

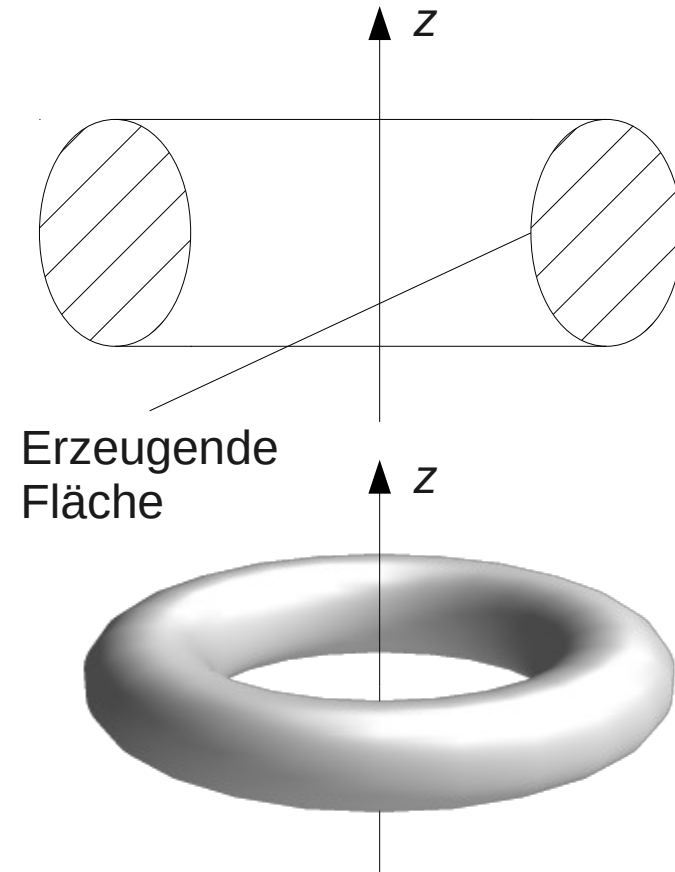
## 5. Guldinsche Regeln

---

- Mit den Guldinschen Regeln lässt sich
  - das Volumen eines Rotationskörpers aus den Koordinaten des Flächenschwerpunktes der erzeugenden Fläche berechnen
  - die Oberfläche eines Rotationskörpers aus den Koordinaten des Linienschwerpunktes des Randes der erzeugenden Fläche berechnen

## 5. Guldinsche Regeln

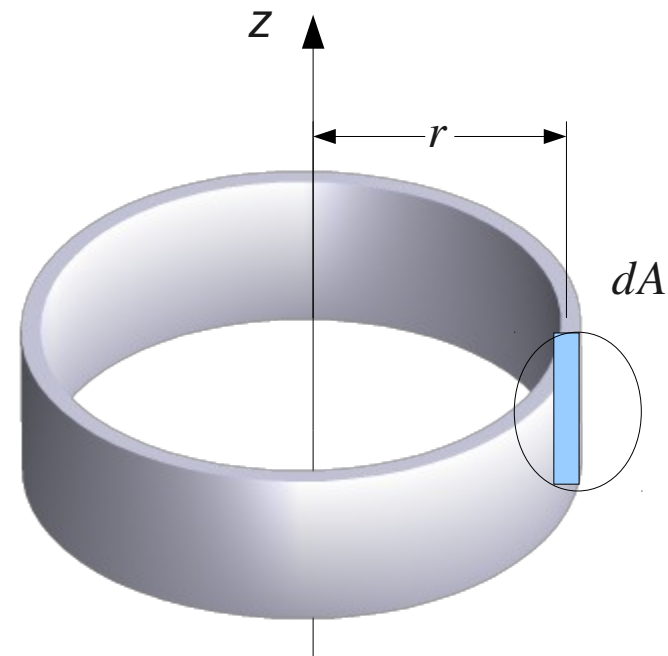
- Rotationskörper:
  - Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation einer erzeugenden Fläche um eine Rotationsachse.
  - Die Rotationsachse darf die erzeugende Fläche nicht schneiden.



