2.5 Elastizitätsgesetz

Lösungen

Aufgabe 1

a) Spannungen

Zuerst werden die Verzerrungen durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$
\begin{array}{lllllll}
(1+\cos(2\alpha))\epsilon_x & + & (1-\cos(2\alpha))\epsilon_y & + & \sin(2\alpha)\gamma_{xy} & = & 2\epsilon_a \\
(1+\cos(2\beta))\epsilon_x & + & (1-\cos(2\beta))\epsilon_y & + & \sin(2\beta)\gamma_{xy} & = & 2\epsilon_b \\
(1+\cos(2\gamma))\epsilon_x & + & (1-\cos(2\gamma))\epsilon_y & + & \sin(2\gamma)\gamma_{xy} & = & 2\epsilon_c
\end{array}
$$

ermittelt. Die Winkelfunktionen haben die folgenden Werte:

	ϕ = 0°	ϕ = 120°	ϕ = 240°
$\cos(2\phi)$	1	$-1/2$	$-1/2$
$\sin(2\phi)$	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$

Damit lautet das zu lösende Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lllllll}
2\epsilon_x & & & & & = & 2\epsilon_a \quad (1) \\
\frac{1}{2}\epsilon_x & + & \frac{3}{2}\epsilon_y & - & \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{xy} & = & 2\epsilon_b \quad (2) \\
\frac{1}{2}\epsilon_x & + & \frac{3}{2}\epsilon_y & + & \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{xy} & = & 2\epsilon_c \quad (3)
\end{array}
$$

Aus Gleichung (1) folgt: $\epsilon_x=\epsilon_a$

Addition der Gleichungen (2) und (3) ergibt: $\epsilon_x+3\epsilon_y=2(\epsilon_b+\epsilon_c)$

Daraus folgt: $\epsilon_y=\frac{1}{3}(2\epsilon_b+2\epsilon_c-\epsilon_x)=\frac{1}{3}(2\epsilon_b+2\epsilon_c-\epsilon_a)$

Aus Gleichung (3) folgt: $\gamma_{xy}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2\epsilon_c-\frac{1}{2}\epsilon_x-\frac{3}{2}\epsilon_y\right)$

Einsetzen der Ergebnisse für ϵ_x und ϵ_y ergibt:

$$\gamma_{xy}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2\epsilon_c-\frac{1}{2}\epsilon_a-\epsilon_b-\epsilon_c+\frac{1}{2}\epsilon_a\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_c-\epsilon_b)$$

Zahlenwerte:

$$\epsilon_x = 3{,}707 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{3}\left(2 \cdot 11{,}69 + 2 \cdot 5{,}013 - 3{,}707\right) \cdot 10^{-4} = 9{,}900 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(5{,}013 - 11{,}69\right) \cdot 10^{-4} = -7{,}710 \cdot 10^{-4}$$

Die zugehörigen Spannungen berechnen sich aus

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\epsilon_x + \nu\,\epsilon_y\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\epsilon_y + \nu\,\epsilon_x\right) \text{ und } \tau_{xy} = G\,\gamma_{xy} .$$

Zahlenwerte:

$$\frac{E}{1-\nu^2} = \frac{210000\,\text{MPa}}{1-0{,}3^2} = 230769\,\text{MPa}$$

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} = \frac{210000\,\text{MPa}}{2\left(1+0{,}3\right)} = 80769\,\text{MPa}$$

$$\sigma_x = 230769\,\text{MPa} \cdot \left(3{,}707 + 0{,}3 \cdot 9{,}900\right) \cdot 10^{-4} = \underline{154{,}1\,\text{MPa}}$$

$$\sigma_y = 230769\,\text{MPa} \cdot \left(9{,}900 + 0{,}3 \cdot 3{,}707\right) \cdot 10^{-4} = \underline{254{,}1\,\text{MPa}}$$

$$\tau_{xy} = -80769\,\text{MPa} \cdot 7{,}710 \cdot 10^{-4} = \underline{-62{,}27\,\text{MPa}}$$

b) <u>Hauptspannungen</u>

Für die Hauptspannungen gilt:

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Zahlenwerte:

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}\left(154{,}1 + 254{,}1\right)\text{MPa} = 204{,}1\,\text{MPa}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right) = \frac{1}{2}\left(154{,}1 - 254{,}1\right)\text{MPa} = -50\,\text{MPa}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{50^2 + 62{,}27^2}\,\text{MPa} = 79{,}86\,\text{MPa}$$

$$\sigma_1 = 204{,}1\,\text{MPa} + 79{,}86\,\text{MPa} = \underline{284{,}0\,\text{MPa}}$$

$$\sigma_2 = 204{,}1\,\text{MPa} - 79{,}86\,\text{MPa} = \underline{124{,}2\,\text{MPa}}$$

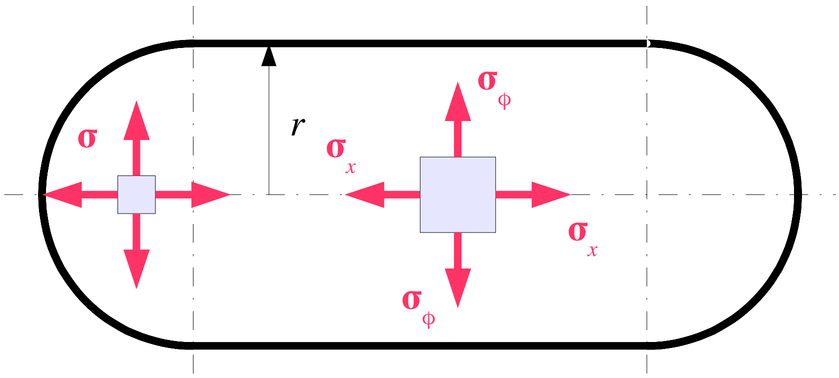
c) Größte Schubspannung

Für die größte Schubspannung gilt: $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$

Zahlenwert: $\tau_{max} = \frac{1}{2}(284{,}0 - 124{,}2)\,\text{MPa} = \underline{79{,}9\,\text{MPa}}$

Aufgabe 2

a) Spannungen



Zylinder:

Längsspannung: $\sigma_x = \frac{p\,r}{2\,t}$

Umfangsspannung: $\sigma_\phi = \frac{p\,r}{t}$

Kugelkalotte: $\sigma = \frac{p\,r}{2\,t}$

Zahlenwerte:

$$\sigma_x = \frac{0{,}5\,\text{MPa} \cdot 1000\,\text{mm}}{2 \cdot 10\,\text{mm}} = \underline{25\,\text{MPa}}$$

$$\sigma_\phi = \frac{0{,}5\,\text{MPa} \cdot 1000\,\text{mm}}{10\,\text{mm}} = \underline{50\,\text{MPa}}$$

$$\sigma = \sigma_x = 25\,\text{MPa}$$

b) <u>Änderung der Radien</u>

Zylinder:

Änderung des Umfangs: $\Delta U = \epsilon_\phi U = 2\pi r \epsilon_\phi$

Änderung des Radius:

$$2\pi \left(r + \Delta r_Z \right) = U + \Delta U = 2\pi r \left(1 + \epsilon_\phi \right)$$

$$\rightarrow \quad \Delta r_Z = r \epsilon_\phi = \frac{r}{E} \left(\sigma_\phi - \nu \sigma_x \right)$$

Zahlenwert:

$$\Delta r_Z = \frac{1000\,\mathrm{mm}}{2{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}} \left(50\,\mathrm{MPa} - 0{,}3 \cdot 25\,\mathrm{MPa} \right) = \underline{0{,}2024\,\mathrm{mm}}$$

Kugelkalotte:

Änderung des Umfangs eines Großkreises auf der Kugel:

$$\Delta U = \epsilon U = 2\pi r \epsilon$$

Änderung des Radius:

$$2\pi \left(r + \Delta r_K \right) = U + \Delta U = 2\pi r \left(1 + \epsilon \right)$$

$$\rightarrow \quad \Delta r_K = r \epsilon = \frac{r \sigma}{E} \left(1 - \nu \right)$$

