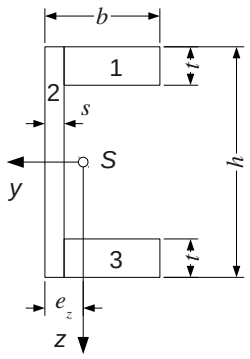
3.2 Flächenträgheitsmomente

Lösungen

Aufgabe 1

Teilflächen:



a) <u>Schwerpunktsabstand</u>

		A_i	e_{zi}	$e_{zi} A_i$
1	Oberer Gurt	$(b-s)t$	$s+\frac{b-s}{2}$	$\frac{b+s}{2}(b-s)t$
2	Steg	$h\,s$	$\frac{s}{2}$	$\frac{1}{2}h\,s^2$
3	Unterer Gurt	$(b-s)t$	$s+\frac{b-s}{2}$	$\frac{b+s}{2}(b-s)t$
	Summe	$2(b-s)t+h\,s$		$(b^2-s^2)t+\frac{1}{2}h\,s^2$

Ergebnis: $$e_z=\frac{(b^2-s^2)t+h\,s^2/2}{2(b-s)t+h\,s}$$

Zahlenwert: $$e_z=\frac{(50^2-6^2)\cdot 8{,}5+100\cdot 6^2/2}{2\cdot(50-6)\cdot 8{,}5+100\cdot 6}\,\mathrm{mm}=\underline{16{,}87\,\mathrm{mm}}$$

b) Flächenträgheitsmomente

	1	2	3
A_i	$(b-s)t$	$h\,s$	$(b-s)t$
y_{Si}	$-(b-e_z)+\frac{b-s}{2}$ $=e_z-\frac{b+s}{2}$	$e_z-\frac{s}{2}$	$e_z-\frac{b+s}{2}$
z_{Si}	$-\left(\frac{h}{2}-\frac{t}{2}\right)$	0	$\frac{h}{2}-\frac{t}{2}$
I_{Yi}	$\frac{(b-s)t^3}{12}$	$\frac{h^3 s}{12}$	$\frac{(b-s)t^3}{12}$
I_{Zi}	$\frac{(b-s)^3 t}{12}$	$\frac{h\,s^3}{12}$	$\frac{(b-s)^3 t}{12}$
$z_{Si}^2 A_i$	$\left(\frac{h}{2}-\frac{t}{2}\right)^2(b-s)t$	0	$\left(\frac{h}{2}-\frac{t}{2}\right)^2(b-s)t$
$y_{Si}^2 A_i$	$\left(e_z-\frac{b+s}{2}\right)^2(b-s)t$	$\left(e_z-\frac{s}{2}\right)^2 h\,s$	$\left(e_z-\frac{b+s}{2}\right)^2(b-s)t$

Zahlenwerte:

	1	2	3	Summe	
A_i	3,74	6	3,74	13,48	cm^2
y_{Si}	-11,13	13,87	-11,13		mm
z_{Si}	-45,75	0	45,75		mm
I_{Yi}	0,2252	50,00	0,2252	50,45	cm^4
I_{Zi}	6,034	0,1800	6,034	12,25	cm^4
$z_{Si}^2 A_i$	78,28	0	78,28	156,6	cm^4
$y_{Si}^2 A_i$	4,633	11,54	4,633	20,81	cm^4

Ergebnis: $I_y=(50{,}45+156{,}6)\,\mathrm{cm}^4=\underline{207{,}0\,\mathrm{cm}^4}$

$I_z=(12{,}25+20{,}81)\,\mathrm{cm}^4=\underline{33{,}06\,\mathrm{cm}^4}$

c) Widerstandsmomente

Mit

$$|y|_{max}=b-e_z=50\,\mathrm{mm}-16{,}87\,\mathrm{mm}=33{,}13\,\mathrm{mm}=3{,}313\,\mathrm{cm}$$

und

$$|z|_{max} = \frac{h}{2} = 50\,\text{mm} = 5\,\text{cm}$$

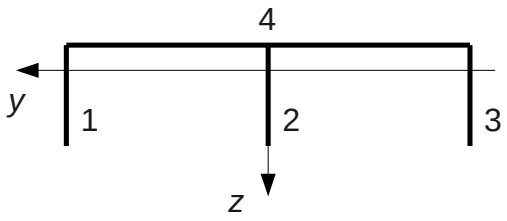
gilt:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{max}} = \frac{207{,}0\,\text{cm}^3}{5\,\text{cm}} = \underline{41{,}4\,\text{cm}^3}$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{max}} = \frac{33{,}06\,\text{cm}^4}{3{,}313\,\text{cm}} = \underline{9{,}979\,\text{cm}^3}$$

Aufgabe 2

Teilflächen:



Schwerpunktsabstand:

	1	2	3	4	Summe
A_i	at	at	at	$4\,at$	$7\,at$
e_{yi}	$a/2$	$a/2$	$a/2$	0	
$e_{yi} A_i$	$a^2 t/2$	$a^2 t/2$	$a^2 t/2$	0	$3\,a^2 t/2$

Ergebnis: $e_y = \frac{3\,a^2 t}{14\,a\,t} = \frac{3}{14}\,a$

Flächenträgheitsmomente:

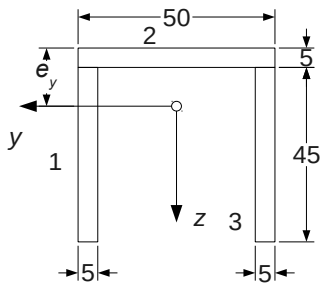
	1	2	3	4	Summe
A_i	at	at	at	$4\,at$	$7\,at$
y_{Si}	$2\,a$	0	$-2\,a$	0	
z_{Si}	$\frac{2}{7}a$	$\frac{2}{7}a$	$\frac{2}{7}a$	$-\frac{3}{14}a$	
I_{Yi}	$\frac{a^3 t}{12}$	$\frac{a^3 t}{12}$	$\frac{a^3 t}{12}$	0	$\frac{a^3 t}{4}$

	1	2	3	4	Summe
I_{Zi}	0	0	0	$\frac{4^3 a^3 t}{12}$	$\frac{16 a^3 t}{3}$
$z_{Si}^2 A_i$	$\frac{4}{49} a^3 t$	$\frac{4}{49} a^3 t$	$\frac{4}{49} a^3 t$	$\frac{9}{49} a^3 t$	$\frac{3}{7} a^3 t$
$y_{Si}^2 A_i$	$4 a^3 t$	0	$4 a^3 t$	0	$8 a^3 t$

Ergebnis: $I_y = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{7}\right) a^3 t = \frac{19}{28} a^3 t$, $I_z = \left(\frac{16}{3} + 8\right) a^3 t = \frac{40}{3} a^3 t$

Aufgabe 3

Teilflächen:



Schwerpunktsabstand:

		A_i	e_{yi}	$e_{yi} A_i$
1	Linker Steg	225	27,5	6187,5
2	Oberer Gurt	250	2,5	625
3	Rechter Steg	225	27,5	6187,5
	Summe	700		13000
		mm^2	mm	mm^3

Ergebnis: $e_y = \frac{13000\,\text{mm}^3}{700\,\text{mm}^2} = \underline{18{,}57\,\text{mm}}$

Flächenträgheitsmomente:

	1	2	3	Summe	
A_i	2,25	2,50	2,25	7,00	cm^2
y_{Si}	22,5	0	-22,5		mm

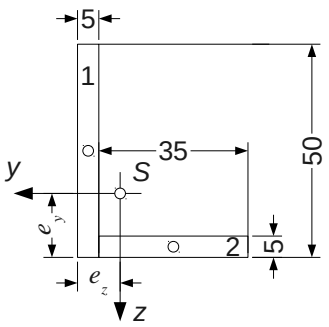
	1	2	3	Summe	
z_{Si}	8,93	-16,07	8,93		mm
I_{Yi}	3,797	0,0521	3,797	7,646	cm^4
I_{Zi}	0,0469	5,208	0,0469	5,302	cm^4
$z_{Si}^2 A_i$	1,794	6,456	1,794	10,04	cm^4
$y_{Si}^2 A_i$	11,39	0	11,39	22,78	cm^4

Ergebnis: $I_y = 7{,}646\,\text{cm}^4 + 10{,}04\,\text{cm}^4 = \underline{17{,}69\,\text{cm}^4}$

$I_z = 5{,}302\,\text{cm}^4 + 22{,}78\,\text{cm}^4 = \underline{28{,}08\,\text{cm}^4}$

Aufgabe 4

Teilflächen:



a) <u>Schwerpunkt</u>

	1	2	Summe	
A_i	250	175	425	mm^2
e_{yi}	25	2,5		mm
e_{zi}	2,5	22,5		mm
$e_{yi} A_i$	6250	437,5	6688	mm^3
$e_{zi} A_i$	625	3938	4563	mm^3

Ergebnis: $e_y = \dfrac{6688\,\text{mm}^3}{425\,\text{mm}^2} = \underline{15{,}74\,\text{mm}}$, $e_z = \dfrac{4563\,\text{mm}^3}{425\,\text{mm}^2} = \underline{10{,}74\,\text{mm}}$

b) Flächenträgheitsmomente

	1	2	Summe	
A_i	250	175	425	mm^2
y_{Si}	8,24	-11,76		mm
z_{Si}	-9,26	13,24		mm
I_{Yi}	52080	364,6	52440	mm^4
I_{Zi}	520,8	17860	18380	mm^4
$z_{Si}^2 A_i$	21440	30680	52120	mm^4
$y_{Si}^2 A_i$	16970	24200	41170	mm^4
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	19080	27250	46330	mm^4

Ergebnis: $I_y = (52440 + 52120)\,\mathrm{mm}^4 = \underline{10{,}46\,\mathrm{cm}^4}$

$I_z = (18380 + 41170)\,\mathrm{mm}^4 = \underline{5{,}96\,\mathrm{cm}^4}$

$I_{yz} = \underline{4{,}63\,\mathrm{cm}^4}$

Trägheitsradien:

$$i_y = \sqrt{\frac{10{,}46\,\mathrm{cm}^4}{4{,}25\,\mathrm{cm}^2}} = \underline{1{,}57\,cm}\,,\quad i_z = \sqrt{\frac{5{,}96\,\mathrm{cm}^4}{4{,}25\,\mathrm{cm}^2}} = \underline{1{,}18\,\mathrm{cm}}$$

c) Hauptachsentransformation

Hauptträgheitsmomente:

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{10{,}46 + 5{,}96}{2}\,\mathrm{cm}^4 = 8{,}21\,\mathrm{cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{10{,}46 - 5{,}96}{2}\,\mathrm{cm}^4 = 2{,}25\,\mathrm{cm}^4$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{2{,}25^2 + 4{,}63^2}\,\mathrm{cm}^4 = 5{,}148\,\mathrm{cm}^4$$

$$I_1 = 8{,}21\,\mathrm{cm}^4 + 5{,}148\,\mathrm{cm}^4 = \underline{13{,}36\,\mathrm{cm}^4}$$

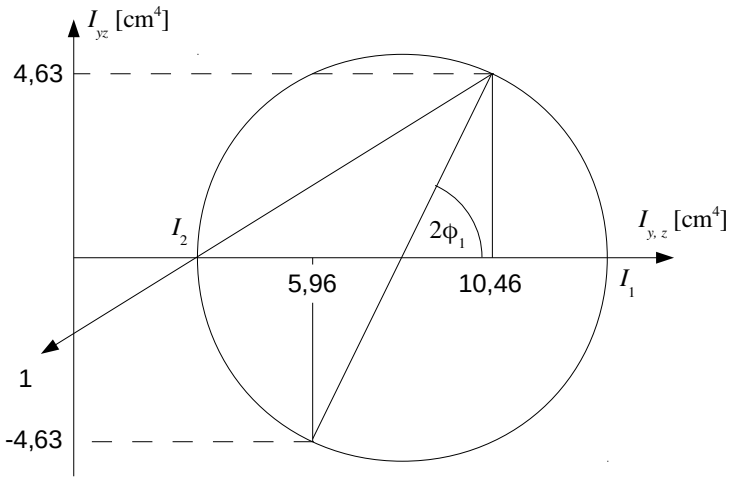
$$I_2 = 8{,}21\,\mathrm{cm}^4 - 5{,}148\,\mathrm{cm}^4 = \underline{3{,}06\,\mathrm{cm}^4}$$

Hauptachsen:

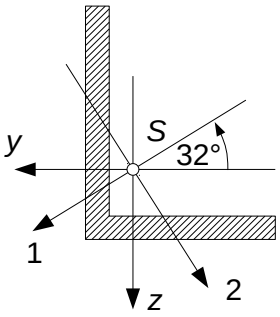
$$\tan(2\phi_H) = \frac{2 \cdot 4{,}63}{10{,}46 - 5{,}96} = 2{,}057 \;\rightarrow\; 2\phi_H = 64{,}08\,°$$

$$I_{yz} > 0 \;\rightarrow\; \phi_1 = 32{,}04\,°$$

Mohrscher Trägheitskreis:



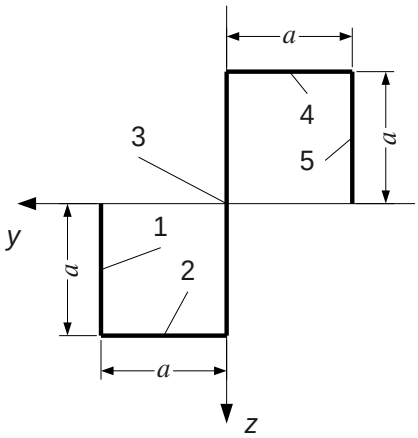
Lage der Hauptachsen:



Aufgabe 5

<u>Flächenträgheitsmomente</u>

Teilflächen:



	Profil 1	Profil 2	Profil 3	Profil 4	Profil 5	Summe
A_i	ta	ta	$2ta$	ta	ta	$6ta$
y_{Si}	a	$a/2$	0	$-a/2$	$-a$	
z_{Si}	$a/2$	a	0	$-a$	$-a/2$	
I_{Yi}	$a^3t/12$	0	$8a^3t/12$	0	$a^3t/12$	$10a^3t/12$
I_{Zi}	0	$a^3t/12$	0	$a^3t/12$	0	$2a^3t/12$
$z_{Si}^2A_i$	$a^3t/4$	a^3t	0	a^3t	$a^3t/4$	$5a^3t/2$
$y_{Si}^2A_i$	a^3t	$a^3t/4$	0	$a^3t/4$	a^3t	$5a^3t/2$
$-y_{Si}z_{Si}A_i$	$-a^3t/2$	$-a^3t/2$	0	$-a^3t/2$	$-a^3t/2$	$-2a^3t$

Ergebnis: $I_y=\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{2}\right)a^3t=\underline{\frac{10}{3}a^3t}$, $I_z=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{2}\right)a^3t=\underline{\frac{8}{3}a^3t}$, $I_{yz}=\underline{-2a^3t}$

<u>Hauptachsentransformation</u>

Hauptträgheitsmomente:

$$\frac{I_y+I_z}{2}=\frac{10+8}{6}a^3t=3a^3t\ ,\quad \frac{I_y-I_z}{2}=\frac{10-8}{6}a^3t=\frac{1}{3}a^3t$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+4}\,a^3t=\frac{\sqrt{37}}{3}a^3t$$

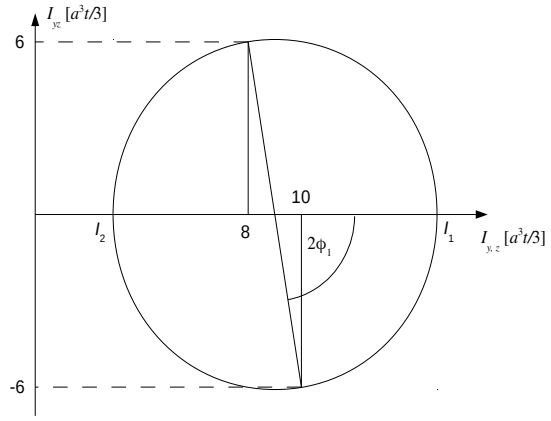
$$I_1=\left(3+\frac{\sqrt{37}}{3}\right)a^3t=\underline{5{,}028\,a^3t}\ ,\quad I_2=\left(3-\frac{\sqrt{37}}{3}\right)a^3t=\underline{0{,}9724\,a^3t}$$

Hauptachsen:

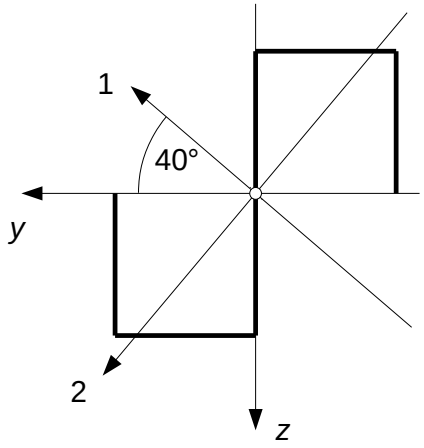
$$\tan(2\phi_H)=\frac{-4a^3t}{\frac{10}{3}a^3t-\frac{8}{3}a^3t}=-\frac{12}{2}=-6\ \rightarrow\ 2\phi_H=-80{,}54°$$

$$I_{yz}<0\ \rightarrow\ \phi_1=-40{,}27°$$

Mohrscher Trägheitskreis:



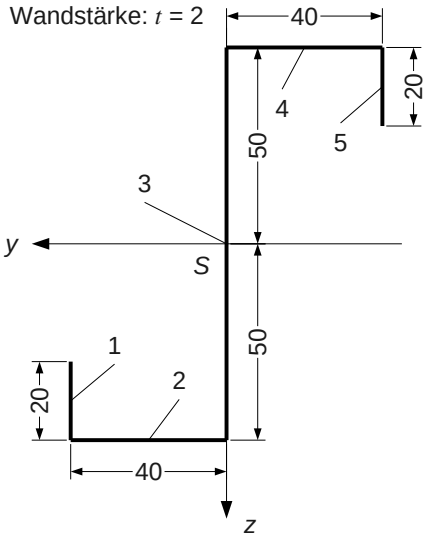
Lage der Hauptachsen:



Aufgabe 6

a) <u>Flächenträgheitsmomente</u>

Teilflächen:



	Profil 1	Profil 2	Profil 3	Profil 4	Profil 5	Summe	
A_i	40	80	200	80	40	440	mm²
y_{Si}	40	20	0	-20	-40		mm
z_{Si}	40	50	0	-50	-40		mm
I_{Yi}	1333	0	166700	0	1333	169400	mm⁴
I_{Zi}	0	10670	0	10670	0	21340	mm⁴
$z_{Si}^2 A_i$	64000	200000	0	200000	64000	528000	mm⁴
$y_{Si}^2 A_i$	64000	32000	0	32000	64000	192000	mm⁴
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	-64000	-80000	0	-80000	-64000	-288000	mm⁴

Ergebnis: $I_y = (169400 + 528000)\,\mathrm{mm}^4 = \underline{69{,}74\,\mathrm{cm}^4}$

$I_z = (21340 + 192000)\,\mathrm{mm}^4 = \underline{21{,}33\,\mathrm{cm}^4}$

$I_{yz} = \underline{-28{,}80\,\mathrm{cm}^4}$

Trägheitsradien: $i_y = \sqrt{\dfrac{69{,}74\,\mathrm{cm}^4}{4{,}40\,\mathrm{cm}^2}} = \underline{3{,}98\,\mathrm{cm}}$, $i_z = \sqrt{\dfrac{21{,}33\,\mathrm{cm}^4}{4{,}40\,\mathrm{cm}^2}} = \underline{2{,}20\,\mathrm{cm}}$

b) <u>Hauptachsentransformation</u>

Hauptträgheitsmomente:

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{69{,}74 + 21{,}33}{2}\,\mathrm{cm}^4 = 45{,}54\,\mathrm{cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{69{,}74 - 21{,}33}{2}\,\mathrm{cm}^4 = 24{,}21\,\mathrm{cm}^4$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{24{,}21^2 + 28{,}80^2}\,\mathrm{cm}^4 = 37{,}62\,\mathrm{cm}^4$$

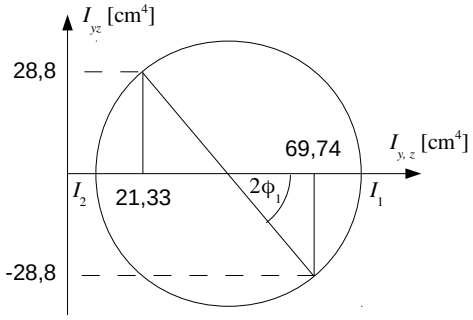
$$I_1 = (45{,}54 + 37{,}62)\,\mathrm{cm}^4 = \underline{83{,}16\,\mathrm{cm}^4}\,,\quad I_2 = (45{,}54 - 37{,}62)\,\mathrm{cm}^4 = \underline{7{,}92\,\mathrm{cm}^4}$$

Hauptachsen:

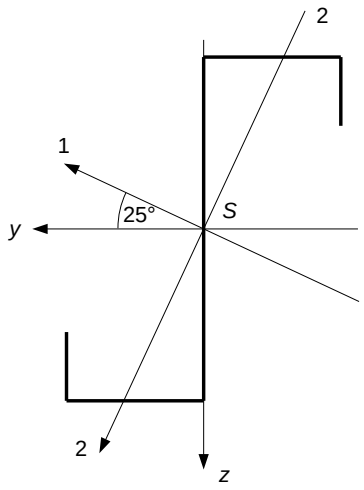
$$\tan(2\phi_H) = \frac{-2 \cdot 28{,}80}{69{,}74 - 21{,}33} = -1{,}190 \;\rightarrow\; 2\phi_H = -49{,}95°$$

$$I_{yz} < 0 \;\rightarrow\; \phi_1 = -24{,}98°$$

Mohrscher Trägheitskreis:



Lage der Hauptachsen:



Aufgabe 7

Die größte Spannung tritt im Querschnitt mit dem größten Biegemoment auf.

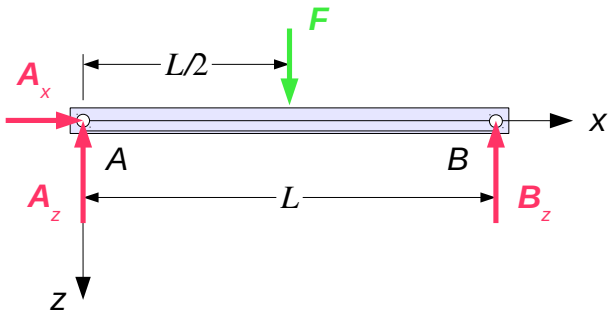
<u>Lagerkräfte</u>

$$\sum M^A = 0 \;:$$

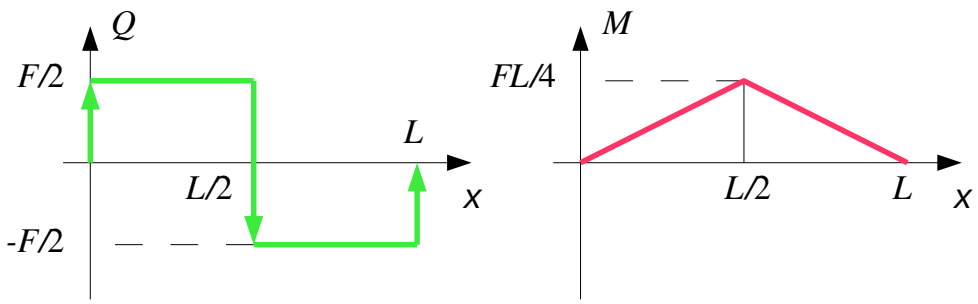
$$-\frac{L}{2} F + L\, B_z = 0 \;\rightarrow\; B_z = \frac{F}{2}$$

$$\sum M^B = 0 \;:$$

$$-L\, A_z + \frac{L}{2} F = 0 \;\rightarrow\; A_z = \frac{F}{2}$$



Schnittlasten



Das größte Biegemoment tritt in der Mitte auf. Es hat den Wert

$$M_{ymax} = \frac{1}{4} F L \quad .$$

Zahlenwert: $M_{ymax} = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 10^3 \, N \cdot 1000 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{m} = 1250 \, \mathrm{Nm}$

Normalspannung

Für die Normalspannung gilt:

$$\sigma(y, z) = \frac{\bar{M}_y}{I_y} z - \frac{\bar{M}_z}{I_z} y$$

Die Flächenträgheitsmomente wurden in Aufgabe 6 berechnet:

$$I_y = 69{,}74 \, \mathrm{cm}^4 , \quad I_z = 21{,}33 \, \mathrm{cm}^4 , \quad I_{yz} = -28{,}80 \, \mathrm{cm}^4$$

Damit gilt:

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{28{,}80^2}{69{,}74 \cdot 21{,}33} = 0{,}4424 , \quad \frac{I_{yz}}{I_y} = -0{,}4130$$

$$\bar{M}_y = \frac{1250 \, \mathrm{Nm}}{0{,}4424} = 2825 \, \mathrm{Nm} , \quad \bar{M}_z = \frac{1250 \, \mathrm{Nm} \cdot 0{,}4130}{0{,}4424} = 1167 \, \mathrm{Nm}$$

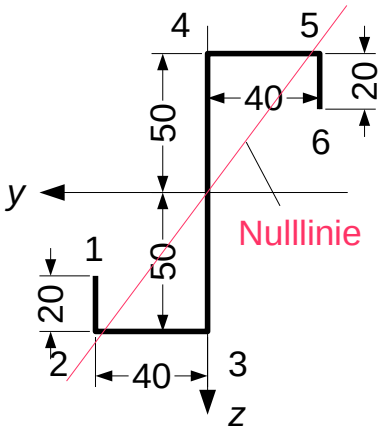
$$\frac{\bar{M}_y}{I_y} = \frac{2825 \cdot 10^3 \, \mathrm{Nmm}}{69{,}74 \cdot 10^4 \, \mathrm{mm}^4} = 4{,}051 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^3} , \quad \frac{\bar{M}_z}{I_z} = \frac{1167 \cdot 10^3 \, \mathrm{Nmm}}{21{,}33 \cdot 10^4 \, \mathrm{mm}^4} = 5{,}470 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^3}$$

$$\sigma(y, z) = 4{,}051 \, \frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{mm}} \cdot z - 5{,}470 \, \frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{mm}} \cdot y$$

Nulllinie: $z = \frac{5{,}470}{4{,}051} y = 1{,}350 \, y$

Zahlenwerte:

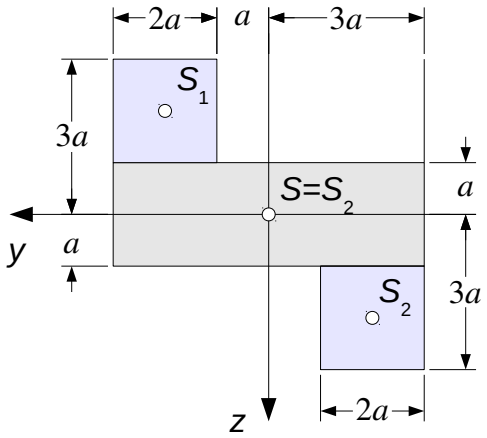
	y	z	σ
1	40	30	-97,27
2	40	50	-16,25
3	0	50	202,6
4	0	-50	-202,6
5	-40	-50	16,25
6	-40	-30	97,27
	mm	mm	MPa



Der Wert der größten Spannung ist 202,6 MPa. Die Punkte, in denen die betragsmäßig größte Spannung auftritt, haben den größten Abstand von der Nulllinie.

Aufgabe 8

a) <u>Flächenträgheitsmomente</u>



	Fläche 1	Fläche 2	Fläche 3	Summe
A_i	$4\,a^2$	$12\,a^2$	$4\,a^2$	
y_{Si}	$2\,a$	0	$-2\,a$	
z_{Si}	$-2\,a$	0	$2\,a$	
I_{Yi}	$\frac{4}{3}a^4$	$4\,a^4$	$\frac{4}{3}a^4$	$\frac{20}{3}a^4$

	Fläche 1	Fläche 2	Fläche 3	Summe
I_{Zi}	$\frac{4}{3}a^4$	$36\,a^4$	$\frac{4}{3}a^4$	$\frac{116}{3}a^4$
$z_{Si}^2 A_i$	$16\,a^4$	0	$16\,a^4$	$32\,a^4$
$y_{Si}^2 A_i$	$16\,a^4$	0	$16\,a^4$	$32\,a^4$
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	$16\,a^4$	0	$16\,a^4$	$32\,a^4$

Ergebnis:

$$I_y=\left(\frac{20}{3}+32\right)a^4=\frac{116}{3}a^4\,,\quad I_z=\left(\frac{116}{3}+32\right)a^4=\frac{212}{3}a^4\,,\quad I_{yz}=32\,a^4$$

b) <u>Hauptachsentransformation</u>

Hauptträgheitsmomente:

$$I_{1/2}=\frac{I_y+I_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}$$

$$\frac{I_y+I_z}{2}=\frac{116+212}{6}a^4=\frac{164}{3}a^4\,,\quad \frac{I_y-I_z}{2}=\frac{116-212}{6}a^4=\frac{164}{3}a^4=-16\,a^4$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}=\sqrt{16^2+32^2}\,a^4=16\,a^4\sqrt{1+2^2}=16\sqrt{5}\,a^4$$