## 5. Guldinsche Regeln

- Volumen eines Rotationskörpers:
  - Der Rotationskörper ist aus infinitesimalen Ringen aufgebaut.
  - Für das Volumen eines Rings gilt:

$$dV = 2\pi r dA$$



## 5. Guldinsche Regeln

- Summation über alle Ringe ergibt das gesamte Volumen:

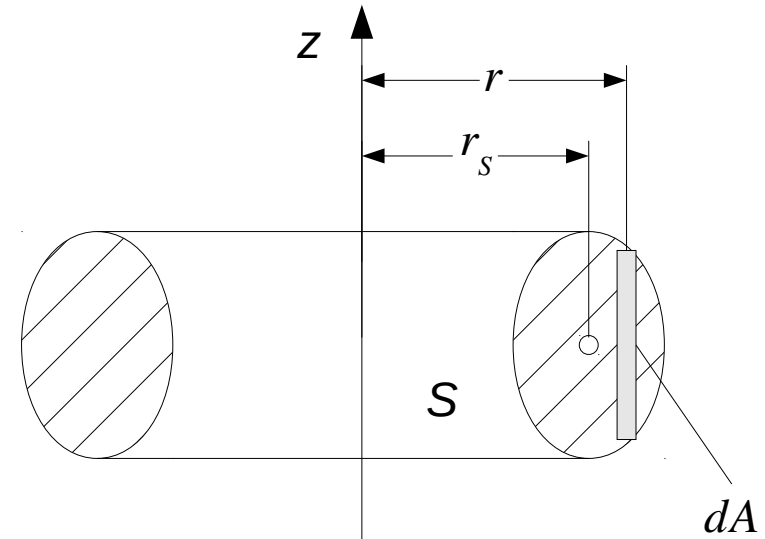
$$V = 2\pi \int_A r dA$$

- Mit

$$\int_A r dA = r_s A$$

folgt die *1. Guldinsche Regel*:

$$V = 2\pi r_s A$$



$r_s$ : Radius des Flächenschwerpunkts

- Volumen = Weg des Flächenschwerpunkts mal Fläche

## 5. Guldinsche Regeln

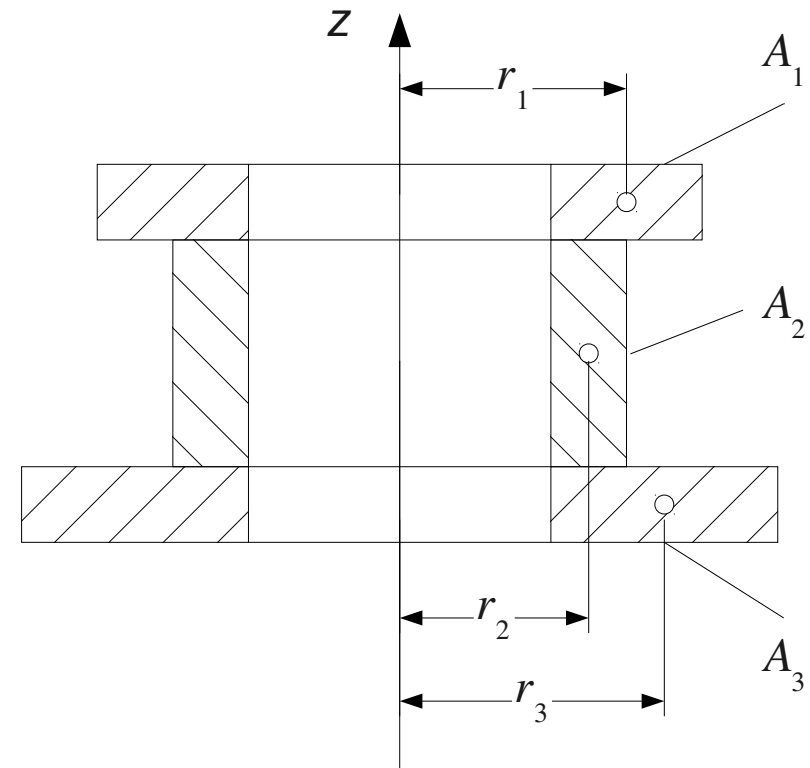
- Zusammengesetzte Körper:

