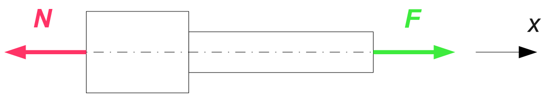
1.1 Zug und Druck

Lösungen

Aufgabe 1

Kräftegleichgewicht an einem beliebigen Schnitt:



$$\sum F_x = 0 \; : \; F - N = 0 \; \rightarrow \; N = F$$

Spannungen:

$$\sigma_{A-B} = \frac{N}{A_{A-B}} , \quad \sigma_{C-D} = \frac{N}{A_{C-D}}$$

Zahlenwerte:

$$N = F = 50 \cdot 10^3 \,\mathrm{N}$$

$$A_{A-B} = 40^2 \,\mathrm{mm}^2 - 20^2 \,\mathrm{mm}^2 = 1200 \,\mathrm{mm}^2$$

$$A_{C-D} = 30^2 \,\mathrm{mm}^2 - 20^2 \,\mathrm{mm}^2 = 500 \,\mathrm{mm}^2$$

$$\sigma_{A-B} = \frac{50 \cdot 10^3 \,\mathrm{N}}{1200 \,\mathrm{mm}^2} = \underline{41{,}67 \,\mathrm{MPa}} \;, \quad \sigma_{C-D} = \frac{50 \cdot 10^3 \,\mathrm{N}}{500 \,\mathrm{mm}^2} = \underline{100 \,\mathrm{MPa}}$$

Aufgabe 2

Für die maximale Kraft F gilt:

$$F \le A_{min} \sigma_{zul}$$

Der kleinere Querschnitt ist der Querschnitt *C-D*. Damit gilt:

$$F \le 500 \,\mathrm{mm}^2 \cdot 150 \,\mathrm{N/mm}^2 = 75000 \,\mathrm{N} = \underline{75 \,\mathrm{kN}}$$

Aufgabe 3

Für die erforderliche Querschnittsfläche gilt:

$$A_{erf} \ge \frac{N}{\sigma_{zul}}$$

Für den gegebenen Querschnitt berechnet sich die Fläche zu

$$A = \frac{1}{4} \pi \left(D_a^2 - D_i^2 \right) \ge A_{erf} \;.$$

Auflösen nach dem gesuchten Innendurchmesser D_i ergibt

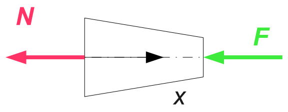
$$D_a^2 - D_i^2 \geq \frac{4}{\pi} A_{erf} \rightarrow D_i \leq \sqrt{D_a^2 - \frac{4}{\pi} \frac{N}{\sigma_{zul}}}$$

Zahlenwert:

$$D_i \leq \sqrt{50^2 \,\mathrm{mm}^2 - \frac{4}{\pi} \frac{20 \cdot 10^3 \,\mathrm{N}}{200 \,\mathrm{N/mm}^2}} = \underline{48{,}71 \,\mathrm{mm}}$$

Aufgabe 4

Kräftegleichgewicht an einem beliebigen Schnitt:



$$\sum F_x = 0 \;:\; -F - N = 0 \rightarrow N = -F$$

Für den Querschnitt gilt

$$A(x) = b\, h(x)$$

mit

$$h(x) = h_0 - \frac{h_0 - h_L}{L} x \,.$$

Daraus folgt für die Normalspannung:

$$\sigma(x) = \frac{N}{A(x)} = \frac{-F}{b\left(h_0 - \frac{h_0 - h_L}{L} x\right)} = \frac{-F}{b\, h_0} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{h_L}{h_0}\right) \frac{x}{L}}$$

Mit

$$\sigma_0 = \frac{-F}{b\, h_0}$$

folgt

$$\sigma(x) = \frac{\sigma_0}{1 - \left(1 - \frac{h_L}{h_0}\right) \frac{x}{L}} \,.$$

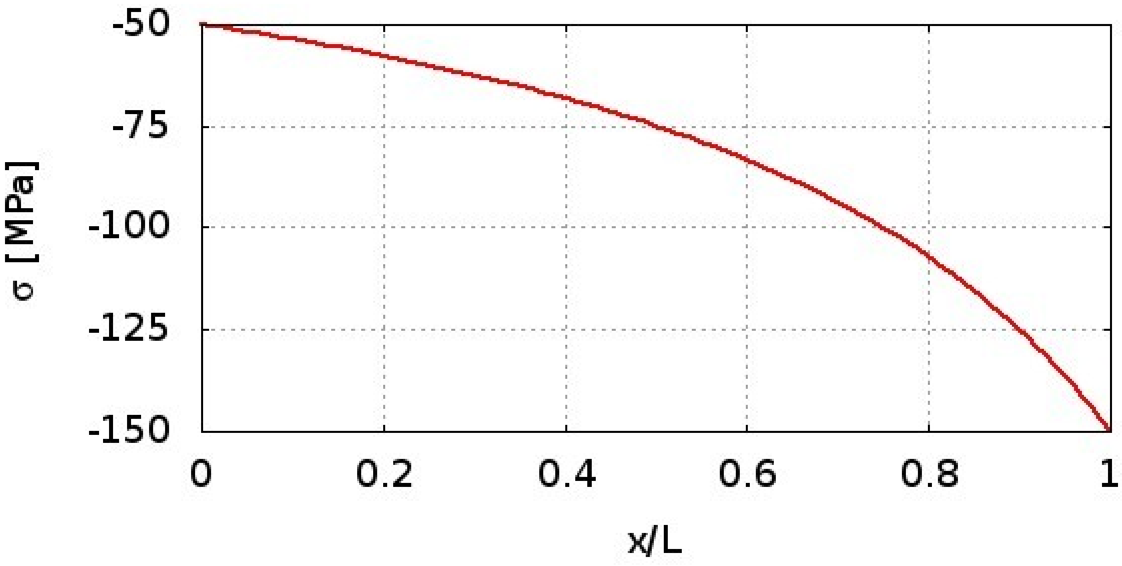
An den beiden Enden gilt: $\sigma(0) = \sigma_0 , \quad \sigma(L) = \frac{\sigma_0}{1 - 1 + h_L / h_0} = \sigma_0 \frac{h_0}{h_L}$

Zahlenwerte:

$$\sigma(0) = \sigma_0 = \frac{-30 \cdot 10^3 \,\mathrm{N}}{20 \,\mathrm{mm} \cdot 30 \,\mathrm{mm}} = \underline{-50 \,\mathrm{MPa}}$$

$$\sigma_L = \sigma(L) = \sigma_0 \frac{30 \,\mathrm{mm}}{10 \,\mathrm{mm}} = \underline{-150 \,\mathrm{MPa}}$$

Verlauf:



Aufgabe 5

Für die Reißlänge gilt: $L_R = \frac{R_m}{\rho\, g}$

Zahlenwert für Stahl: $L_R = \frac{550 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m^2}}{7{,}85 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 7142\,\mathrm{m}$

Zahlenwert für Aluminium: $L_R = \frac{270 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m^2}}{2{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 9830\,\mathrm{m}$

Aufgabe 6

a) <u>Verlauf der Normalspannung</u>

Bei konstanter Querschnittsfläche gilt: $A \frac{d\sigma}{dx} = -n(x)$

Mit $n(x) = \omega^2 \rho A x$ folgt: $\frac{d\sigma}{dx} = -\omega^2 \rho x$

Integration ergibt: $\sigma(x) = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho x^2 + c$

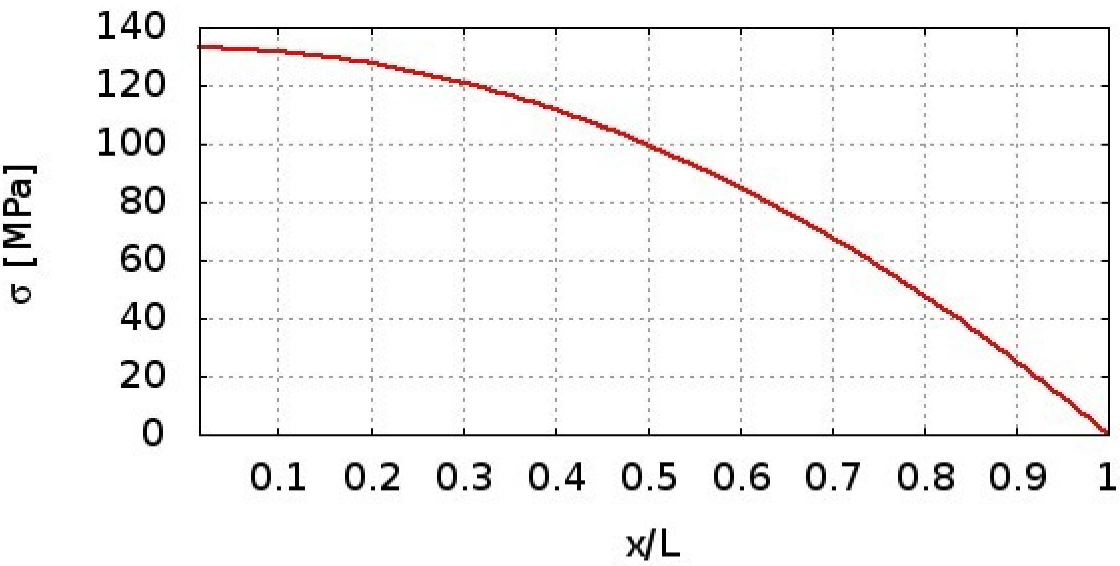
Am freien Ende ($x = L$) ist die Normalspannung null:

$$\sigma(L) = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho L^2 + c = 0 \;\rightarrow\; c = \frac{1}{2}\omega^2 \rho L^2$$

Damit gilt für die Normalspannung:

$$\sigma(x)=\frac{1}{2}\omega^2\rho L^2\left(1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

Graphische Darstellung:



b) Spannung an der Einspannung

$$\sigma_B=\sigma(b)=\frac{1}{2}\omega^2\rho L^2\left(1-\left(\frac{b}{L}\right)^2\right)$$

Zahlenwert:

$$\frac{1}{2}\omega^2\rho L^2=\frac{1}{2}\cdot 35^2\,\mathrm{s}^{-2}\cdot 4{,}43\cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mm}^3}\cdot 7000^2\,\mathrm{mm}^2=133{,}0\cdot 10^3\frac{\mathrm{kg\,mm}}{\mathrm{s}^2\,\mathrm{mm}^2}$$

$$=133{,}0\cdot 10^3\frac{\mathrm{kg}\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{s^2\,\mathrm{mm}^2}=133{,}0\,\mathrm{MPa}$$

$$\left(\frac{b}{L}\right)^2=\left(\frac{100\,\mathrm{mm}}{7000\,\mathrm{mm}}\right)^2=\frac{1}{70^2}\ ,\quad 1-\left(\frac{b}{L}\right)^2=1-\frac{1}{70^2}=0{,}9998$$

→ $\sigma_B=\underline{133\,\mathrm{MPa}}$

Aufgabe 7

a) Dehnung

Bei konstanter Dehnung gilt: $\epsilon=\dfrac{\Delta L}{L_0}$

Zahlenwert: $\epsilon=\dfrac{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{m}}=4\cdot 10^{-3}=\underline{0{,}4\,\%}$

b) Längenänderung

Bei konstanter Dehnung gilt für die Längenänderung: $\Delta L=\epsilon L_0$

Zahlenwert: $\Delta L=0{,}1\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}=5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}=\underline{0{,}5\,\mathrm{mm}}$

Aufgabe 8

Bei veränderlicher Dehnung gilt: $\Delta L=\int_0^{L_0}\epsilon(x)\,dx$

Für den gegebenen Dehnungsverlauf berechnet sich die Längenänderung zu

$$\Delta L=\int_0^{L_0}\epsilon_0\frac{x}{L_0}\,dx=\frac{\epsilon_0}{L_0}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=L_0}=\frac{\epsilon_0}{L_0}\frac{L_0^2}{2}=\frac{1}{2}\epsilon_0 L_0$$

Zahlenwert:

$$\Delta L=\frac{1}{2}\cdot 0{,}003\cdot 1{,}5\,\mathrm{m}=2{,}25\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}=\underline{2{,}25\,\mathrm{mm}}$$

Aufgabe 9

a) Längenänderung

Für die Längenänderung gilt: $\Delta L=u(L_0)-u(0)$

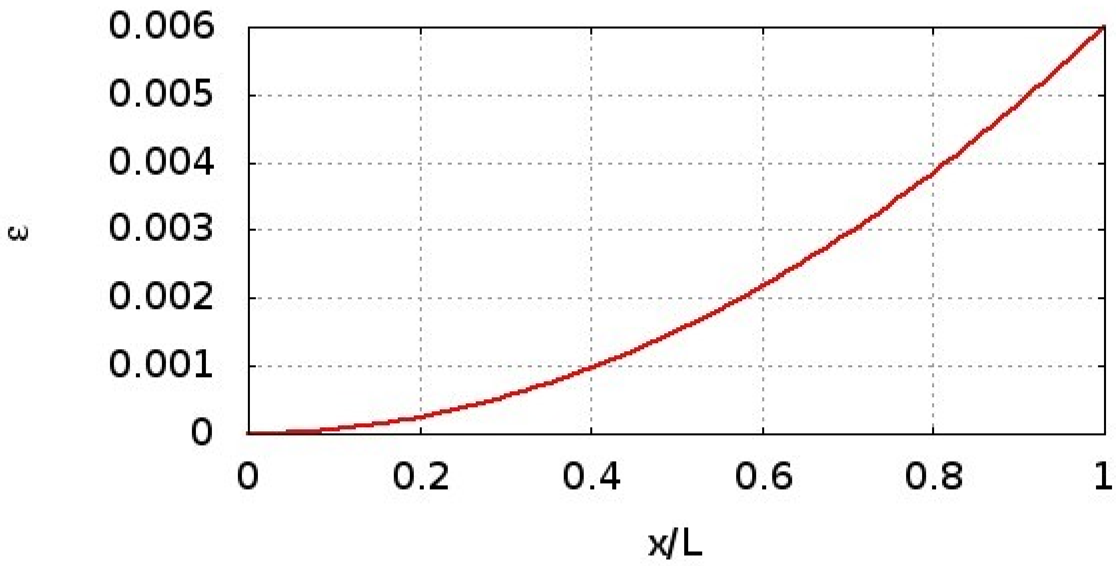
Für die gegebene Verschiebung folgt: $\Delta L=u_0$

Zahlenwert: $\Delta L=2\,\mathrm{mm}$

b) Dehnungsverlauf

Für die Dehnung gilt: $\epsilon(x)=\dfrac{du}{dx}(x)$

Für die gegebene Verschiebung folgt: $\epsilon(x)=3u_0\frac{x^2}{L_0^3}=3\frac{u_0}{L_0}\left(\frac{x}{L_0}\right)^2$



c) <u>Dehnungen an den gegebenen Stellen</u>

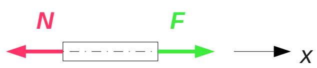
$$3\frac{u_0}{L_0}=\frac{3\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}=6\cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon(0{,}5)=6\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}5^2=1{,}5\cdot 10^{-3}=\underline{0{,}15\,\%}$$

$$\epsilon(1)=6\cdot 10^{-3}=\underline{0{,}6\,\%}$$

Aufgabe 10

Kräftegleichgewicht an einem beliebigen Schnitt:



$$\sum F_x=0\ :\ -N+F=0\ \rightarrow\ N=F$$

Spannung:

$$\sigma=\frac{N}{A}$$

Dehnung:

$$\epsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{N}{EA}$$

Die Normalkraft und damit auch die Dehnung sind konstant. Daher gilt für die Längenänderung:

$$\Delta L=\epsilon L_0=\frac{F L_0}{E A}$$

Zahlenwert:

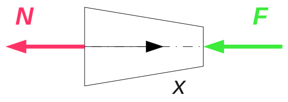
$$\Delta L=\frac{10\cdot 10^3 N\cdot 2\,\mathrm{m}}{210000\,\mathrm{N/mm^2}\cdot 5\cdot 10^2\,\mathrm{mm^2}}=1{,}905\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}=\underline{0{,}1905\,\mathrm{mm}}$$

Aufgabe 11

a) Dehnungsverlauf

Kräftegleichgewicht an einem beliebigen Schnitt:

$$\sum F_x=0\ :\ -F-N=0\ \rightarrow\ N=-F$$



Für den Querschnitt gilt

$$A(x)=b\,h(x)$$

mit

$$h(x)=h_0-\frac{h_0-h_L}{L}x\ .$$

Daraus folgt für die Normalspannung

$$\sigma(x)=\frac{N}{A(x)}=\frac{-F}{b\left(h_0-\frac{h_0-h_L}{L}x\right)}=\frac{-F}{b\,h_0}\frac{1}{1-\left(1-\frac{h_L}{h_0}\right)\frac{x}{L}}=\frac{\sigma_0}{1-\left(1-\frac{h_L}{h_0}\right)\frac{x}{L}}$$

mit $\sigma_0=\frac{-F}{b\,h_0}$.

Für die Dehnung gilt

$$\epsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{\sigma_0/E}{1-\left(1-\frac{h_L}{h_0}\right)\frac{x}{L}}=\frac{\epsilon_0}{1-\left(1-\frac{h_L}{h_0}\right)\frac{x}{L}}$$

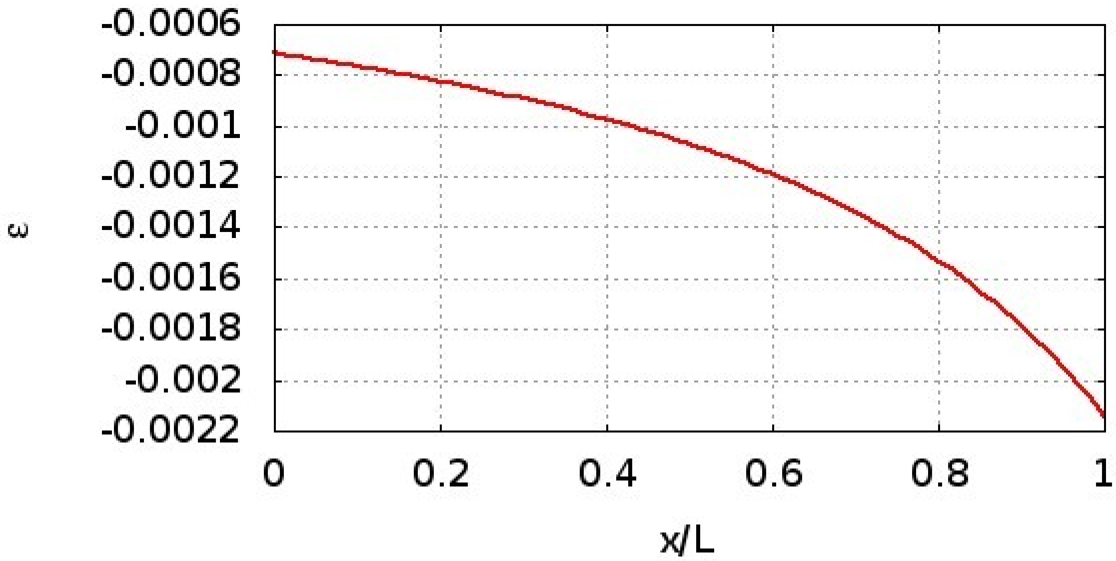
mit $\epsilon_0=\frac{\sigma_0}{E}$.

Zahlenwerte:

$$\sigma_0=\frac{-30\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{20\,\mathrm{mm}\cdot 30\,\mathrm{mm}}=-50\,\mathrm{MPa}\ ,\ \epsilon_0=\frac{-50\,\mathrm{MPa}}{70000\,\mathrm{MPa}}=-7{,}143\cdot 10^{-4}$$

$$\frac{h_L}{h_0}=\frac{0{,}1}{0{,}3}=0{,}3333$$

Graphische Darstellung:



b) <u>Längenänderung</u>

Bei veränderlicher Dehnung berechnet sich die Längenänderung durch Integration der Dehnung:

$$\Delta L=\int_0^L \epsilon(x)\,dx=\int_0^L \frac{\epsilon_0}{1-\left(1-\frac{h_L}{h_0}\right)\frac{x}{L}}\,dx=\epsilon_0\left[\frac{-1}{\left(1-\frac{h_L}{h_0}\right)\frac{1}{L}}\ln\left|1-\left(1-\frac{h_L}{h_0}\right)\frac{x}{L}\right|\right]_{x=0}^{x=L}$$

$$=\frac{-\epsilon_0 L}{1-h_L/h_0}\left(\ln\left(1-1+\frac{h_L}{h_0}\right)-\ln(1)\right)=\frac{\epsilon_0 L}{1-h_L/h_0}\ln\left(\frac{h_0}{h_L}\right)$$

Zahlenwert: $\Delta L=\frac{-7{,}143\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}{1-1/3}\ln(3)=-5{,}886\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}=\underline{-0{,}5886\,\mathrm{mm}}$

Aufgabe 12

a) <u>Dehnungsverlauf</u>

Die Normalkraft ist konstant: $N=F$

Der Radius des Querschnitts nimmt linear von $2r_0$ an der Stelle $x = 0$ auf r_0 an der Stelle $x = L$ ab:

$$r(x)=2r_0-\frac{r_0}{L}x=r_0\left(2-\frac{x}{L}\right)$$

Für den Querschnitt folgt

$$A(x)=\pi r^2(x)=\pi r_0^2\left(2-\frac{x}{L}\right)^2=A_0\left(2-\frac{x}{L}\right)^2 \text{ mit } A_0=\pi r_0^2 .$$

Damit gilt für die Spannung

$$\sigma(x)=\frac{N}{A(x)}=\frac{N}{A_0}\frac{1}{(2-x/L)^2}=\frac{\sigma_0}{(2-x/L)^2} \text{ mit } \sigma_0=\frac{N}{A_0}$$

und für die Dehnung

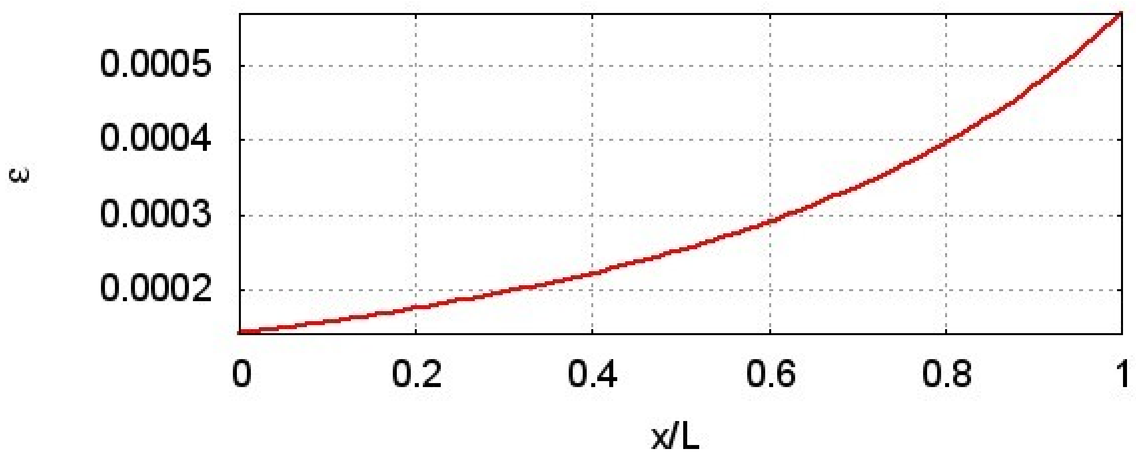
$$\epsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{\sigma_0/E}{(2-x/L)^2}=\frac{\epsilon_0}{(2-x/L)^2} \text{ mit } \epsilon_0=\frac{\sigma_0}{E} .$$

Zahlenwerte:

$$A_0=\pi\cdot 20^2\,\text{mm}^2=1257\,\text{mm}^2$$

$$\sigma_0=\frac{150\cdot 10^3\,\text{N}}{1257\,\text{mm}^2}=119{,}4\,\text{MPa} ,\ \epsilon_0=\frac{119{,}4\,\text{MPa}}{210000\,\text{MPa}}=5{,}684\cdot 10^{-4}$$

Graphische Darstellung:



b) <u>Längenänderung</u>

Die Längenänderung berechnet sich durch Integration der Dehnung:

$$\Delta L=\int_0^L \epsilon(x)dx=\int_0^L \frac{\epsilon_0}{(2-x/L)^2}dx=\epsilon_0 L\int_0^1 \frac{d(x/L)}{(2-x/L)^2}=\epsilon_0 L\left[\frac{1}{2-x/L}\right]_{x/L=0}^{x/L=1}$$

$$=\epsilon_0 L\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\epsilon_0 L$$

Zahlenwert: $\Delta L=\frac{1}{2}\cdot 5{,}684\cdot 10^{-4}\cdot 2\,\mathrm{m}=5{,}684\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}=\underline{0{,}5684\,\mathrm{mm}}$

Aufgabe 13

a) Verlauf der Spannung

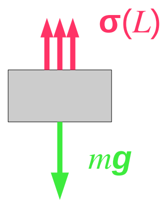
Für die Streckenlast gilt: $n(x)=\rho g A$

Damit gilt für die Spannung: $A\frac{d\sigma}{dx}=-\rho g A \rightarrow \frac{d\sigma}{dx}=-\rho g$

Integration ergibt: $\sigma(x)=-\rho g x+c$

Am unteren Ende muss gelten: $\sigma(L)A=m g$

Daraus folgt für die Integrationskonstante:



$$(-\rho g L+c)A=m g \rightarrow c=\frac{m g}{A}+\rho g L$$

Damit gilt für den Verlauf der Spannung:

$$\sigma(x)=\rho g(L-x)+\frac{m g}{A}=\rho g L\left(1-\frac{x}{L}\right)+\frac{m g}{A}$$

b) Verlängerung des Stabs

Aus der Spannung folgt für die Dehnung:

$$\epsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{\rho g L}{E}\left(1-\frac{x}{L}\right)+\frac{m g}{E A}$$

Daraus berechnet sich die Verlängerung zu

$$\Delta L=\int_0^L \epsilon(x)\,dx=\frac{\rho g L}{E}\int_0^L\left(1-\frac{x}{L}\right)dx+\frac{m g L}{E A}$$

$$=\frac{\rho g L}{E}\left[x-\frac{x^2}{2L}\right]_{x=0}^{x=L}+\frac{m g L}{E A}=\frac{L}{E A}\left(\frac{1}{2}\rho g L A+m g\right)$$

Zahlenwert:

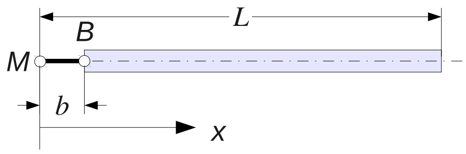
$$\frac{1}{2}\rho g L A+m g=\left(\frac{1}{2}\cdot 7850\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 5\,\mathrm{m}\cdot 12\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2+100\,\mathrm{kg}\right)\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=1212\,\mathrm{N}$$

$$\Delta L=\frac{1212\,\mathrm{N}\cdot 5\,\mathrm{m}}{2{,}1\cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m}^2\cdot 12\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}=2{,}405\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}=\underline{0{,}02405\,\mathrm{mm}}$$

Aufgabe 14

a) <u>Spannung</u>

Wird als Ursprung der *x*-Achse der Drehpunkt *M* gewählt, dann gilt für die Streckenlast infolge der Fliehkraft:



$$n(x) = \omega^2 \rho A x$$

Da die Querschnittsfläche konstant ist, gilt für die Spannung:

$$A \frac{d\sigma}{dx} = -\omega^2 \rho A x \;\rightarrow\; \frac{d\sigma}{dx} = -\omega^2 \rho x$$

Integration ergibt:

$$\sigma(x) = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho x^2 + c$$

Am äußeren Ende muss die Spannung null sein:

$$0 = \sigma(L) = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho L^2 + c \;\rightarrow\; c = \frac{1}{2}\omega^2 \rho L^2$$

Damit gilt für die Spannung:

$$N(x) = \frac{1}{2}\omega^2 \rho (L^2 - x^2) = \frac{1}{2}\omega^2 \rho L^2 \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

Die Spannung an der Einspannstelle berechnet sich zu

$$\sigma_B = \sigma(b) = \frac{1}{2}\omega^2 \rho L^2 \left(1 - (b/L)^2\right).$$

Zahlenwert:

$$\frac{b}{L} = \frac{100\,\text{mm}}{7000\,\text{mm}} = \frac{1}{70}$$

$$\sigma_B = \frac{1}{2} \cdot 35^2\, s^{-2} \cdot 4{,}43 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \cdot 7000^2\,\text{mm}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{70^2}\right) = 132{,}9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{mm s}^2}$$

$$= 132{,}9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg mm}}{\text{s}^2\,\text{mm}^2} = 132{,}9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg} \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{\text{s}^2\,\text{mm}^2} = \underline{132{,}9\,\text{MPa}}$$

Anmerkung: Wegen $b/L \ll 1$ kann dieser Term vernachlässigt werden. Dann ergibt sich:

$$\sigma_B = 133{,}0\,\text{MPa}$$

b) <u>Längenänderung</u>

Für die Dehnung gilt: $\epsilon(x)=\dfrac{\sigma(x)}{E}=\dfrac{1}{2}\omega^2\dfrac{\rho}{E}\left(L^2-x^2\right)$

Die Längenänderung berechnet sich zu

$$\Delta L=\int_b^L \epsilon(x)\,dx=\frac{\omega^2}{2}\frac{\rho}{E}\int_b^L\left(L^2-x^2\right)dx=\frac{\omega^2}{2}\frac{\rho}{E}\left[L^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=b}^{x=L}$$

$$=\frac{\omega^2}{2}\frac{\rho}{E}\left(L^3-L^2b-\frac{L^3}{3}+\frac{b^3}{3}\right)=\frac{\omega^2}{2}\frac{\rho}{E}L^3\left(\frac{2}{3}-\frac{b}{L}+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{L}\right)^3\right)\quad .$$

Zahlenwert:

$$E=110\cdot10^3\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2\,\text{mm}^2}=110\cdot10^3\,\frac{\text{kg}\cdot10^3\,\text{mm}}{\text{s}^2\,\text{mm}^2}=110\cdot10^6\,\frac{\text{kg}}{\text{s}^2\,\text{mm}}$$

$$\frac{2}{3}-\frac{b}{L}+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{L}\right)^2=\frac{2}{3}-\frac{1}{70}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{70^3}=0{,}6524$$

$$\Delta L=\frac{35^2\,\text{s}^{-2}}{2}\,\frac{4{,}43\cdot10^{-6}\,\text{kg/mm}^3}{110\cdot10^6\,\text{kg/s}^2\text{mm}}\cdot7000^3\,\text{mm}^3\cdot0{,}6524=\underline{5{,}520\,\text{mm}}$$

Werden die Terme mit b/L vernachlässigt, ergibt sich:

$$\Delta L=\frac{35^2\,\text{s}^{-2}}{3}\,\frac{4{,}43\cdot10^{-6}\,\text{kg/mm}^3}{110\cdot10^6\,\text{kg/s}^2\text{mm}}\cdot7000^3\,\text{mm}^3=\underline{5{,}651\,\text{mm}}$$

Aufgabe 15

Für die Dehnung gilt: $\epsilon=\dfrac{\sigma}{E}+\alpha_T\,\Delta T=\dfrac{N}{EA}+\alpha_T\,\Delta T$

Die Normalkraft hat den konstanten Wert $N=-F$. Einsetzen ergibt

$$\epsilon=-\frac{F}{EA}+\alpha_T\,\Delta T\quad .$$

Die Länge des Stabes ändert sich nicht, wenn die Dehnung null ist. Daraus folgt:

$$\frac{F}{EA}=\alpha_T\,\Delta T\quad\rightarrow\quad F=EA\,\alpha_T\,\Delta T$$

Zahlenwert:

$$F=70000\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\cdot25\,\text{mm}^2\cdot2{,}3\cdot10^{-5}\,\text{K}^{-1}\cdot100\,\text{K}=\underline{4025\,\text{N}}$$

Aufgabe 16

a) Längenänderung

Für die Dehnung gilt: $\epsilon=\frac{\sigma}{E}+\alpha_T\Delta T=\frac{N}{EA}+\alpha_T\Delta T$

Die Normalkraft hat den konstanten Wert $N=-F$.

Die Temperaturänderung steigt linear von null auf ΔT_0 an: $\Delta T(x)=\Delta T_0\frac{x}{L}$

Einsetzen ergibt:

$$\epsilon(x)=\alpha_T\Delta T_0\frac{x}{L}-\frac{F}{EA}$$

Die Längenänderung berechnet sich zu

$$\Delta L=\int_0^L\epsilon(x)\,dx=\alpha_T\frac{\Delta T_0}{L}\int_0^L x\,dx-\frac{F}{EA}\int_0^L dx=\alpha_T\frac{\Delta T_0}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=L}-\frac{FL}{EA}$$
$$=\frac{1}{2}\alpha_T\Delta T_0L-\frac{FL}{EA}\quad .$$

Zahlenwert:

$$\Delta L=\frac{1}{2}\cdot1{,}2\cdot10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}\cdot100\,\mathrm{K}\cdot2\,\mathrm{m}-\frac{20\cdot10^3\,\mathrm{N}\cdot2\,\mathrm{m}}{210000\,\mathrm{N/mm^2}\cdot20\,\mathrm{mm^2}}$$
$$=-8{,}324\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}=\underline{-8{,}324\,\mathrm{mm}}$$

b) Kraft

Aus der Bedingung $\Delta L=0$ folgt für die erforderliche Kraft:

$$F_0=\frac{1}{2}EA\alpha_T\Delta T_0$$

Zahlenwert:

$$F_0=\frac{1}{2}\cdot210\cdot10^3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\cdot20\,\mathrm{mm}^2\cdot1{,}2\cdot10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}\cdot100\,\mathrm{K}=2520\,\mathrm{N}=\underline{2{,}520\,\mathrm{kN}}$$

Aufgabe 17

Die Normalkraft im Stab hat den konstanten Wert $N=-F$.

Für den Radius gilt: $r(x)=2r_0-\frac{r_0}{L}x=r_0\left(2-\frac{x}{L}\right)$

Für den Querschnitt folgt

$$A(x)=\pi r^2(x)=\pi r_0^2\left(2-\frac{x}{L}\right)^2=A_0\left(2-\frac{x}{L}\right)^2 \quad \text{mit} \quad A_0=\pi r_0^2 .$$

Damit gilt für die Spannung

$$\sigma(x)=\frac{N}{A(x)}=\frac{N}{A_0}\frac{1}{(2-x/L)^2}=\frac{-F/A_0}{(2-x/L)^2}$$

Für die Dehnung gilt

$$\epsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E}+\alpha_T\,\Delta T(x) .$$

Mit

$$\Delta T(x)=\Delta T_0-\frac{\Delta T_0}{L}x=\Delta T_0\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

folgt:

$$\epsilon(x)=-\frac{F}{E A_0}\frac{1}{(2-x/L)^2}+\alpha_T\,\Delta T_0(1-x/L)$$

Die Längenänderung berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\Delta L&=\int_0^L \epsilon(x)\,dx=-\frac{F L}{E A_0}\int_0^1\frac{d(x/L)}{(2-x/L)^2}+\alpha_T\,\Delta T_0 L\int_0^1(1-x/L)\,d(x/L)\\&=-\frac{F L}{E A_0}\left[\frac{1}{2-x/L}\right]_{x/L=0}^{x/L=1}+\alpha_T\,\Delta T_0 L\left[x/L-\frac{1}{2}(x/L)^2\right]_{x/L=0}^{x/L=1}\\&=-\frac{F L}{E A_0}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\alpha_T\,\Delta T_0 L\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}L\left(\alpha_T\,\Delta T_0-\frac{F}{E A_0}\right) .\end{aligned}$$

Aus der Bedingung $\Delta L=0$ folgt

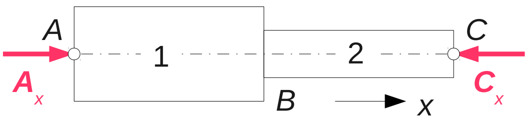
$$F=E A_0\alpha_T\,\Delta T_0 .$$

Zahlenwerte: $A_0=\pi r_0^2=1257\,\mathrm{mm}^2$

$$F=210\cdot 10^3\,\mathrm{N/mm^2}\cdot 1257\,\mathrm{mm}^2\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}\cdot 50\,\mathrm{K}=158382\,\mathrm{N}=\underline{158{,}4\,\mathrm{kN}}$$

Aufgabe 18

a) Lagerkräfte



Gleichgewicht:

$$\sum F_x=0 \;:\; A_x-C_x=0$$

$\rightarrow\ C_x = A_x$

Verträglichkeitsbedingung: $\Delta L = 0$

Um die Verträglichkeitsbedingung anwenden zu können, wird eine Beziehung für die Längenänderung ΔL benötigt. Dazu müssen die Dehnungen infolge der Normalkraft und der Temperaturänderung ermittelt werden.

Normalkraft: $N_1 = N_2 = -A_x$

Dehnungen:

$$\epsilon_1 = \frac{N_1}{E_1 A_1} + \alpha_T \Delta T = -\frac{A_x}{E_1 A_1} + \alpha_T \Delta T \quad , \quad \epsilon_2 = \frac{N_2}{E_2 A_2} = -\frac{A_x}{E_2 A_2}$$

Längenänderung:

Da die Dehnungen konstant sind, gilt: $\Delta L = \epsilon_1 L + \epsilon_2 L$

Damit lautet die Verträglichkeitsbedingung:

$$0 = L\left(-\frac{A_x}{E_1 A_1} + \alpha_t \Delta T - \frac{A_x}{E_2 A_2}\right) \rightarrow A_x\left(\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2}\right) = \alpha_T \Delta T$$

Auflösen nach der gesuchten Kraft ergibt:

$$A_x = \alpha_T \Delta T \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

Zahlenwert:

$$A_x = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1} \cdot 50\,\mathrm{K} \cdot \frac{210 \cdot 10^3\,\mathrm{N/mm^2} \cdot 400\,\mathrm{mm^2} \cdot 70 \cdot 10^3\,\mathrm{N/mm^2} \cdot 100\,\mathrm{mm^2}}{210 \cdot 10^3\,\mathrm{N/mm^2} \cdot 400\,\mathrm{mm^2} + 70 \cdot 10^3\,\mathrm{N/mm^2} \cdot 100\,\mathrm{mm^2}}$$
$$= \underline{3877\,\mathrm{N}}$$

b) <u>Verschiebung an der Stelle *B*</u>

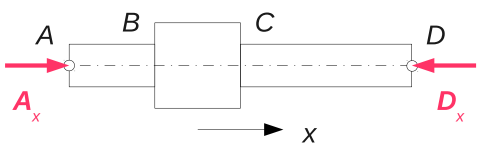
Da die Dehnung im Stab 1 konstant ist, gilt: $u_B = \Delta L_1 = \epsilon_1 L$

Zahlenwert:

$$\epsilon_1 = \frac{-3877\,\mathrm{N}}{210 \cdot 10^3\,\mathrm{N/mm^2} \cdot 400\,\mathrm{mm^2}} + 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1} \cdot 50\,\mathrm{K} = 5{,}538 \cdot 10^{-4}$$

$$u_B = 5{,}538 \cdot 10^{-4} \cdot 200\,\mathrm{mm} = \underline{0{,}1108\,\mathrm{mm}}$$

Aufgabe 19



Gleichgewicht:

$$\sum F_x = 0 \ :\ A_x - D_x = 0 \rightarrow D_x = A_x$$

Verträglichkeitsbedingung: $\Delta L=0$

Normalkraft: $N_{AB}=N_{BC}=N_{CD}=-A_x$

Spannungen: $\sigma_{AB}=-\dfrac{A_x}{A_{AB}}$, $\sigma_{BC}=-\dfrac{A_x}{A_{BC}}$, $\sigma_{CD}=-\dfrac{A_x}{A_{CD}}$

Temperaturverlauf:

$$\Delta T(x)=\begin{cases} \Delta T_0 \dfrac{x}{a}, & 0<x<a \\ \Delta T_0, & a<x<2a \\ \Delta T_0\left(2-\dfrac{x}{2a}\right), & 2a<x<4a \end{cases}$$

Dehnungen:

$$\epsilon_{AB}(x)=-\frac{A_x}{E A_{AB}}+\alpha_T \Delta T_0 \frac{x}{a}$$

$$\epsilon_{BC}(x)=-\frac{A_x}{E A_{BC}}+\alpha_T \Delta T_0$$

$$\epsilon_{CD}(x)=-\frac{A_x}{E A_{CD}}+\alpha_T \Delta T_0\left(2-\frac{x}{2a}\right)$$

Damit lautet die Verträglichkeitsbedingung:

$$0=\int_0^{4a} \epsilon(x)\,dx=\int_0^a \epsilon_{AB}(x)\,dx+\int_a^{2a} \epsilon_{BC}(x)\,dx+\int_{2a}^{4a} \epsilon_{CD}(x)\,dx$$

Berechnung der Integrale:

$$\int_0^a \epsilon_{AB}(x)\,dx=-\frac{A_x a}{E A_{AB}}+\frac{\alpha_T \Delta T_0}{a}\int_0^a x\,dx=-\frac{A_x a}{E A_{AB}}+\frac{1}{2}\alpha_T \Delta T\, a$$

$$\int_a^{2a} \epsilon_{BC}(x)\,dx=-\frac{A_x a}{E A_{BC}}+\alpha_T \Delta T_0 a$$

$$\int_{2a}^{4a} \epsilon_{CD}(x)\,dx=-\frac{2 A_x a}{E A_{CD}}+\alpha_T \Delta T_0 \int_{2a}^{4a}\left(2-\frac{x}{2a}\right)dx$$

$$=-\frac{2 A_x a}{E A_{CD}}+\alpha_T \Delta T_0\left[2x-\frac{x^2}{4a}\right]_{x=2a}^{x=4a}$$

$$=-\frac{2 A_x a}{E A_{CD}}+\alpha_T \Delta T_0(8a-4a-4a+a)=-\frac{2 A_x a}{E A_{CD}}+\alpha_T \Delta T_0 a$$

Einsetzen in die Verträglichkeitsbedingung führt auf

$$0=-\frac{A_x a}{E}\left(\frac{1}{A_{AB}}+\frac{1}{A_{BC}}+\frac{2}{A_{CD}}\right)+\alpha_T \Delta T_0 a\left(\frac{1}{2}+1+1\right) .$$

Auflösen nach der gesuchten Kraft ergibt

$$A_x=\frac{5}{2}\frac{E\alpha_T \Delta T_0}{\dfrac{1}{A_{AB}}+\dfrac{1}{A_{BC}}+\dfrac{2}{A_{CD}}} .$$

Zahlenwerte:

$$A_e=\frac{1}{\dfrac{1}{A_{AB}}+\dfrac{1}{A_{BC}}+\dfrac{2}{A_{CD}}}=\frac{1}{\dfrac{1}{1200\,\mathrm{mm}^2}+\dfrac{1}{4800\,\mathrm{mm}^2}+\dfrac{2}{1200\,\mathrm{mm}^2}}=369{,}2\,\mathrm{mm}^2$$

$$A_x=\frac{5}{2}\cdot 210\cdot 10^3\,\mathrm{N/mm}^2\cdot 369{,}2\,\mathrm{mm}^2\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}\cdot 50\,\mathrm{K}=\underline{116{,}3\cdot 10^3\,\mathrm{N}}$$

$$\sigma_{AB}=-\frac{116{,}3\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{1200\,\mathrm{mm}^2}=\underline{-96{,}92\,\mathrm{MPa}}$$

$$\sigma_{BC}=-\frac{116{,}3\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{4800\,\mathrm{mm}^2}=\underline{-24{,}23\,\mathrm{MPa}}$$

$$\sigma_{CD}=-\frac{116{,}3\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{1200\,\mathrm{mm}^2}=\underline{-96{,}92\,\mathrm{MPa}}$$

Aufgabe 20

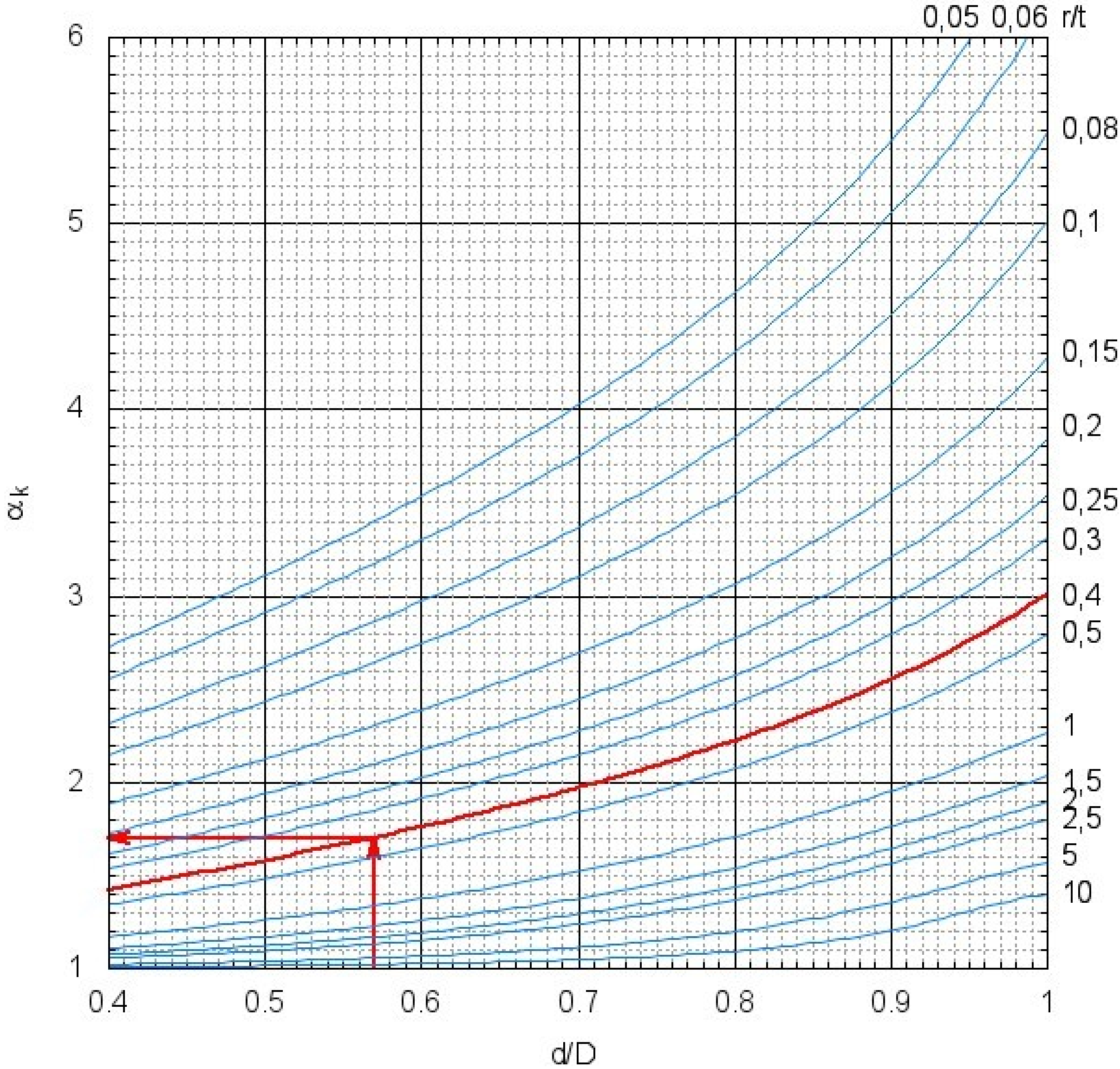
Kleinste Querschnittsfläche: $A_{min}=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{\pi}{4}\cdot 40^2\,\mathrm{mm}^2=1256\,\mathrm{mm}^2$

Nennspannung: $\sigma_n=\frac{F}{A_{min}}=\frac{100\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{1256\,\mathrm{mm}^2}=79{,}61\,\mathrm{MPa}\approx 80\,\mathrm{MPa}$

Formzahl:

$$t=\frac{1}{2}(70\,\mathrm{mm}-40\,\mathrm{mm})=15\,\mathrm{mm}$$

$$\frac{r}{t}=\frac{7\,\mathrm{mm}}{15\,\mathrm{mm}}=0{,}467\,,\quad \frac{d}{D}=\frac{40\,\mathrm{mm}}{70\,\mathrm{mm}}=0{,}57$$



Aus dem Diagramm kann abgelesen werden: $\alpha_k \approx 1{,}7$

Kerbspannung: $\sigma_k = \alpha_k \sigma_n = 1{,}7 \cdot 80\,\text{MPa} = 136\,\text{MPa}$

Sicherheit: $S_F = \dfrac{305\,\text{MPa}}{136\,\text{MPa}} = \underline{2{,}24}$