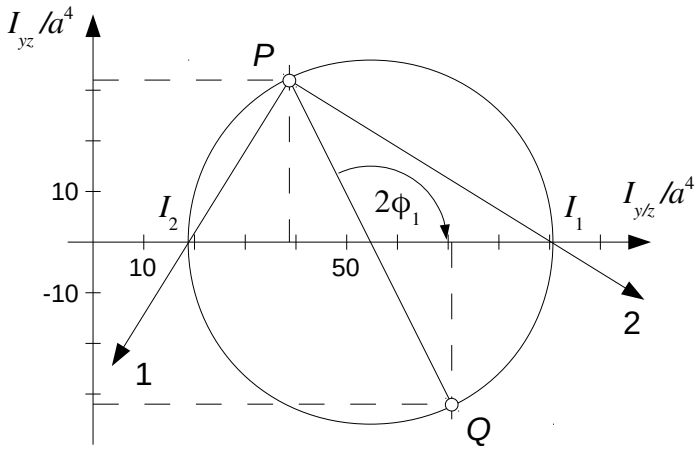
$$I_1=\left(\frac{164}{3}+16\sqrt{5}\right)a^4=90{,}44\,a^4\,,\quad I_2=\left(\frac{164}{3}-16\sqrt{5}\right)a^4=18{,}89\,a^4$$

Hauptachsen:

$$\tan(2\phi_H)=\frac{2\,I_{yz}}{I_y-I_z}=\frac{32\,a^4}{-16\,a^4}=-2\quad\rightarrow\quad \phi_H=-31{,}72\,°$$

$$I_{yz}>0\quad\rightarrow\quad \phi_1=-31{,}72\,°+90\,°=58{,}28\,°$$

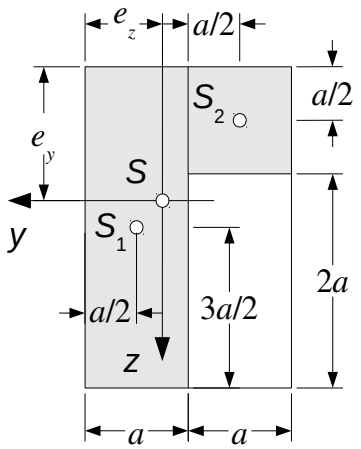
Mohrscher Trägheitskreis:



Aufgabe 9

a) <u>Flächenträgheitsmomente</u>

Aufteilung:



	Fläche 1	Fläche 2	Summe
A_i	$3\,a^2$	a^2	$4\,a^2$
y_{Si}	$e_z-\frac{a}{2}=\frac{1}{4}\,a$	$-\left(\frac{3}{2}\,a-e_z\right)=-\frac{3}{4}\,a$	

	Fläche 1	Fläche 2	Summe
z_{Si}	$\frac{3}{2}a-e_y=\frac{1}{4}a$	$-\left(e_y-\frac{a}{2}\right)=-\frac{3}{4}a$	
I_{Yi}	$\frac{(3a)^3 a}{12}=\frac{9}{4}a^4$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{7}{3}a^4$
I_{Zi}	$\frac{a^3\cdot 3a}{12}=\frac{1}{4}a^4$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{1}{3}a^4$
$z_{Si}^2 A_i$	$\frac{3}{16}a^4$	$\frac{9}{16}a^4$	$\frac{3}{4}a^4$
$y_{Si}^2 A_i$	$\frac{3}{16}a^4$	$\frac{9}{16}a^4$	$\frac{3}{4}a^4$
$-y_{Si}z_{Si}A_i$	$-\frac{3}{16}a^4$	$-\frac{9}{16}a^4$	$-\frac{3}{4}a^4$

$$I_y=\left(\frac{7}{3}+\frac{3}{4}\right)a^4=\frac{37}{12}a^4\,,\quad I_z=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)a^4=\frac{13}{12}a^4\,,\quad I_{yz}=-\frac{3}{4}a^4$$

b) <u>Hauptachsentransformation</u>

Hauptträgheitsmomente:

$$I_{1/2}=\frac{I_y+I_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}\,,\quad \frac{I_y+I_z}{2}=\frac{50}{24}a^4=\frac{25}{12}a^4$$

$$\frac{I_y-I_z}{2}=\frac{24}{24}a^4=a^4\,,\quad \sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}=\sqrt{1+\frac{9}{16}}a^4=\frac{5}{4}a^4$$

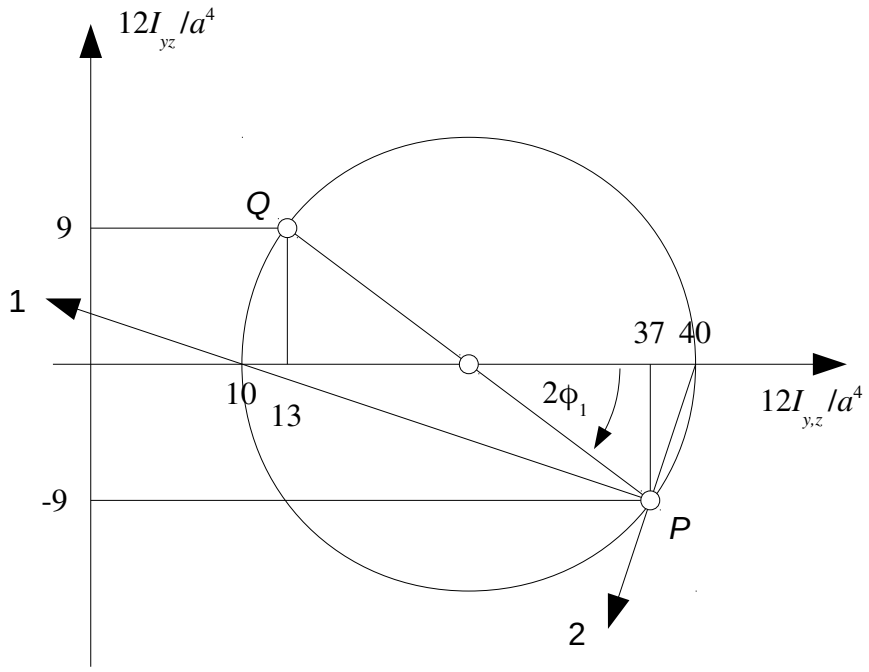
$$I_1=\left(\frac{25}{12}+\frac{5}{4}\right)a^4=\frac{40}{12}a^4=\frac{10}{3}a^4\,,\quad I_2=\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{4}\right)a^4=\frac{10}{12}a^4=\frac{5}{6}a^4$$

Richtung der ersten Hauptachse:

$$\tan(2\phi_H)=\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z}=-\frac{3}{4}\ \rightarrow\ \phi_H=-18{,}43°$$

$$I_{yz}<0\ \rightarrow\ \phi_1=-18{,}43°$$

Mohrscher Trägheitskreis:



Aufgabe 10

a) <u>Flächenträgheitsmomente</u>

	Äußeres Rechteck	Inneres Rechteck	Summe
A	$10\cdot 6=60$	$-3\cdot 4=-12$	48
I_Y	$\frac{10\cdot 6^3}{12}=180$	$-\frac{4\cdot 3^3}{12}=-9$	171
I_Z	$\frac{10^3\cdot 6}{12}=500$	$-\frac{4^3\cdot 3}{12}=-16$	484
y_S	$e_z-5=0{,}5$	$e_z-3=2{,}5$	
z_S	$e_y-3=0{,}125$	$e_y-2{,}5=0{,}625$	
$y_S^2 A$	15	-75	-60
$z_S^2 A$	0,9375	-4,6875	-3,75
$-y_S z_S A$	-3,75	18,75	15,00

Ergebnis:

$$I_y = 171\,\text{cm}^4 - 3{,}75\,\text{cm}^4 = 167{,}25\,\text{cm}^4$$

$$I_z = 484\,\text{cm}^4 - 60\,\text{cm}^4 = 424\,\text{cm}^4$$

$$I_{yz} = 15\,\text{cm}^4$$

b) <u>Hauptträgheitsmomente</u>

$$I_{1/2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{167{,}25 + 424}{2}\,\text{cm}^4 = 295{,}625\,\text{cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{167{,}25 - 424}{2}\,\text{cm}^4 = -128{,}375\,\text{cm}^4$$

$$\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2 = 16705\,\text{cm}^4\,,\quad \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 129{,}2\,\text{cm}^4$$

$$I_1 = 424{,}9\,\text{cm}^4\,,\quad I_2 = 166{,}4\,\text{cm}^4$$

c) <u>Hauptachsen</u>

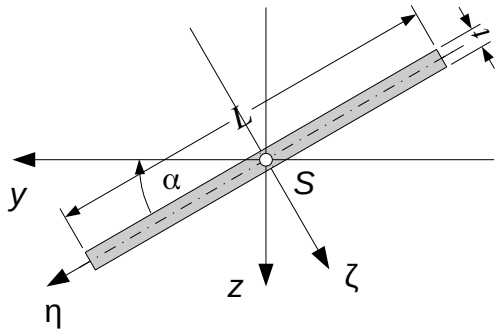
$$\tan(2\phi_H) = \frac{2\,I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{30}{167{,}25 - 425} = \frac{30}{-257{,}75} = -0{,}1164$$

$$\rightarrow\ 2\phi_H = -6{,}639\,° \ \rightarrow\ \phi_H = -3{,}319\,°$$

$$I_{yz} > 0 \ \rightarrow\ \phi_1 = -3{,}319\,° + 90\,° = 86{,}68\,°$$

Aufgabe 11

<u>Lösungweg 1: Transformation</u>



Im ηζ-Koordinatensystem gilt:

$$I_\eta = I_{\eta\zeta} = 0,\quad I_\zeta = \frac{1}{12} L^3 t$$

Das *yz*-Koordinatensystem geht durch Drehung um den Winkel -α aus dem ηζ-Koordinatensystem hervor.

Die Transformationsformeln lauten:

$$I_y = \frac{I_\eta + I_\zeta}{2} + \frac{I_\eta - I_\zeta}{2}\cos(-2\alpha) + I_{\eta\zeta}\sin(-2\alpha) = \frac{L^3 t}{24}\left(1-\cos(2\alpha)\right)$$

$$I_z = \frac{I_\eta + I_\zeta}{2} - \frac{I_\eta - I_\zeta}{2}\cos(-2\alpha) - I_{\eta\zeta}\sin(-2\alpha) = \frac{L^3 t}{24}\left(1+\cos(2\alpha)\right)$$

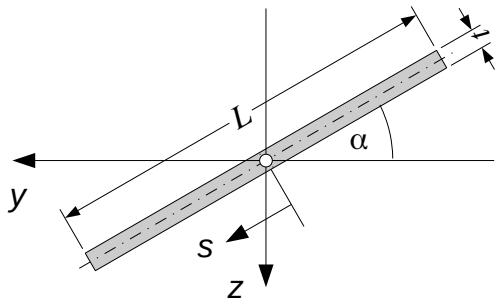
$$I_{yz} = -\frac{I_\eta - I_\zeta}{2}\sin(-2\alpha) + I_{\eta\zeta}\cos(-2\alpha) = -\frac{L^3 t}{24}\sin(2\alpha)$$

<u>Lösungsweg 2: Integration</u>

$$y = s\cos(\alpha)$$

$$z = s\sin(\alpha)$$

$$dA = t\,ds$$



$$I_y = \int_{-L/2}^{L/2} z^2 t\,ds = \int_{-L/2}^{L/2} s^2 ds\, t\sin^2(\alpha) = t\sin^2(\alpha)\left[\frac{s^3}{3}\right]_{s=-L/2}^{s=L/2} = \frac{L^3 t}{12}\sin^2(\alpha)$$

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 t\,ds = \int_{-L/2}^{L/2} s^2 ds\, t\cos^2(\alpha) = \frac{L^3 t}{12}\cos^2(\alpha)$$

$$I_{yz} = -\int_{-L/2}^{L/2} y z\, t\,ds = -\int_{-L/2}^{L/2} s^2 ds\, t\sin(\alpha)\cos(\alpha) = -\frac{L^3 t}{12}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Mit

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\alpha)\right),\quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\alpha)\right)$$

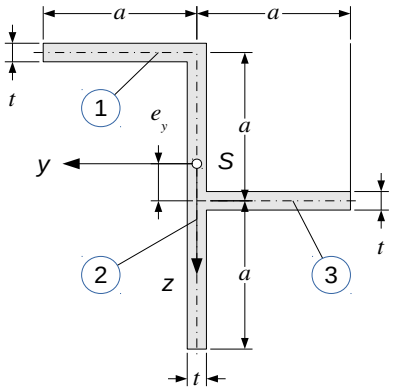
$$\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

folgt:

$$I_y = \frac{L^3 t}{24}\left(1-\cos(2\alpha)\right),\quad I_z = \frac{L^3 t}{24}\left(1+\cos(2\alpha)\right),\quad I_{yz} = -\frac{L^3 t}{24}\sin(2\alpha)$$

Aufgabe 12

a) Flächenträgheitsmomente



	1	2	3	∑
A	$a\,t$	$2\,a\,t$	$a\,t$	$4\,a\,t$
I_Y	0	$\frac{2}{3}a^3 t$	0	$\frac{2}{3}a^3 t$
I_Z	$\frac{1}{12}a^3 t$	0	$\frac{1}{12}a^3 t$	$\frac{1}{6}a^3 t$
y_S	$\frac{1}{2}a$	0	$-\frac{1}{2}a$	
z_S	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	
$z_S^2 A$	$\frac{9}{16}a^3 t$	$\frac{2}{16}a^3 t$	$\frac{1}{16}a^3 t$	$\frac{3}{4}a^3 t$
$y_S^2 A$	$\frac{1}{4}a^3 t$	0	$\frac{1}{4}a^3 t$	$\frac{1}{2}a^3 t$
$-y_S z_S A$	$\frac{3}{8}a^3 t$	0	$\frac{1}{8}a^3 t$	$\frac{1}{2}a^3 t$

Ergebnis: $I_y=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)a^3 t=\frac{17}{12}a^3 t$, $I_z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)a^3 t=\frac{2}{3}a^3 t$, $I_{yz}=\frac{1}{2}a^3 t$

b) Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen

$$\frac{I_y+I_z}{2}=\frac{17+8}{24}a^3 t=\frac{25}{24}a^3 t$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{17-8}{24} a^3 t = \frac{9}{24} a^3 t = \frac{3}{8} a^3 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}} a^3 t = \sqrt{\frac{25}{64}} a^3 t = \frac{5}{8} a^3 t$$

Hauptträgheitsmomente:

$$I_1 = \left(\frac{25}{24} + \frac{15}{24}\right) a^3 t = \frac{40}{24} a^3 t = \frac{5}{3} a^3 t$$

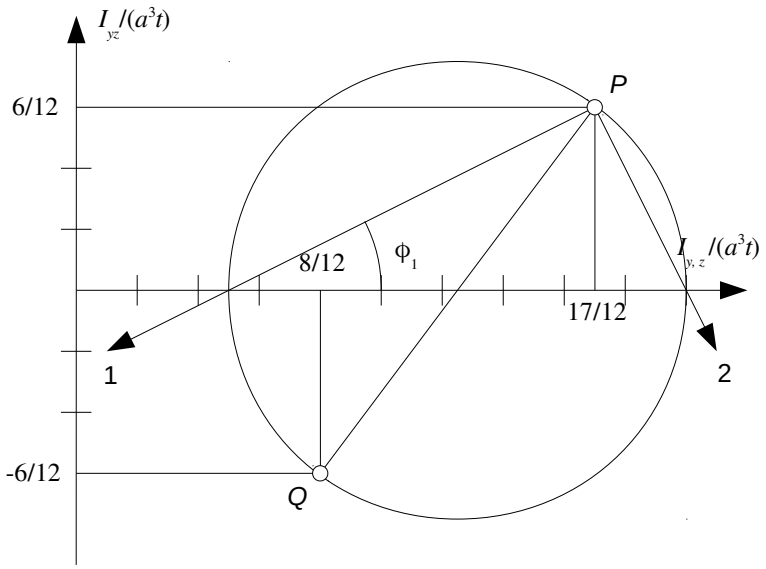
$$I_2 = \left(\frac{25}{24} - \frac{15}{24}\right) a^3 t = \frac{10}{24} a^3 t = \frac{5}{12} a^3 t$$

Richtung der ersten Hauptachse:

$$\tan(2\phi_H) = \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{8}{3}\frac{1}{2} = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad 2\phi_H = 53{,}13\,°$$

$$I_{yz} > 0 \quad \rightarrow \quad \phi_1 = 26{,}57\,°$$

c) <u>Mohrscher Trägheitskreis</u>

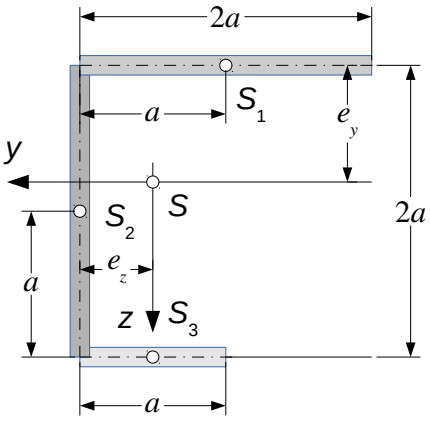


Aufgabe 13

a) <u>Flächenträgheitsmomente</u>

Aufteilung des Querschnitts:

1 Oberer Flansch
2 Steg
3 Unterer Flansch



	1	2	3	Σ
A	$2at$	$2at$	at	$5at$
y_S	$-\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	
z_S	$-\frac{4}{5}a$	$\frac{a}{5}$	$\frac{6}{5}a$	
I_Y	0	$\frac{2}{3}a^3t$	0	$\frac{2}{3}a^3t$
I_Z	$\frac{2}{3}a^3t$	0	$\frac{a^3t}{12}$	$\frac{3}{4}a^3t$
$z_s^2 A$	$\frac{32}{25}a^3t$	$\frac{2}{25}a^3t$	$\frac{36}{25}a^3t$	$\frac{14}{5}a^3t$
$y_S^2 A$	$\frac{1}{2}a^3t$	$\frac{1}{2}a^3t$	0	a^3t
$-y_S z_S A$	$-\frac{4}{5}a^3t$	$-\frac{1}{5}a^3t$	0	$-a^3t$

Ergebnis:

$$I_y=\left(\frac{2}{3}+\frac{14}{5}\right)a^3t=\frac{52}{15}a^3t$$

$$I_z=\left(\frac{3}{4}+1\right)a^3t=\frac{7}{4}a^3t$$

$$I_{yz}=-a^3t$$

b) <u>Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen</u>

$$\frac{I_y+I_z}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{52}{15}+\frac{7}{4}\right)a^3t=\frac{313}{120}a^3t=2{,}608\,a^3t$$

$$\frac{I_y-I_z}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{52}{15}-\frac{7}{4}\right)a^3t=\frac{103}{120}a^3t=0{,}8583\,a^3t$$

$$\sqrt{\left(\frac{103}{120}\right)^2+1}\,a^3t=\sqrt{1{,}737}\,a^3t=1{,}318\,a^3t$$

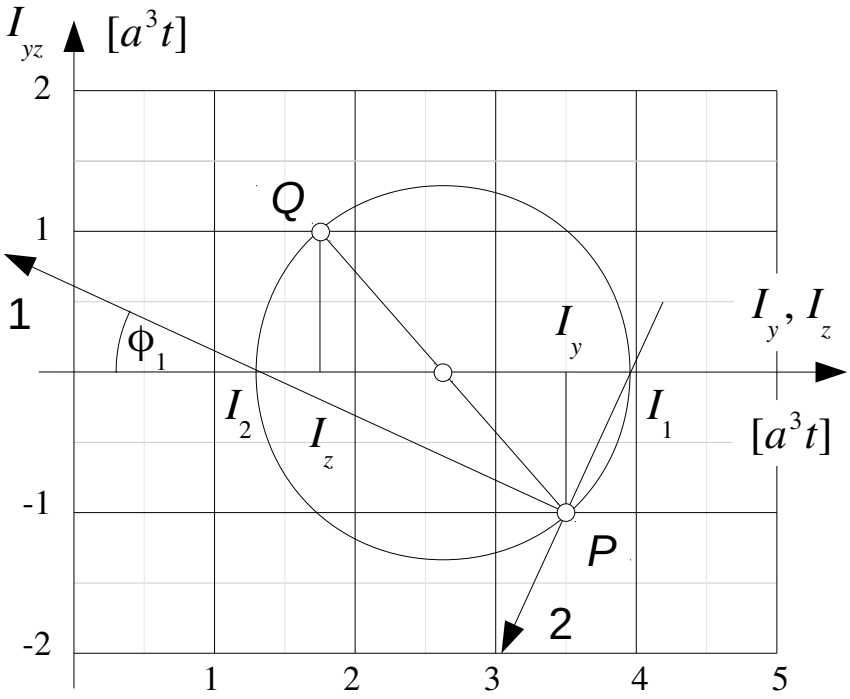
$$I_{1/2}=(2{,}608\pm1{,}318)\,a^3t:$$

$$I_1=3{,}926\,a^3t\ ,\ \ I_2=1{,}290\,a^3t$$

$$\tan(2\phi_H)=-\frac{120}{103}\quad\rightarrow\quad 2\phi_H=-49{,}36\,°$$

$$I_{yz}<0\quad\rightarrow\quad \phi_1=-24{,}68\,°$$

c) <u>Mohrscher Trägheitskreis</u>



Aufgabe 14

a) <u>Spannung in Punkt *A*</u>

Ersatzmomente:

$$1-\frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}=1-\frac{28{,}80^2}{44{,}7\cdot 30{,}1}=0{,}3835$$

$$\bar{M}_y=\frac{M_y-M_z I_{yz}/I_z}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}$$

$$\rightarrow\ \bar{M}_y=\frac{4-28{,}80/30{,}10}{0{,}3835}\,\text{kNm}=\frac{3{,}043}{0{,}3835}\,\text{kNm}=7{,}935\,\text{kNm}$$

$$\bar{M}_z=\frac{M_z-M_y I_{yz}/I_y}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}$$

$$\rightarrow\ \bar{M}_z=\frac{1-4\cdot 28{,}80/44{,}70}{0{,}3835}\,\text{kNm}=\frac{-1{,}577}{0{,}3835}\,\text{kNm}=-4{,}112\,\text{kNm}$$

Gleichung der Nulllinie:

$$z=\frac{\bar{M}_z}{\bar{M}_y}\frac{I_y}{I_z}y=\frac{-4{,}112}{7{,}935}\cdot\frac{44{,}7}{30{,}1}y=-0{,}7696\,y$$

Spannung im Punkt *A*:

$$\sigma_x=\frac{\bar{M}_y}{I_y}z_A-\frac{\bar{M}_z}{I_z}y_A\ :$$

$$y_A=-\frac{s}{2}=-2{,}5\,\text{mm}\ ,\ \ z_A=-\frac{h}{2}=-30\,\text{mm}$$

$$\frac{\bar{M}_y}{I_y}=\frac{7{,}935\cdot 10^6\,\text{Nmm}}{44{,}7\cdot 10^4\,\text{mm}^4}=17{,}75\,\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$$

$$\frac{\bar{M}_z}{I_z}=\frac{-4{,}112\cdot 10^6\,\text{Nmm}}{30{,}1\cdot 10^4\,\text{mm}^4}=-13{,}66\,\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$$

$$\sigma_x=-17{,}75\,\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}\cdot 30\,\text{mm}-13{,}66\,\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}\cdot 2{,}5\,\text{mm}=-566{,}7\,\text{MPa}$$

b) <u>Hauptachsentransformation</u>

Hauptträgheitsmomente:

$$\frac{I_y+I_z}{2}=\frac{44{,}7+30{,}1}{2}\,\text{cm}^4=37{,}4\,\text{cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{44{,}7 - 30{,}1}{2}\,\text{cm}^4 = 7{,}3\,\text{cm}^4$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{7{,}3^2 + 28{,}8^2}\,\text{cm}^4 = \sqrt{882{,}7}\,\text{cm}^4 = 29{,}71\,\text{cm}^4$$

$$I_1 = 37{,}4\,\text{cm}^4 + 29{,}71\,\text{cm}^4 = 67{,}11\,\text{cm}^4$$

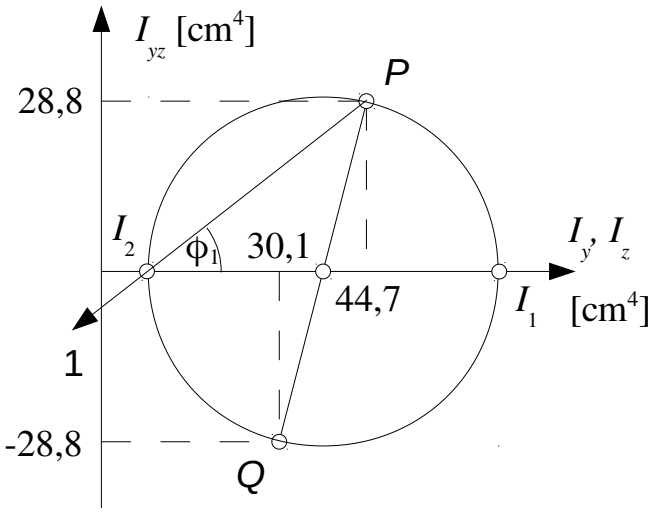
$$I_2 = 37{,}4\,\text{cm}^4 - 29{,}71\,\text{cm}^4 = 7{,}69\,\text{cm}^4$$

Richtung der 1. Hauptachse:

$$\tan(2\phi_H) = \frac{2\,I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{28{,}80}{7{,}3} = 3{,}945 \;\rightarrow\; \phi_H = 37{,}89\,°$$

$$I_{yz} > 0 \;\rightarrow\; \phi_1 = 37{,}89\,°$$

c) <u>Mohrscher Trägheitskreis</u>



Aufgabe 15

a) <u>Flächenträgheitsmomente</u>

	Steg	Flansch	Summe
A	$6\,a\,t$	$3\,a\,t$	$9\,a\,t$
y_S	$e_z = \frac{a}{2}$	$-\frac{3}{2}a + e_z = -a$	

	Steg	Flansch	Summe
z_S	$3a-e_y=a$	$-e_y=-2a$	
I_y	$\frac{(6a)^3 t}{12}=18a^3 t$	0	$18a^3 t$
I_z	0	$\frac{(3a)^3 t}{12}=\frac{9}{4}a^3 t$	$\frac{9}{4}a^3 t$
$z_S^2 A$	$6a^3 t$	$12a^3 t$	$18a^3 t$
$y_S^2 A$	$\frac{3}{2}a^3 t$	$3a^3 t$	$\frac{9}{2}a^3 t$
$-y_S z_S A$	$-3a^3 t$	$-6a^3 t$	$-9a^3 t$

$$I_y=(18+18)a^3 t=36a^3 t\,,\quad I_z=\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)a^3 t=\frac{27}{4}a^3 t\,,\quad I_{yz}=-9a^3 t$$

b) <u>Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen</u>

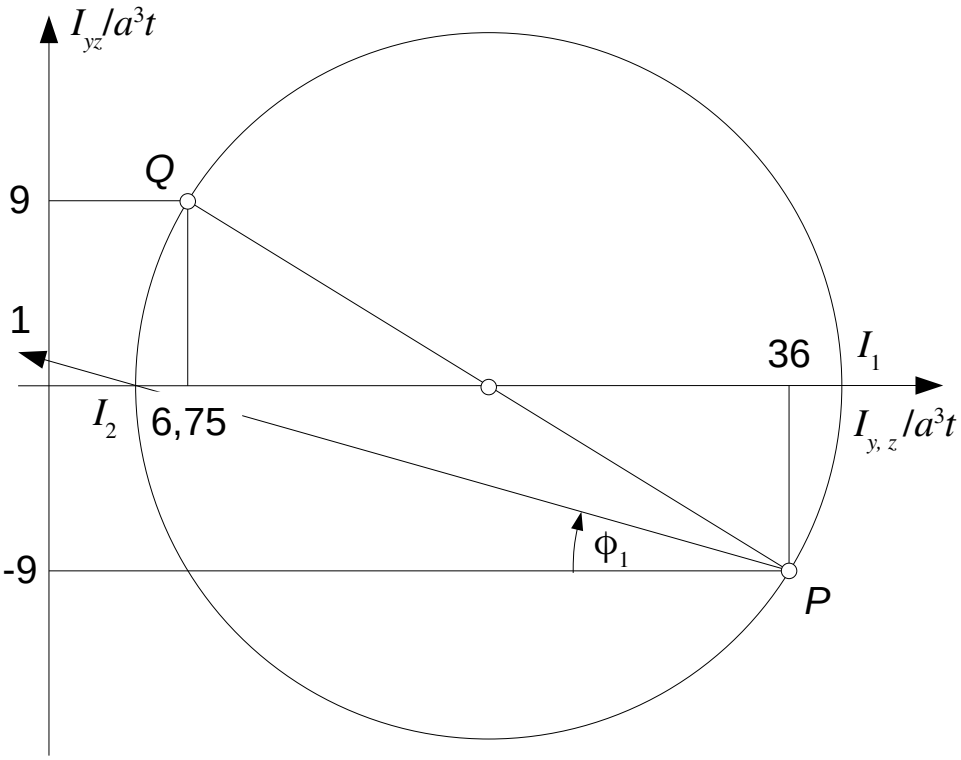
$$\frac{I_y+I_z}{2}=\frac{4\cdot 36+27}{8}a^3 t=\frac{171}{8}a^3 t=21{,}375\,a^3 t$$

$$\frac{I_y-I_z}{2}=\frac{4\cdot 36-27}{8}a^3 t=\frac{117}{8}a^3 t=14{,}625\,a^3 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}=\sqrt{294{,}89}\,a^3 t=17{,}17\,a^3 t$$

$$I_1=38{,}55\,a^3 t\,,\quad I_2=4{,}203\,a^3 t$$

$$\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z}=\frac{-9\cdot 8}{117}=-\frac{8}{13}\quad\rightarrow\quad 2\phi_H=-31{,}61\,°$$

$$I_{yz}<0\quad\rightarrow\quad \phi_1=-15{,}80\,°$$

c) <u>Mohrscher Trägheitskreis</u>