- Aus  $r_S A = \sum r_i A_i$  folgt:

$$V = 2\pi \sum r_i A_i$$

- Summation über die Teilkörper ergibt das gleiche Ergebnis:

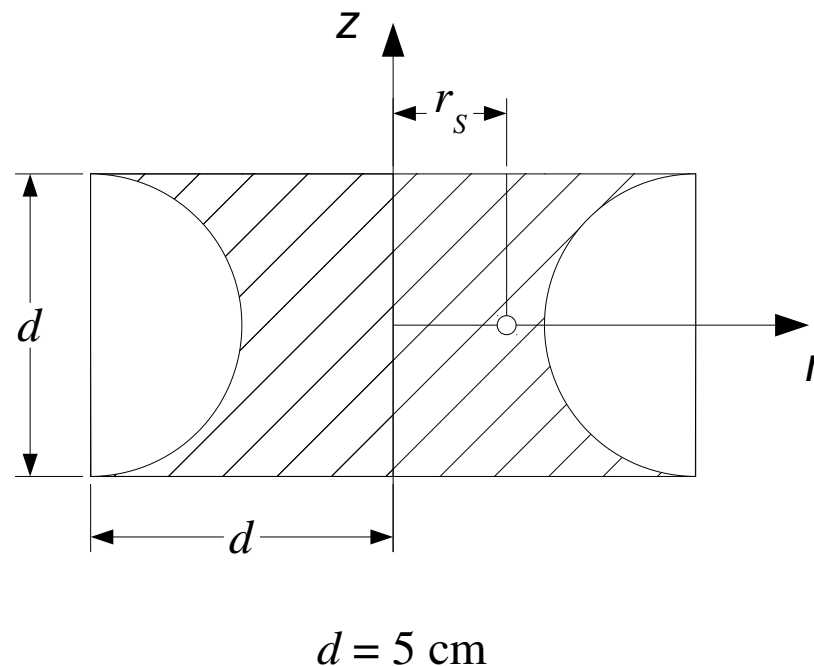
$$V = \sum 2\pi r_i A_i$$



$$V = 2\pi (r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3)$$

## 5. Guldinsche Regeln

- Beispiel: Volumen einer Felge



- Flächen:

- Quadrat:  $A_Q = d^2$

- Halbkreis:

$$A_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{8} d^2$$

- Schwerpunkte:

- Quadrat:  $r_{SQ} = \frac{d}{2}$

- Halbkreis:

$$r_{SH} = d - \frac{2}{3\pi} d = d \left( 1 - \frac{2}{3\pi} \right)$$

## 5. Guldinsche Regeln

---

- Volumen:  $V = 2 \pi (r_{SQ} A_Q - r_{SH} A_H)$

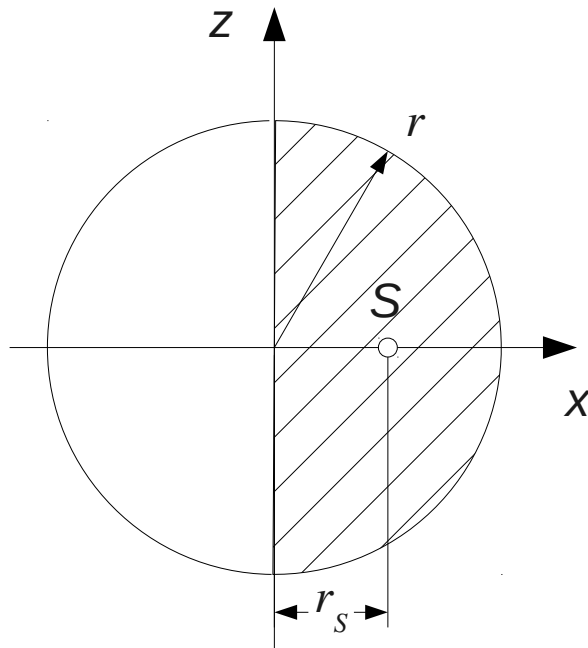
$$\begin{aligned} r_{SQ} A_Q - r_{SH} A_H &= d^2 \cdot \frac{d}{2} - \frac{\pi}{8} d^2 \cdot d \left( 1 - \frac{2}{3\pi} \right) = \frac{d^3}{2} \left( 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3\pi} \right) \\ &= \frac{d^3}{8} \left( 4 - \pi + \frac{2}{3} \right) = \left( \frac{d}{2} \right)^3 \left( \frac{14}{3} - \pi \right) \end{aligned}$$

