

3. Seilhaftung und Seilreibung



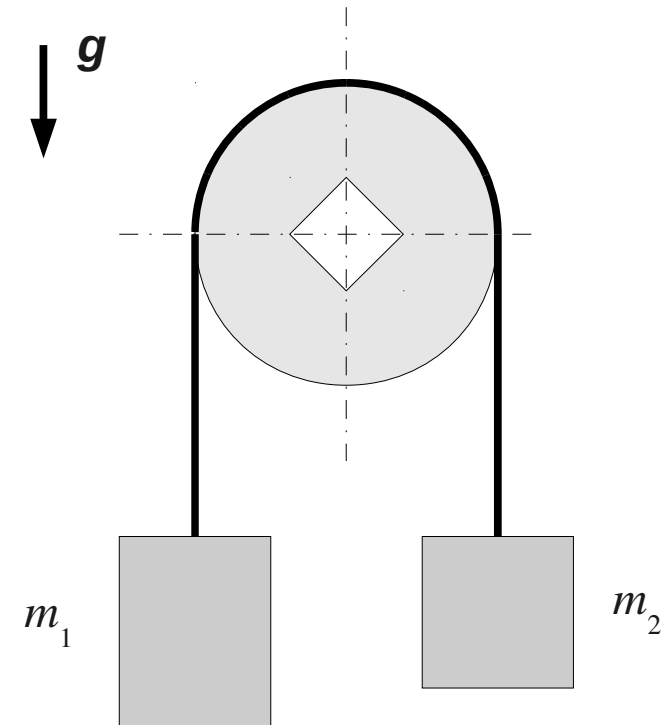
3. Seilhaftung und Seilreibung

3.1 Haften

3.2 Gleiten

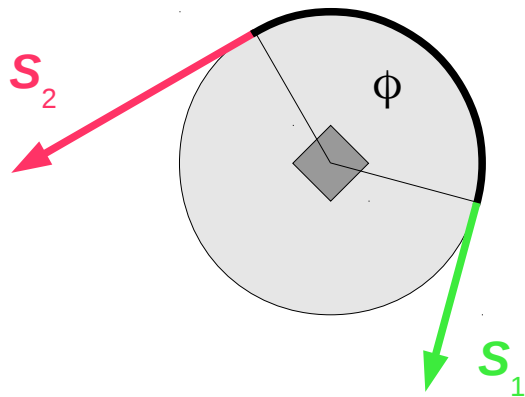
3.1 Haften

- Bei einer feststehenden Rolle gilt:
 - Wenn die Rolle glatt ist, müssen beide Massen gleich groß sein.
 - Wenn die Rolle rau ist, können die Massen in gewissen Grenzen unterschiedlich sein.



3.1 Haften

- Aufgabenstellung:

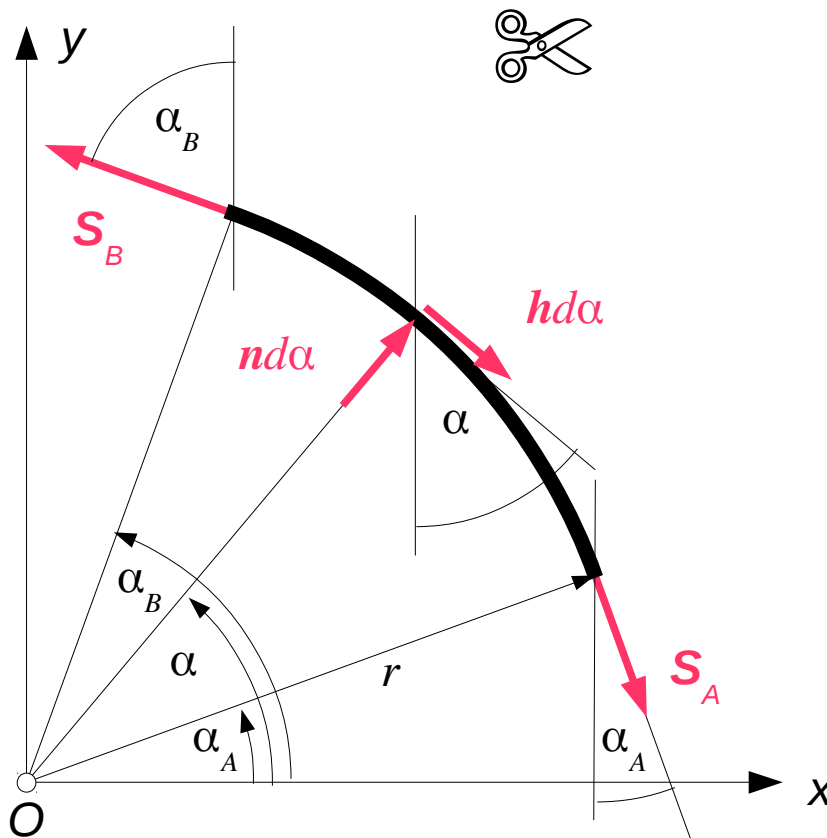


- Das Seil haftet auf der feststehenden Rolle.

- An einem Seilende greift die Kraft S_1 an.
- Wie groß darf die am anderen Seilende angreifende Kraft S_2 höchstens sein?
- Gegeben:
 - S_1, ϕ, μ_0
- Gesucht:
 - S_{2max}

3.1 Haften

- Gleichgewicht am Seilabschnitt:



$$\sum M^O = 0 : \\ r S_B - r S_A - \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} r h d \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \\ \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} n \sin(\alpha) d \alpha - \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} h \cos(\alpha) d \alpha \\ + S_B \cos(\alpha_B) - S_A \cos(\alpha_A) = 0$$

3.1 Haften

- Berechnung der Differenzen durch Integrale ergibt:

$$\sum M^O = 0 \rightarrow r \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \left(\frac{dS}{d\alpha} - h \right) d\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \left[n \sin(\alpha) - h \cos(\alpha) + \frac{d}{d\alpha} (S \cos(\alpha)) \right] d\alpha = 0$$

- Damit die Integrale für beliebige Intervalle null sind, muss gelten:

$$\frac{dS}{d\alpha} - h = 0 \rightarrow h = \frac{dS}{d\alpha}$$

$$n \sin(\alpha) - h \cos(\alpha) + \frac{dS}{d\alpha} \cos(\alpha) - S \sin(\alpha) = 0$$

3.1 Haften

- Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung ergibt:

$$(n - S) \sin(\alpha) = 0 \rightarrow n = S$$

- Die Haftbedingung lautet: $h < \mu_0 n$

- Daraus folgt: $\frac{dS}{d\alpha} < \mu_0 S \rightarrow \frac{1}{S} \frac{dS}{d\alpha} < \mu_0$

- Integration über das gesamte Seil ergibt:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{S} \frac{dS}{d\alpha} d\alpha = \int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} < \mu_0 (\alpha_2 - \alpha_1) \rightarrow \ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right) < \mu_0 (\alpha_2 - \alpha_1)$$

3.1 Haften

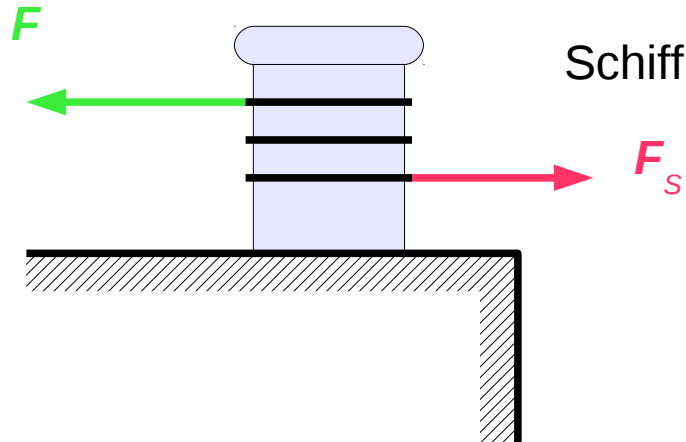
- Mit $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$ lautet die Haftbedingung für das Seil:

$$S_2 < S_1 e^{\mu_0 \phi}$$

- Diese Ungleichung wird als *Eytelweinsche Seilgleichung* bezeichnet.
- Bemerkungen:
 - Der Winkel ϕ muss im Bogenmaß eingegeben werden.
 - Die Kraft S_2 greift auf der Seite an, nach der sich das Seil bewegt, wenn die maximale Haftkraft überschritten wird.
 - Für $S_2 < S_{2max} = S_1 e^{\mu_0 \phi}$ bleibt das Seil in Ruhe.

3.1 Haften

- Beispiel: Seil um Poller



- Gegeben:
 - Kraft F
 - 2 Umschlingungen entsprechen 720°
 - Haftungskoeffizient $\mu_0 = 0,3$
- Gesucht:
 - Kraft F_s , mit der das Schiff maximal ziehen darf, damit die Kraft F nicht überschritten wird

3.1 Haften

- Bei Überschreiten der Kraft setzt sich das Seil in Richtung Schiff in Bewegung.

- Daher lautet die Haftbedingung: $F_S < F_{Smax} = F e^{\mu_0 \phi}$

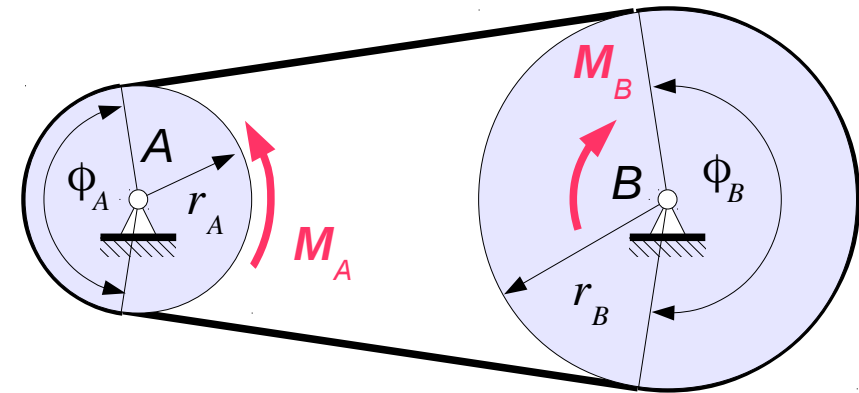
- Zahlenwert: $\phi = 720^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 4\pi$

$$F_{Smax} = F e^{0,3 \cdot 4\pi} = 43,38 F$$

- Bei 3 Umschlingungen ergibt sich: $F_{Smax} = 285,7 F$

3.1 Haften

- Beispiel: Riementrieb
 - Durch einen Riemen wird ein Moment von der Scheibe B auf die Scheibe A übertragen.
 - Gegeben:
 - Vorspannung S_0
 - Radius r_A und Umschlingungswinkel ϕ_A
 - Haftungskoeffizient μ_0

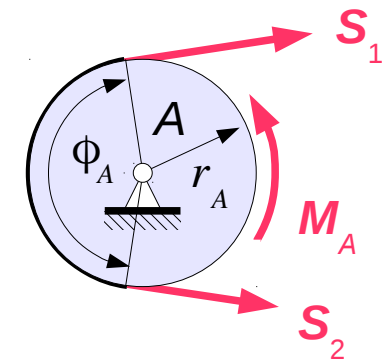


- Gesucht:
 - Maximales Moment M_A , bei dem der Riemen noch nicht rutscht

3.1 Haften

- Da der Haftungskoeffizient für beide Scheiben gleich ist, tritt wegen $\phi_A < \phi_B$ Gleiten zuerst bei Scheibe A auf.
- Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}\sum M^A = 0 & : M_A - r_A(S_1 - S_2) = 0 \\ \rightarrow M_A & = r_A(S_1 - S_2)\end{aligned}$$



- Haftbedingung: $S_1 < S_2 e^{\mu_0 \phi_A}$
- Vorspannung:

- Es gilt: $S_1 = \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_1 - S_2}{2}, \quad S_2 = \frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{S_1 - S_2}{2}$

3.1 Haften

- Mit $S_0 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$, $\Delta S = \frac{1}{2}(S_1 - S_2)$

folgt: $S_1 = S_0 + \Delta S$, $S_2 = S_0 - \Delta S$

- Die Kraft S_0 ist gleich der Kraft, die im Riemen auftritt, wenn kein Moment übertragen wird. Sie entspricht der Vorspannung.
- Einsetzen in die Haftbedingung ergibt:

$$S_0 + \Delta S < (S_0 - \Delta S) e^{\mu_0 \phi_A}$$

3.1 Haften

- Daraus kann ΔS bestimmt werden:

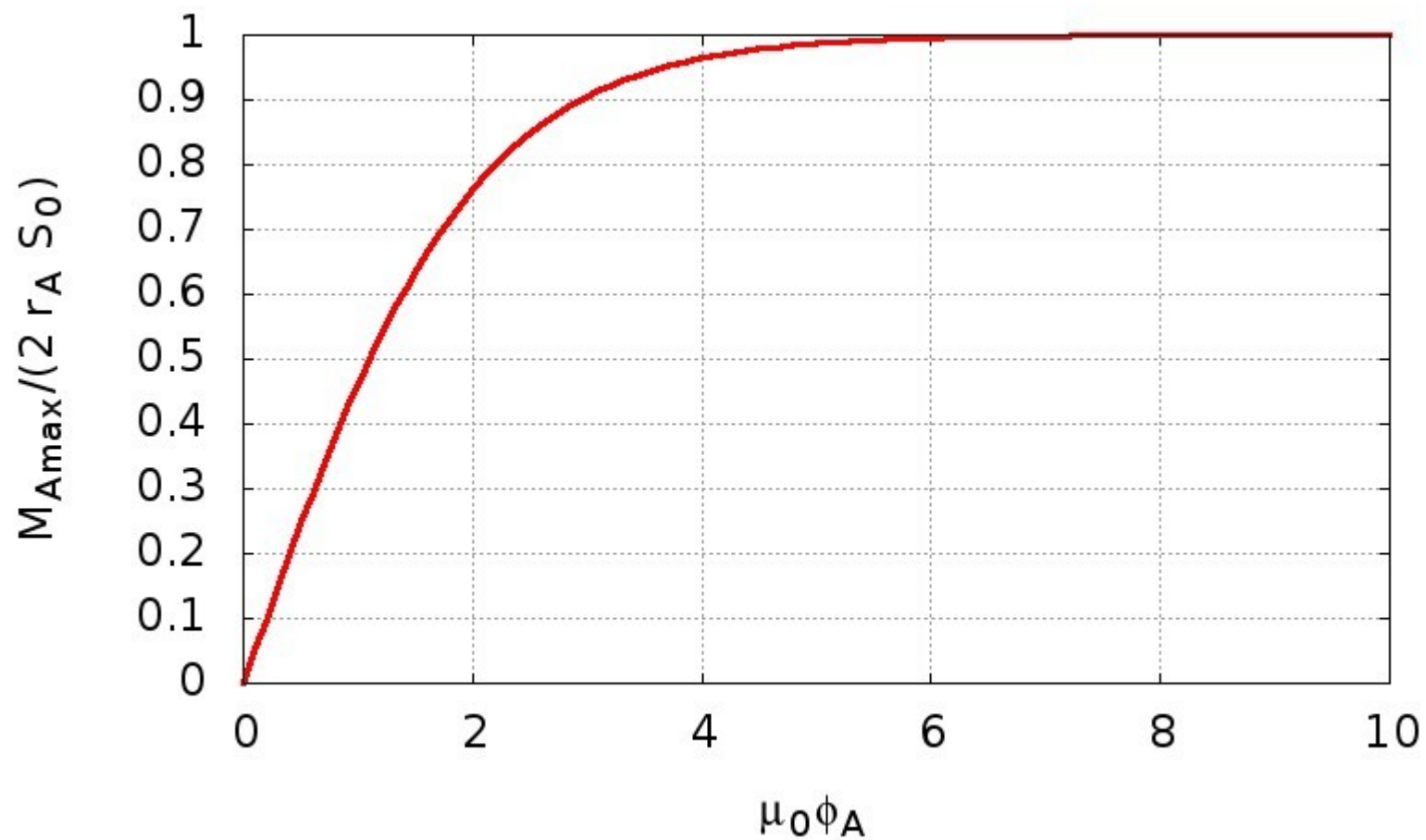
$$(1 + e^{\mu_0 \phi_A}) \Delta S < (e^{\mu_0 \phi_A} - 1) S_0 \rightarrow \Delta S < \frac{e^{\mu_0 \phi_A} - 1}{e^{\mu_0 \phi_A} + 1} S_0 = S_0 \tanh\left(\frac{\mu_0 \phi_A}{2}\right)$$

- Mit $S_1 - S_2 = 2 \Delta S$ folgt für das Moment:

$$M_A = 2 r_A \Delta S < 2 r_A S_0 \tanh\left(\frac{\mu_0 \phi_A}{2}\right)$$

- Durch Verwendung eines Keilriemens lässt sich erreichen, dass der Wert des Hyperbeltangens nahezu eins wird.

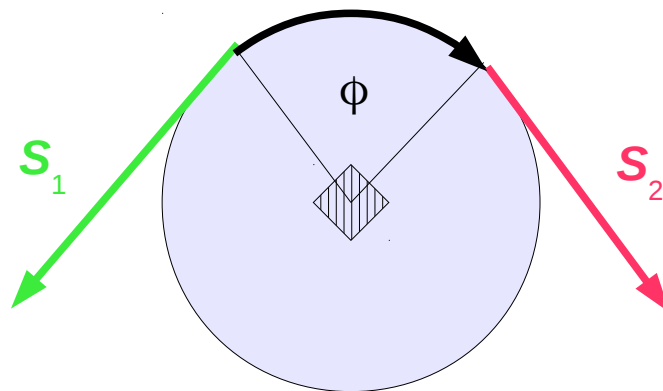
3.1 Haften



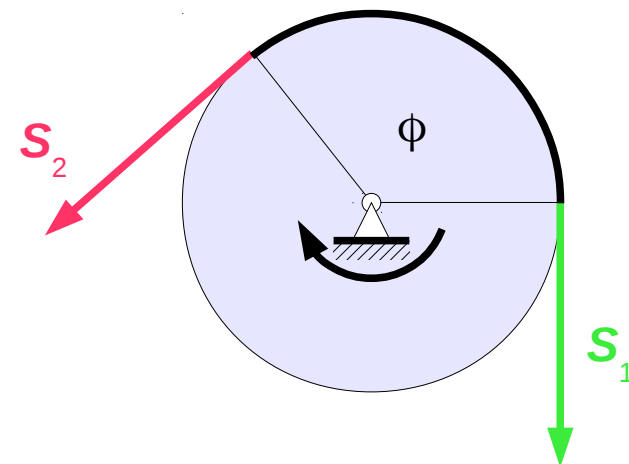
3.2 Gleiten

- Gleiten tritt auf, wenn
 - das Seil über die festgehaltene Rolle rutscht, oder
 - die Rolle sich gegen das festgehaltene Seil dreht.

Seil rutscht:



Rolle dreht sich:



3.2 Gleiten

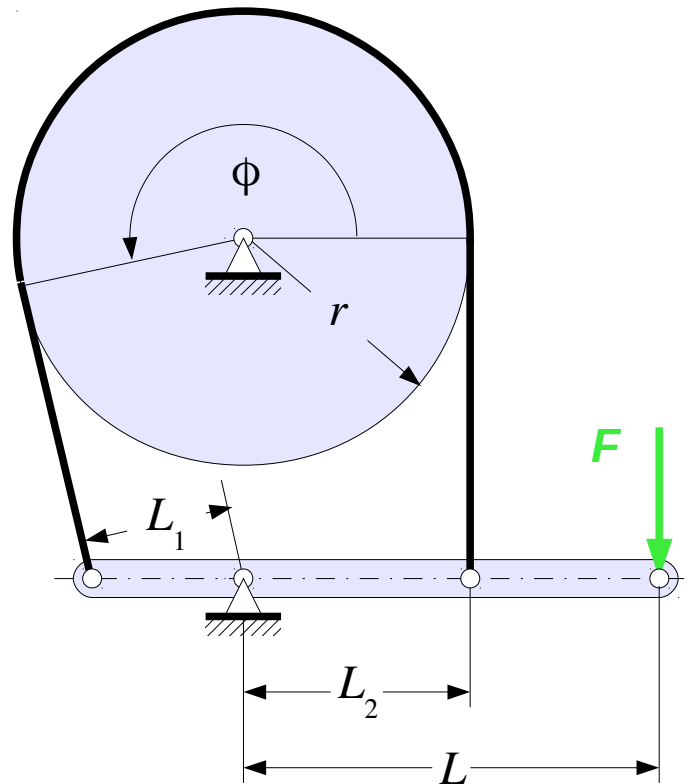
- Die Reibungskraft wirkt der Bewegung entgegen.
- Für die Seilkräfte gilt die Eytelweinsche Seilgleichung:

$$S_2 = S_1 e^{\mu\phi}$$

- Die größere Kraft S_2 tritt auf der Seite auf,
 - nach der das Seil gleitet, bzw.
 - an der sich die Rolle entgegen der Seilkraft bewegt.

3.2 Gleiten

- Beispiel: Bandbremse



- Gegeben:

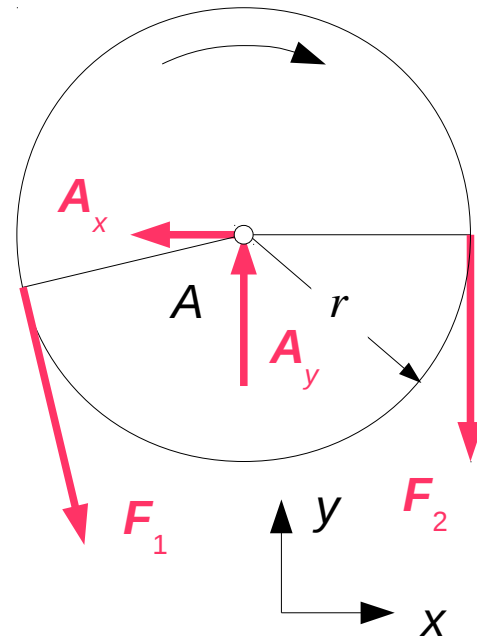
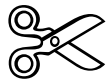
- Kraft $F = 100 \text{ N}$
- Radius $r = 25 \text{ cm}$, Längen $L = 1,2 \text{ m}$, $L_1 = 10 \text{ cm}$, $L_2 = 40 \text{ cm}$
- Winkel $\phi = 220^\circ$
- Reibungskoeffizient $\mu = 0,3$

- Gesucht:

- Bremsmoment bei Drehung im Uhrzeigersinn und gegen den Uhrzeigersinn

3.2 Gleiten

- Drehung im Uhrzeigersinn:



- Resultierendes Bremsmoment:

$$M_A = \sum M^A = r(F_1 - F_2)$$

- Seilgleichung:

$$F_1 = F_2 e^{\mu\phi}$$

- Damit folgt für das Bremsmoment:

$$M_A = r F_2 (e^{\mu\phi} - 1)$$

3.2 Gleiten

- Gleichgewicht am Hebel:

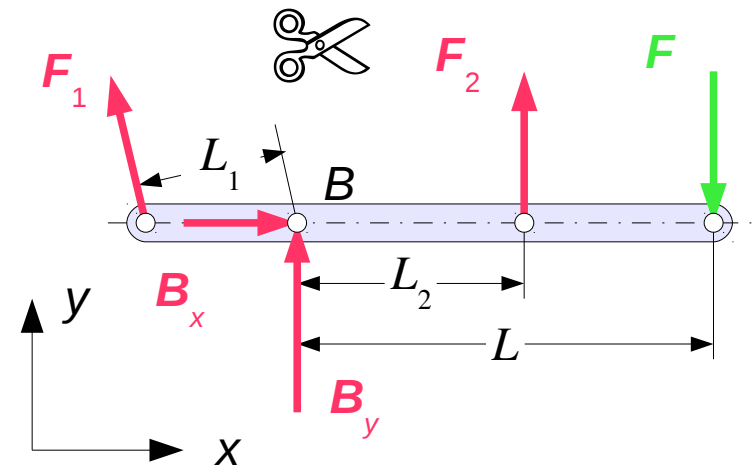
$$\sum M^B = 0 : L_2 F_2 - L_1 F_1 - L F = 0$$