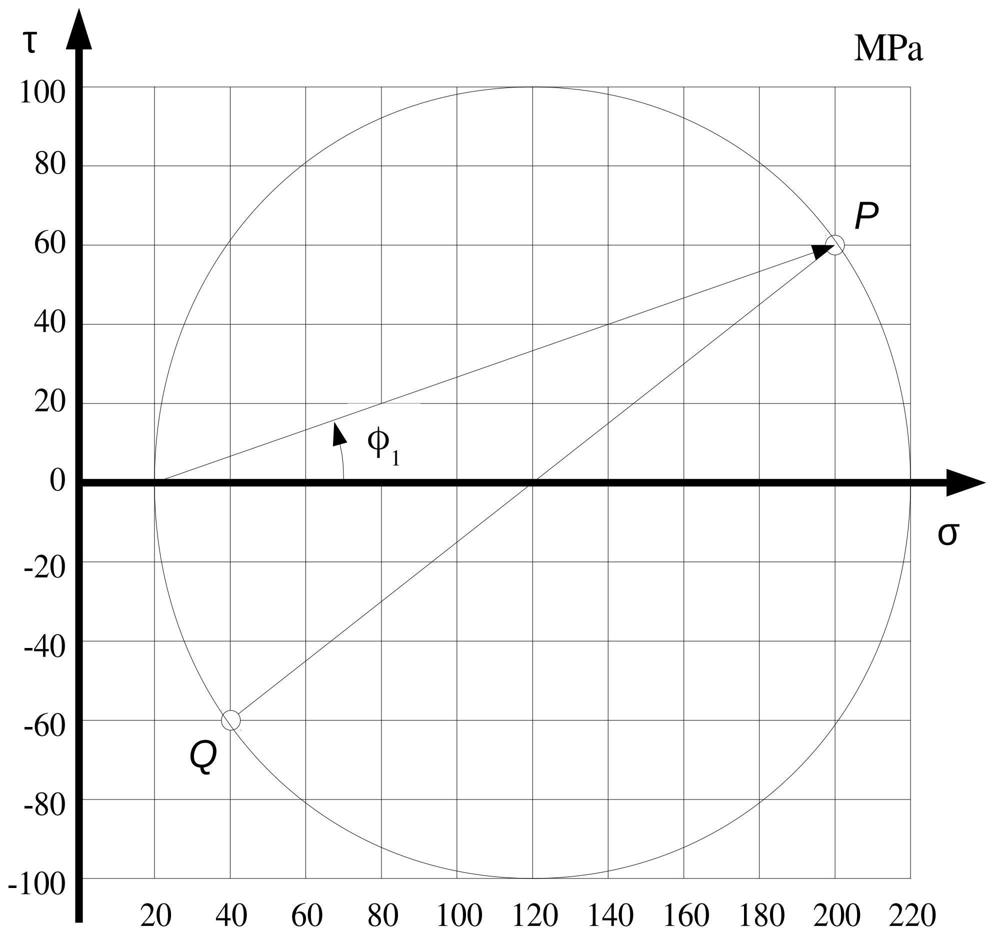
Zahlenwert:

$$\Delta r_K = \frac{1000\,\mathrm{mm} \cdot 25\,\mathrm{MPa}}{2{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}} \left(1 - 0{,}3 \right) = \underline{0{,}08333\,\mathrm{mm}}$$

Die unterschiedliche Änderung der Radien führt zu Momenten an der Verbindung der Kugelkalotte mit dem Zylinder. Die Kugelkalotte wird aufgeweitet und der Zylinder gezwängt.

Aufgabe 3

a) Mohrscher Spannungskreis



b) Hauptspannungen

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_x}{2} = \frac{200+40}{2}\,\mathrm{MPa} = 120\,\mathrm{MPa}$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{200-40}{2}\,\mathrm{MPa} = 80\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{80^2+60^2}\,\mathrm{MPa} = \sqrt{10000}\,\mathrm{MPa} = 100\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_1 = 120\,\mathrm{MPa} + 100\,\mathrm{MPa} = \underline{220\,\mathrm{MPa}}$$

$$\sigma_2 = 120\,\text{MPa} - 100\,\text{MPa} = \underline{20\,\text{MPa}}$$

$$\tan(2\phi_H) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} \rightarrow 2\phi_H = 36{,}87°$$

$$\tau_{xy} > 0 \rightarrow \phi_1 = 18{,}43°$$

c) <u>Spannungsinvarianten</u>

$$I_1 : \sigma_x + \sigma_y = 240\,\text{MPa}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 240\,\text{MPa}$$

$$I_2 : \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 4400\,\text{MPa}^2, \quad \sigma_1 \sigma_2 = 4400\,\text{MPa}^2$$

d) <u>Vergleichsspannungen</u>

$$\sigma_{V,SH} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) = \max(200, 220, 20)\,\text{MPa} = \underline{220\,\text{MPa}}$$

$$\sigma_{V,GH} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} = \sqrt{220^2 - 220 \cdot 20 + 20^2}\,\text{MPa} = \sqrt{44400}\,\text{MPa}$$
$$= \underline{210{,}7\,\text{MPa}}$$

oder

$$\sigma_{V,GH} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{200^2 - 200 \cdot 40 + 40^2 + 3 \cdot 60^2}\,\text{MPa}$$
$$= \sqrt{44400}\,\text{MPa} = \underline{210{,}7}\,\text{MPa}$$

e) <u>Verzerrungen</u>

Schubmodul:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210000\,\text{MPa}}{2 \cdot 1{,}3} = 80769\,\text{MPa}$$

Dehnungen:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu \sigma_y}{E} = \frac{200 - 0{,}3 \cdot 40}{210000} = 8{,}952 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu \sigma_x}{E} = \frac{40 - 0{,}3 \cdot 200}{210000} = -9{,}524 \cdot 10^{-5}$$

Scherung:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{60}{80769} = 7{,}429 \cdot 10^{-4}$$