatensystem: