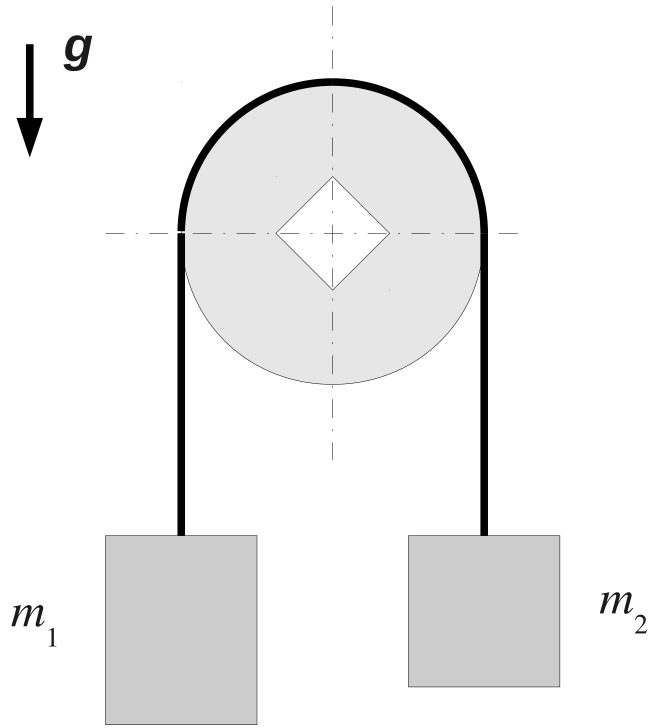
3. Seilhaftung und Seilreibung

3. Seilhaftung und Seilreibung

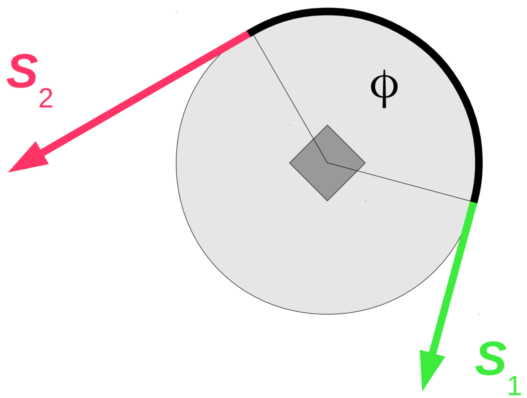
3.1 Haften

- Bei einer feststehenden Rolle gilt:
  - Wenn die Rolle glatt ist, müssen beide Massen gleich groß sein.
  - Wenn die Rolle rau ist, können die Massen in gewissen Grenzen unterschiedlich sein.



3.1 Haften

- Aufgabenstellung:

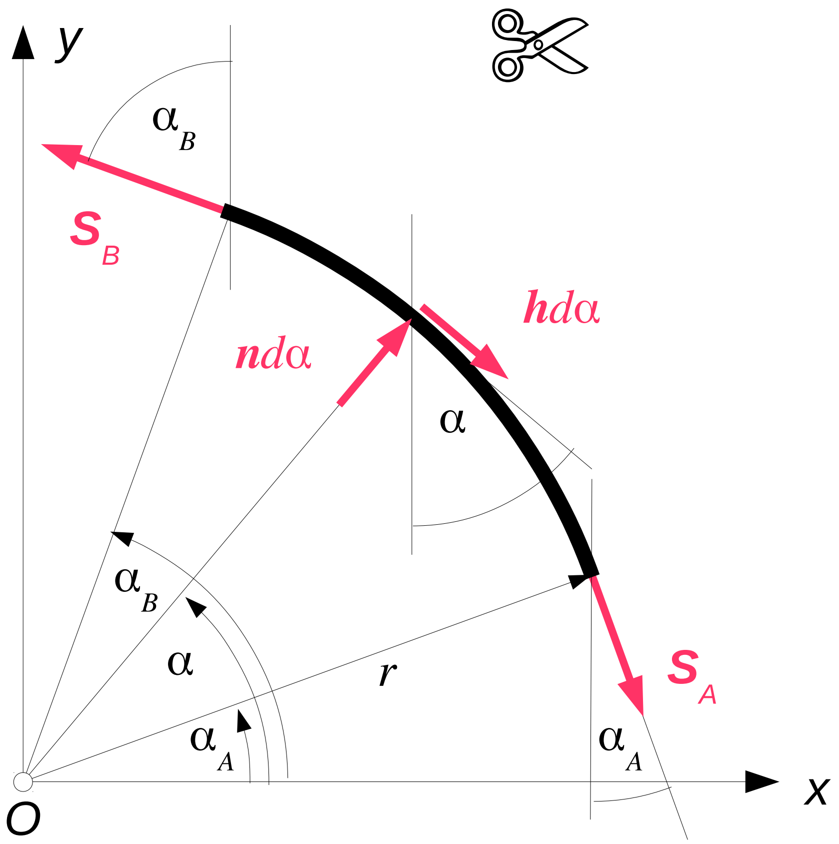


  - Das Seil haftet auf der feststehenden Rolle.

- An einem Seilende greift die Kraft S_1 an.
- Wie groß darf die am anderen Seilende angreifende Kraft S_2 höchstens sein?
- Gegeben:
  - S_1 , ϕ, μ_0
- Gesucht:
  - S_{2max}

3.1 Haften

- Gleichgewicht am Seilabschnitt:



$$\sum M^O = 0 \quad :$$

$$r S_B - r S_A - \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} r\, h\, d\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad :$$

$$\int_{\alpha_A}^{\alpha_B} n \sin(\alpha)\, d\alpha - \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} h \cos(\alpha)\, d\alpha$$

$$+ S_B \cos(\alpha_B) - S_A \cos(\alpha_A) = 0$$

3.1 Haften

- Berechnung der Differenzen durch Integrale ergibt:

$$\sum M^O = 0 \;\rightarrow\; r\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\left(\frac{dS}{d\alpha} - h\right) d\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; \int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\left[n\sin(\alpha) - h\cos(\alpha) + \frac{d}{d\alpha}\left(S\cos(\alpha)\right)\right] d\alpha = 0$$

- Damit die Integrale für beliebige Intervalle null sind, muss gelten:

$$\frac{dS}{d\alpha} - h = 0 \;\rightarrow\; h = \frac{dS}{d\alpha} \qquad (1)$$

$$n\sin(\alpha) - h\cos(\alpha) + \frac{dS}{d\alpha}\cos(\alpha) - S\sin(\alpha) = 0 \qquad (2)$$

3.1 Haften

- Einsetzen von Gleichung (1) in Gleichung (2) ergibt:

$$(n-S)\sin(\alpha)=0 \rightarrow n=S$$

- Die Haftbedingung lautet: $h<\mu_0 n$

- Daraus folgt: $\frac{dS}{d\alpha}<\mu_0 S \rightarrow \frac{1}{S}\frac{dS}{d\alpha}<\mu_0$

- Integration über das gesamte Seil ergibt:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{S}\frac{dS}{d\alpha}\,d\alpha=\int_{S_1}^{S_2}\frac{dS}{S}<\mu_0(\alpha_2-\alpha_1) \rightarrow \ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right)<\mu_0(\alpha_2-\alpha_1)$$

3.1 Haften

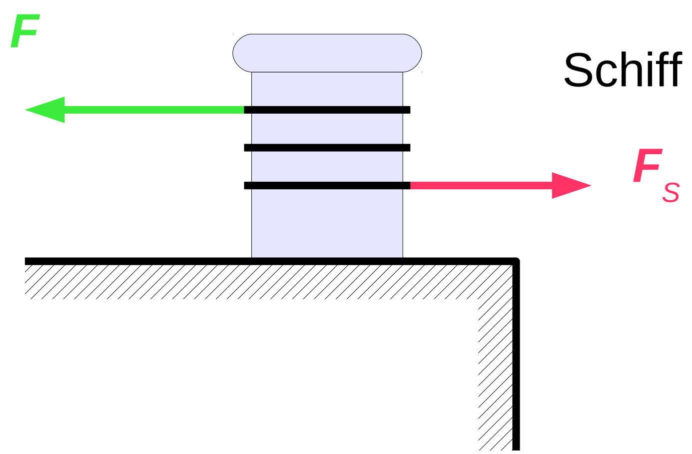
- Mit $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$ lautet die Haftbedingung für das Seil:

$$\boxed{S_2 < S_1 e^{\mu_0 \phi}}$$

- Diese Ungleichung wird als *Eytelweinsche Seilgleichung* bezeichnet.
- Bemerkungen:
  - Der Winkel ϕ muss im Bogenmaß eingegeben werden.
  - Die Kraft S_2 greift auf der Seite an, nach der sich das Seil bewegt, wenn die maximale Haftkraft überschritten wird.
  - Für $S_2 < S_{2max} = S_1 e^{\mu_0 \phi}$ bleibt das Seil in Ruhe.

3.1 Haften

- Beispiel: Seil um Poller



- Gegeben:
  - Kraft F
  - 2 Umschlingungen entsprechen 720°
  - Haftungskoeffizient $\mu_0 = 0{,}3$
- Gesucht:
  - Kraft F_S, mit der das Schiff maximal ziehen darf, damit die Kraft F nicht überschritten wird

3.1 Haften

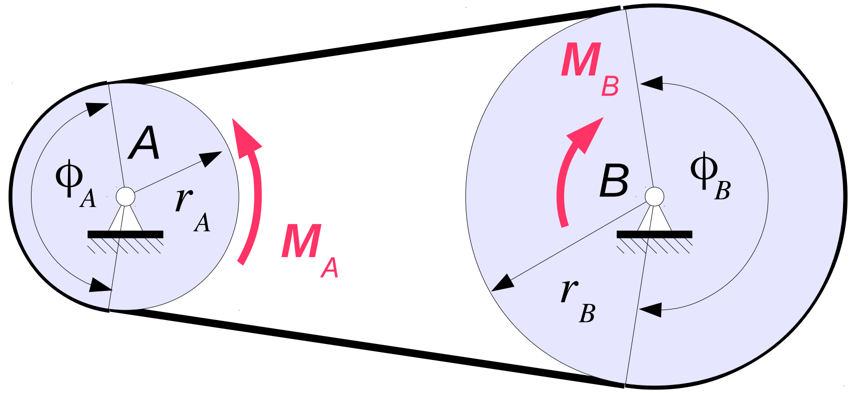
- Bei Überschreiten der Kraft setzt sich das Seil in Richtung Schiff in Bewegung.
- Daher lautet die Haftbedingung: $F_S < F_{Smax} = F\, e^{\mu_0 \phi}$
- Zahlenwert: $\phi = 720° \cdot \dfrac{\pi}{180°} = 4\pi$

$$F_{Smax} = F\, e^{0{,}3 \cdot 4\pi} = 43{,}38\, F$$

- Bei 3 Umschlingungen ergibt sich: $F_{Smax} = 285{,}7\, F$

3.1 Haften

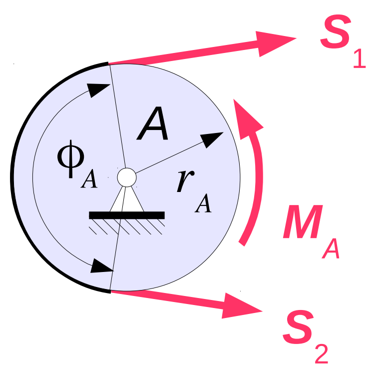
- Beispiel: Riementrieb
  - Durch einen Riemen wird ein Moment von der Scheibe *B* auf die Scheibe *A* übertragen.
  - Gegeben:
    - Vorspannung S_0
    - Radius r_A und Umschlingungswinkel ϕ_A
    - Haftungskoeffizient μ_0



  - Gesucht:
    - Maximales Moment M_A , bei dem der Riemen noch nicht rutscht

3.1 Haften

- Da der Haftungskoeffizient für beide Scheiben gleich ist, tritt wegen $\phi_A < \phi_B$ Gleiten zuerst bei Scheibe *A* auf.
- Gleichgewicht:



$$\sum M^A = 0 \; : \; M_A - r_A (S_1 - S_2) = 0$$
$$\rightarrow \; M_A = r_A (S_1 - S_2)$$

- Haftbedingung: $S_1 < S_2 e^{\mu_0 \phi_A}$
- Vorspannung:
  - Es gilt: $S_1 = \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_1 - S_2}{2} , \quad S_2 = \frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{S_1 - S_2}{2}$

3.1 Haften

- Mit $S_0=\frac{1}{2}(S_1+S_2)$, $\Delta S=\frac{1}{2}(S_1-S_2)$

  folgt: $S_1=S_0+\Delta S$, $S_2=S_0-\Delta S$

- Die Kraft S_0 ist gleich der Kraft, die im Riemen auftritt, wenn kein Moment übertragen wird. Sie entspricht der Vorspannung.

– Einsetzen in die Haftbedingung ergibt:

$$S_0+\Delta S<(S_0-\Delta S)e^{\mu_0\phi_A}$$

3.1 Haften

- Daraus kann ΔS bestimmt werden:

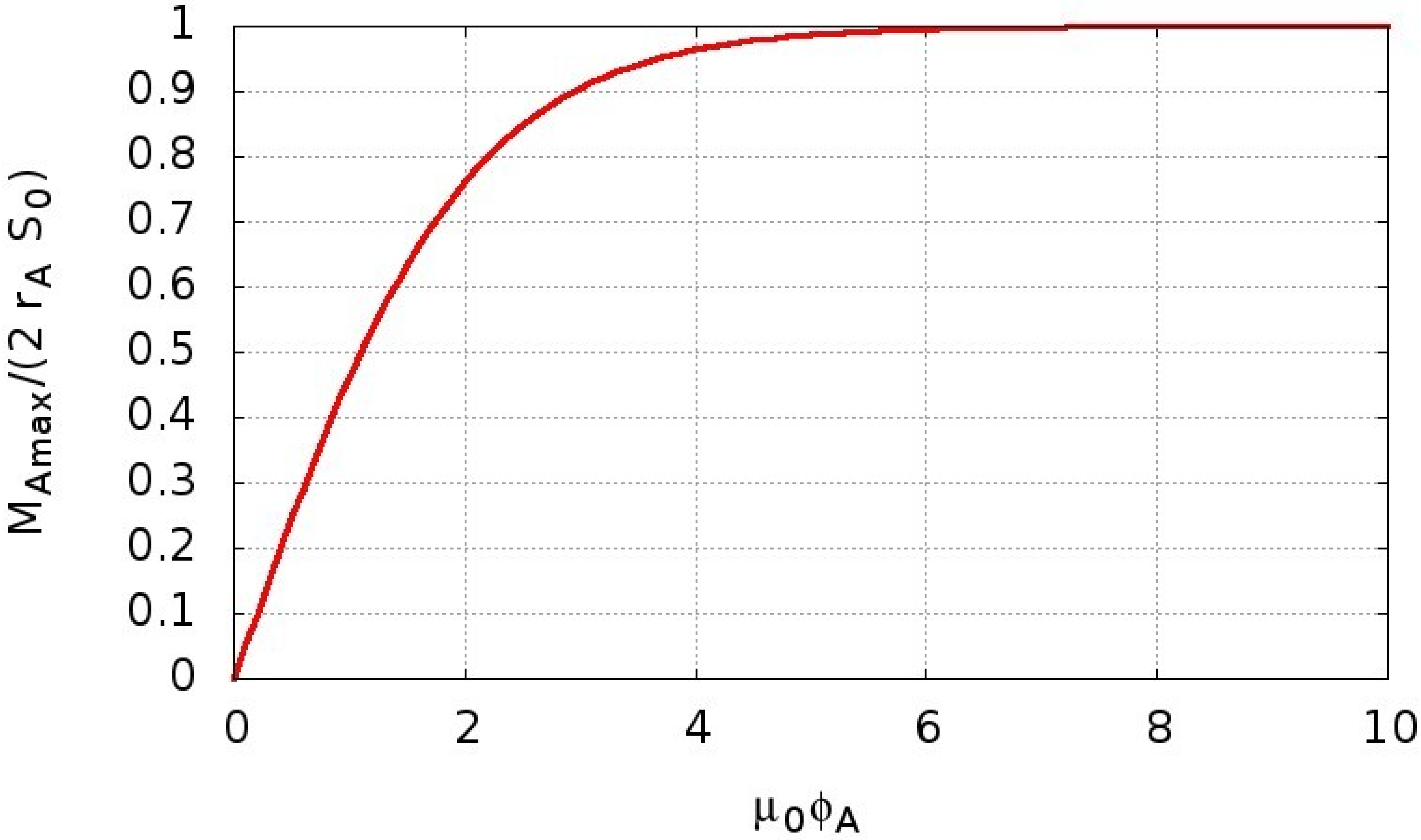
$$\left(1+e^{\mu_0 \phi_A}\right) \Delta S < \left(e^{\mu_0 \phi_A}-1\right) S_0 \quad \rightarrow \quad \Delta S < \frac{e^{\mu_0 \phi_A}-1}{e^{\mu_0 \phi_A}+1} S_0 = S_0 \tanh\left(\frac{\mu_0 \phi_A}{2}\right)$$

- Mit $S_1 - S_2 = 2\Delta S$ folgt für das Moment:

$$M_A = 2 r_A \Delta S < 2 r_A S_0 \tanh\left(\frac{\mu_0 \phi_A}{2}\right)$$

- Durch Verwendung eines Keilriemens lässt sich erreichen, dass der Wert des Hyperbeltangens nahezu eins wird.

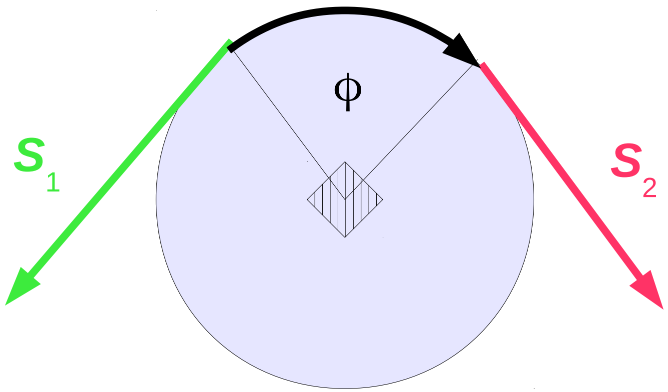
3.1 Haften



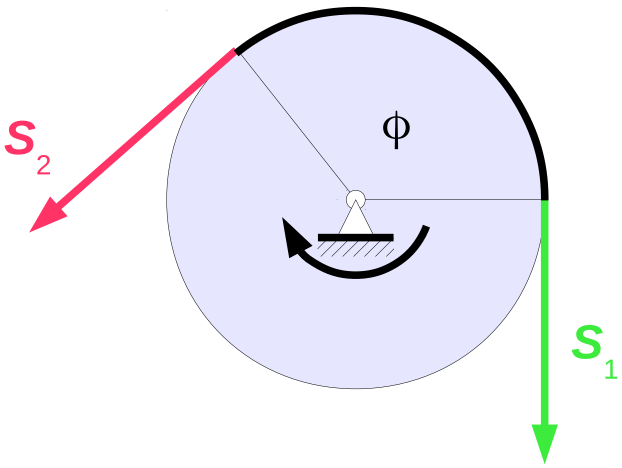
3.2 Gleiten

- Gleiten tritt auf, wenn
  - das Seil über die festgehaltene Rolle rutscht, oder
  - die Rolle sich gegen das festgehaltene Seil dreht.

Seil rutscht:



Rolle dreht sich:



3.2 Gleiten

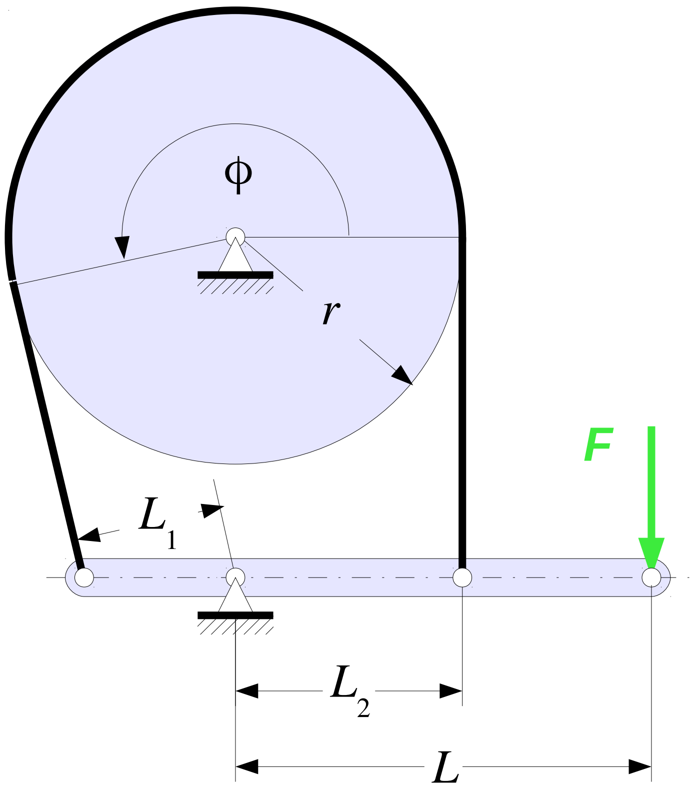
- Die Reibungskraft wirkt der Bewegung entgegen.
- Für die Seilkräfte gilt die Eytelweinsche Seilgleichung:

$$\boxed{S_2 = S_1 e^{\mu \phi}}$$

- Die größere Kraft S_2 tritt auf der Seite auf,
  - nach der das Seil gleitet, bzw.
  - an der sich die Rolle entgegen der Seilkraft bewegt.

3.2 Gleiten

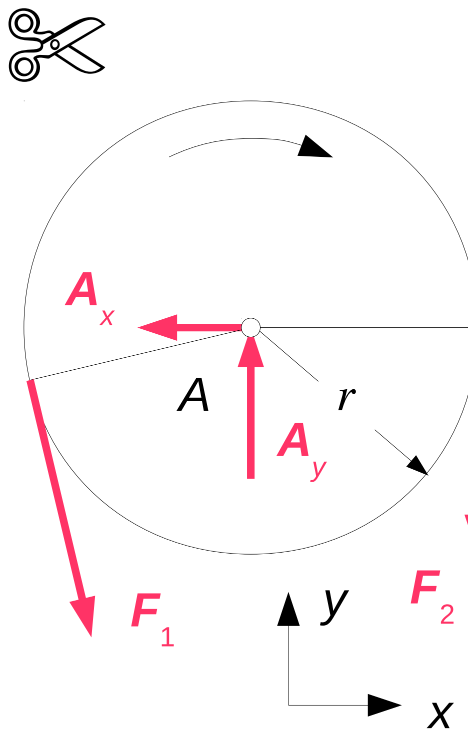
- Beispiel: Bandbremse



- Gegeben:
  - Kraft $F = 100\ \mathrm{N}$
  - Radius $r = 25\ \mathrm{cm}$, Längen $L = 1{,}2\ \mathrm{m}$, $L_1 = 10\ \mathrm{cm}$, $L_2 = 40\ \mathrm{cm}$
  - Winkel $\phi = 220°$
  - Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}3$
- Gesucht:
  - Bremsmoment bei Drehung im Uhrzeigersinn und gegen den Uhrzeigersinn

3.2 Gleiten

- Drehung im Uhrzeiger-sinn:



- Resultierendes Brems-moment:

$$M_A = \sum M^A = r(F_1 - F_2)$$

- Seilgleichung:

$$F_1 = F_2 e^{\mu\phi}$$

- Damit folgt für das Bremsmoment:

$$M_A = r F_2 (e^{\mu\phi} - 1)$$

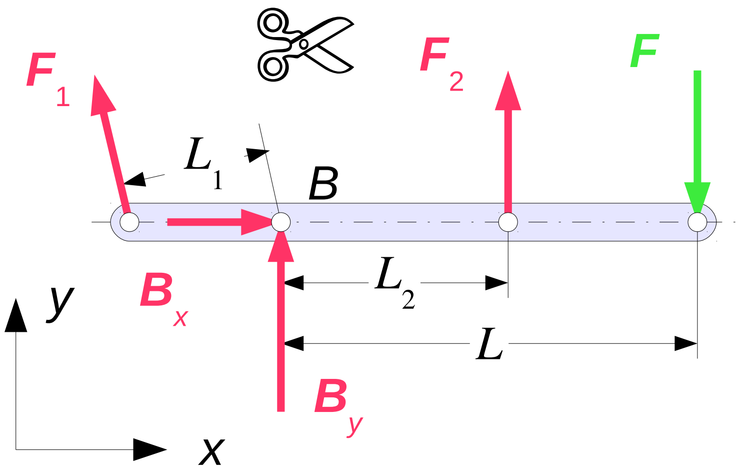
3.2 Gleiten

- Gleichgewicht am Hebel:

$$\sum M^B = 0 \ : \ L_2 F_2 - L_1 F_1 - L F = 0$$

$$\rightarrow \ F_2 \left(L_2 - L_1 e^{\mu \phi} \right) = L F$$

$$\rightarrow \ F_2 = \frac{L}{L_2 - L_1 e^{\mu \phi}} F$$

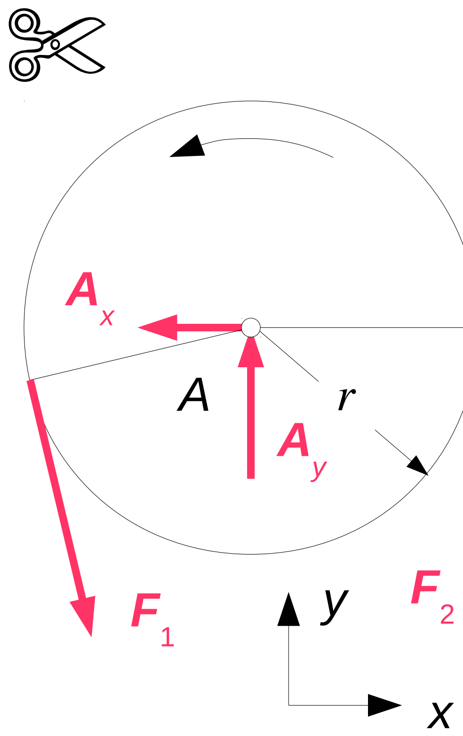


- Ergebnis:

$$M_{A1} = \frac{L \left(e^{\mu \phi} - 1 \right)}{L_2 - L_1 e^{\mu \phi}} r F$$

3.2 Gleiten

- Drehung gegen den Uhrzeigersinn:



- Resultierendes Bremsmoment:

$$M_A = \sum M^A = r\left(F_1 - F_2\right)$$

- Seilgleichung:

$$F_2 = F_1 e^{\mu\phi}$$

- Damit folgt für das Bremsmoment:

$$M_A = r F_1\left(1 - e^{\mu\phi}\right)$$

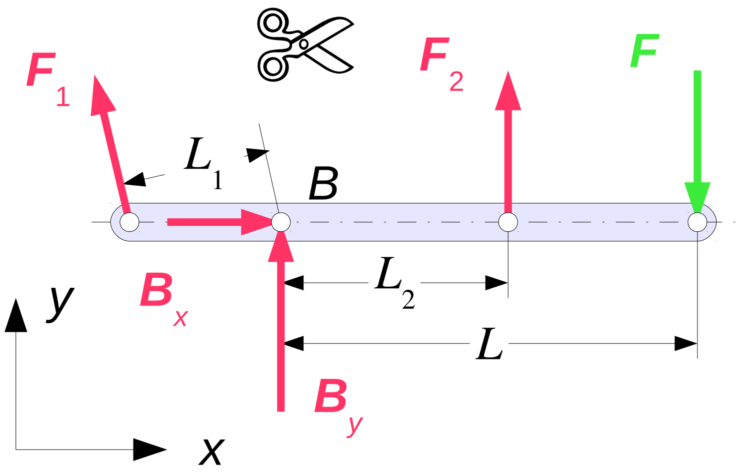
3.2 Gleiten

- Gleichgewicht am Hebel:

$$\sum M^B = 0 \quad : \quad L_2 F_2 - L_1 F_1 - L F = 0$$

$$\rightarrow \quad F_1 \left(L_2 e^{\mu \phi} - L_1 \right) = L F$$

$$\rightarrow \quad F_1 = \frac{L}{L_2 e^{\mu \phi} - L_1} F$$



- Ergebnis:

$$M_{A2} = \frac{L \left(1 - e^{\mu \phi} \right)}{L_2 e^{\mu \phi} - L_1} r F$$

3.2 Gleiten

- Zahlenwerte: $\phi = 220° = 220° \cdot \frac{\pi}{180°} = 3{,}840$

$$e^{\mu\phi} = e^{0{,}3 \cdot 3{,}84} = 3{,}164$$

  - Drehung im Uhrzeigersinn: $M_{A1} = 776{,}9\,\mathrm{Nm}$
  - Drehung gegen den Uhrzeigersinn: $M_{A2} = -55{,}70\,\mathrm{Nm}$