$$V = 2 \pi \left( \frac{d}{2} \right)^3 \left( \frac{14}{3} - \pi \right)$$

- Zahlenwert:  $V = 149,7 \text{ cm}^3$

## 5. Guldinsche Regel

- Beispiel: Flächenschwerpunkt eines Halbkreises



- Durch Rotation des Halbkreises entsteht eine Kugel.

- Volumen der Kugel:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

- Halbkreisfläche:

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2$$

- Flächenschwerpunkt:

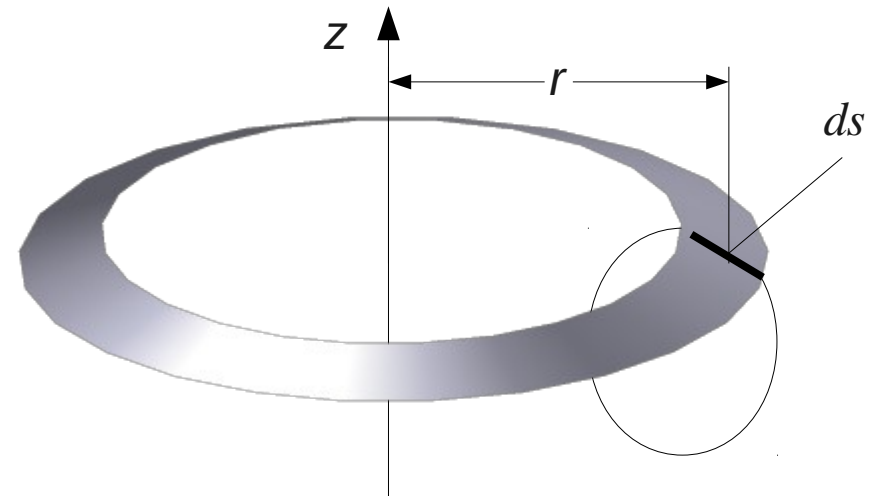
$$r_s = \frac{V}{2 \pi A} = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$$

## 5. Guldinsche Regeln

---

- Oberfläche eines Rotationskörpers:
  - Die Oberfläche des Rotationskörpers ist aus infinitesimalen Ringen zusammengesetzt.
  - Für die Oberfläche eines Rings gilt:

$$dO = 2\pi r ds$$



## 5. Guldinsche Regeln

- Summation über alle Ringe ergibt die gesamte Oberfläche:

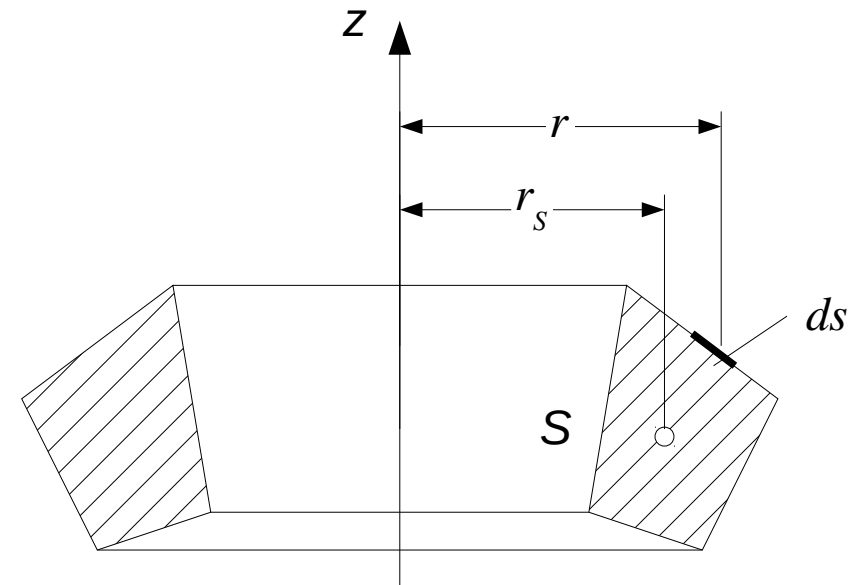
$$O = 2\pi \int_L r \, ds$$

- Mit

$$\int_L r \, ds = r_s L$$

folgt die 2. *Guldinsche Regel*:

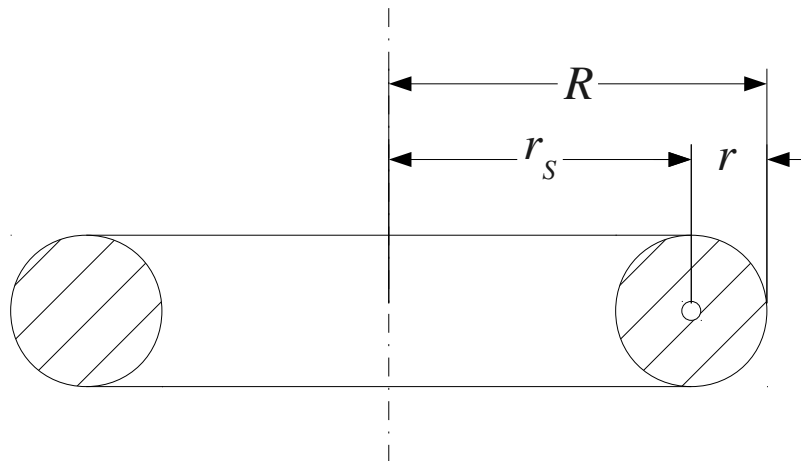
$$O = 2\pi r_s L$$



$r_s$ : Radius des Linienschwerpunkts

## 5. Guldinsche Regeln

- Beispiel: Oberfläche eines Torus



- Länge des Randes:
- Linien Schwerpunkt des Randes:

$$L = 2\pi r$$

$$r_s = R - r$$

- Oberfläche:

$$\begin{aligned} O &= 2\pi L r_s \\ &= 2\pi \cdot 2\pi r (R - r) \\ &= 4\pi^2 r (R - r) \\ &= 4\pi^2 R^2 \left( \frac{r}{R} - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

## 5. Guldinsche Regeln

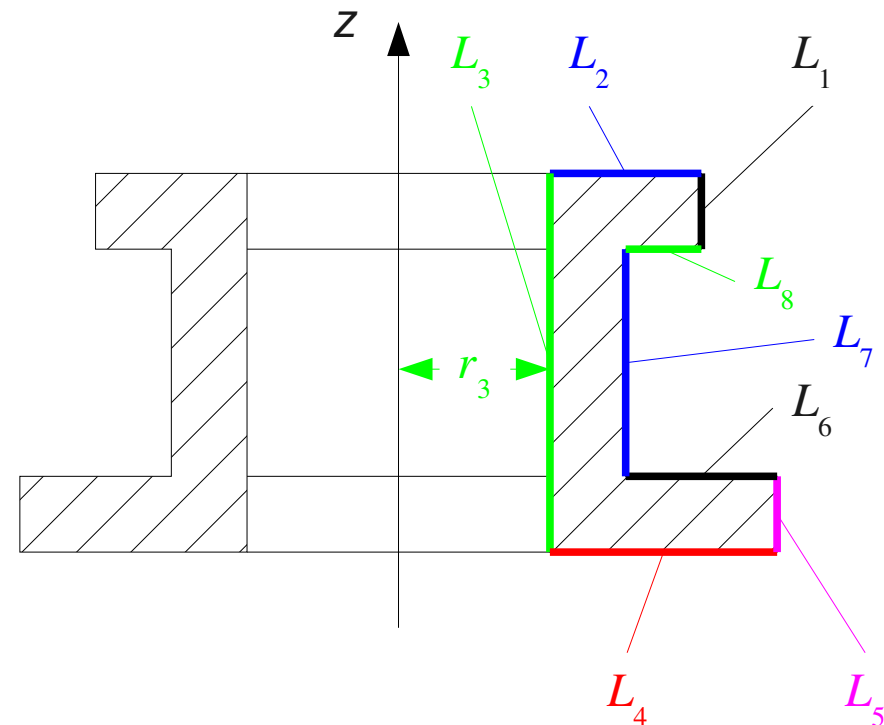
- Zusammengesetzte Körper:

- Aus  $r_S L = \sum r_i L_i$  folgt:

$$O = 2\pi \sum r_i L_i$$

- Summation über die Teilflächen ergibt das gleiche Ergebnis:

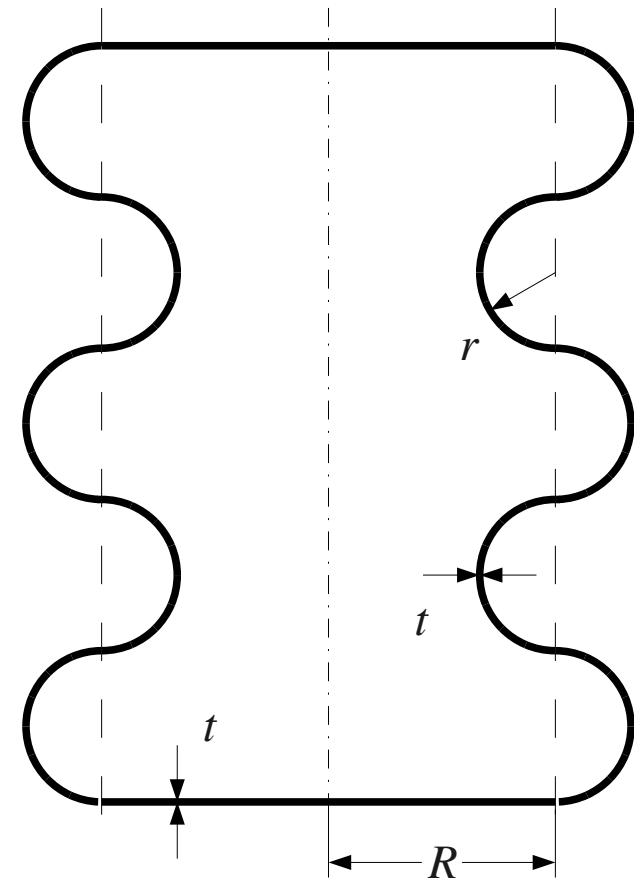
$$O = \sum 2\pi r_i L_i$$



$$O = 2\pi (r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3 + r_4 L_4 + r_5 L_5 + r_6 L_6 + r_7 L_7 + r_8 L_8)$$

## 5. Guldinsche Regeln

- Beispiel: Fass aus Wellblech
  - Gegeben:
    - Radien  $R$  und  $r$ , Wandstärke  $t$
    - $2n+1$  Halbwellen (Halbkreise)
    - Massendichte  $\rho$
  - Gesucht:
    - Masse  $m$



## 5. Guldinsche Regeln

---

- Halbwelle:

- Linienschwerpunkt:  $r_s = R \pm 2r/\pi$

- Länge:  $L = \pi r$

- Oberfläche des Fasses:

$$O = 2\pi \left[ 2 \cdot \frac{R}{2} R + (n+1) \left( R + \frac{2r}{\pi} \right) \pi r + n \left( R - \frac{2r}{\pi} \right) \pi r \right]$$

$$= 2\pi R^2 \left[ 1 + (2n+1) \pi \frac{r}{R} + 2 \frac{r^2}{R^2} \right]$$

- Masse des Fasses:

$$m = \rho t O = 2\pi \rho t R^2 \left[ 1 + (2n+1) \pi \frac{r}{R} + 2 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$