$$\rightarrow F_2 (L_2 - L_1 e^{\mu\phi}) = L F$$

$$\rightarrow F_2 = \frac{L}{L_2 - L_1 e^{\mu\phi}} F$$

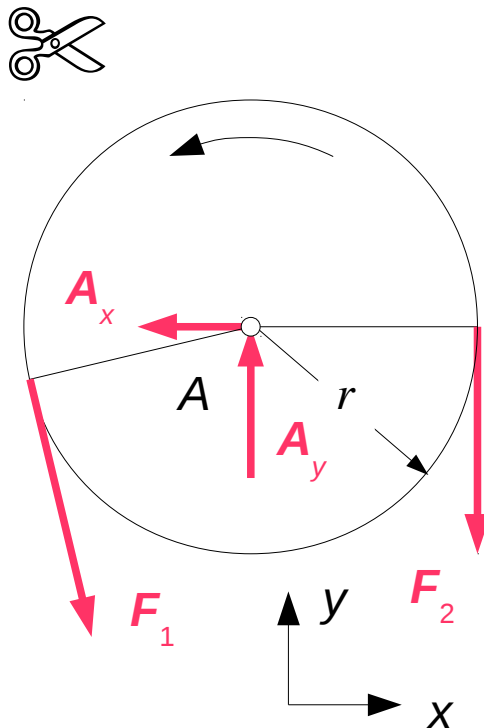
- Ergebnis:

$$M_{A1} = \frac{L(e^{\mu\phi} - 1)}{L_2 - L_1 e^{\mu\phi}} r F$$



3.2 Gleiten

- Drehung gegen den Uhrzeigersinn:



- Resultierendes Bremsmoment:

$$M_A = \sum M^A = r(F_1 - F_2)$$

- Seilgleichung:

$$F_2 = F_1 e^{\mu\phi}$$

- Damit folgt für das Bremsmoment:

$$M_A = r F_1 (1 - e^{\mu\phi})$$

3.2 Gleiten

- Gleichgewicht am Hebel:

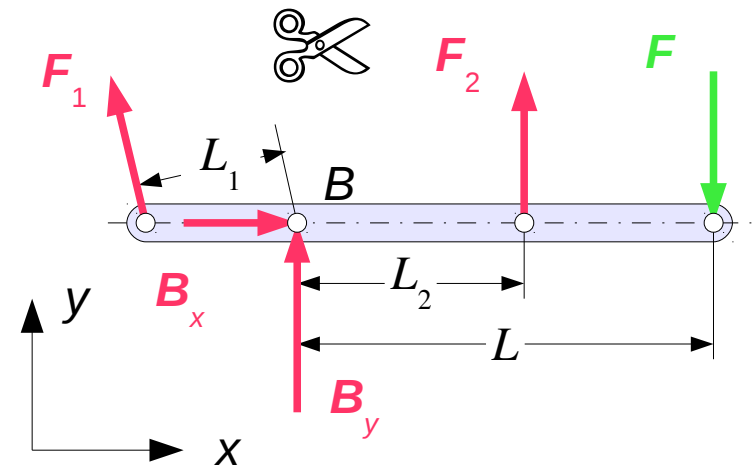
$$\sum M^B = 0 : L_2 F_2 - L_1 F_1 - L F = 0$$

$$\rightarrow F_1 (L_2 e^{\mu\phi} - L_1) = L F$$

$$\rightarrow F_1 = \frac{L}{L_2 e^{\mu\phi} - L_1} F$$

- Ergebnis:

$$M_{A2} = \frac{L(1 - e^{\mu\phi})}{L_2 e^{\mu\phi} - L_1} r F$$



3.2 Gleiten

- Zahlenwerte: $\phi = 220^\circ = 220^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 3,840$

$$e^{\mu\phi} = e^{0,3 \cdot 3,84} = 3,164$$

- Drehung im Uhrzeigersinn: $M_{A1} = 776,9 \text{ Nm}$
- Drehung gegen den Uhrzeigersinn: $M_{A2} = -55,70 \text{ Nm}$