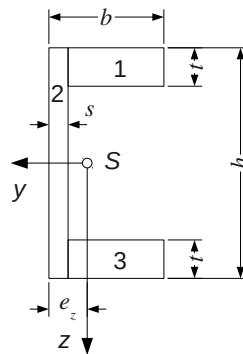


3.2 Flächenträgheitsmomente

Lösungen

Aufgabe 1

Teilflächen:



a) Schwerpunktsabstand

		A_i	e_{zi}	$e_{zi} A_i$
1	Oberer Gurt	$(b-s)t$	$s + \frac{b-s}{2}$	$\frac{b+s}{2}(b-s)t$
2	Steg	$h s$	$\frac{s}{2}$	$\frac{1}{2} h s^2$
3	Unterer Gurt	$(b-s)t$	$s + \frac{b-s}{2}$	$\frac{b+s}{2}(b-s)t$
	Summe	$2(b-s)t + h s$		$(b^2 - s^2)t + \frac{1}{2} h s^2$

Ergebnis:
$$e_z = \frac{(b^2 - s^2)t + h s^2 / 2}{2(b-s)t + h s}$$

Zahlenwert:
$$e_z = \frac{(50^2 - 6^2) \cdot 8,5 + 100 \cdot 6^2 / 2}{2 \cdot (50 - 6) \cdot 8,5 + 100 \cdot 6} \text{ mm} = \underline{16,87 \text{ mm}}$$

b) Flächenträgheitsmomente

	1	2	3
A_i	$(b-s)t$	$h s$	$(b-s)t$
y_{Si}	$-(b-e_z) + \frac{b-s}{2}$ $= e_z - \frac{b+s}{2}$	$e_z - \frac{s}{2}$	$e_z - \frac{b+s}{2}$
z_{Si}	$-\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$	0	$\frac{h}{2} - \frac{t}{2}$
I_{Yi}	$\frac{(b-s)t^3}{12}$	$\frac{h^3 s}{12}$	$\frac{(b-s)t^3}{12}$
I_{Zi}	$\frac{(b-s)^3 t}{12}$	$\frac{h s^3}{12}$	$\frac{(b-s)^3 t}{12}$
$z_{Si}^2 A_i$	$\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)^2 (b-s)t$	0	$\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)^2 (b-s)t$
$y_{Si}^2 A_i$	$\left(e_z - \frac{b+s}{2}\right)^2 (b-s)t$	$\left(e_z - \frac{s}{2}\right)^2 h s$	$\left(e_z - \frac{b+s}{2}\right)^2 (b-s)t$

Zahlenwerte:

	1	2	3	Summe	
A_i	3,74	6	3,74	13,48	cm ²
y_{Si}	-11,13	13,87	-11,13		mm
z_{Si}	-45,75	0	45,75		mm
I_{Yi}	0,2252	50,00	0,2252	50,45	cm ⁴
I_{Zi}	6,034	0,1800	6,034	12,25	cm ⁴
$z_{Si}^2 A_i$	78,28	0	78,28	156,6	cm ⁴
$y_{Si}^2 A_i$	4,633	11,54	4,633	20,81	cm ⁴

Ergebnis: $I_y = (50,45 + 156,6) \text{ cm}^4 = \underline{207,0 \text{ cm}^4}$ $I_z = (12,25 + 20,81) \text{ cm}^4 = \underline{33,06 \text{ cm}^4}$ c) Widerstandsmomente

Mit

$$|y|_{\max} = b - e_z = 50 \text{ mm} - 16,87 \text{ mm} = 33,13 \text{ mm} = 3,313 \text{ cm}$$

und

$$|z|_{\max} = \frac{h}{2} = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}$$

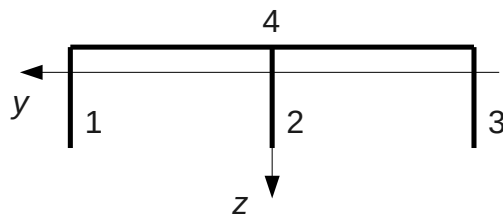
gilt:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{\max}} = \frac{207,0 \text{ cm}^3}{5 \text{ cm}} = \underline{41,4 \text{ cm}^3}$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{33,06 \text{ cm}^4}{3,313 \text{ cm}} = \underline{9,979 \text{ cm}^3}$$

Aufgabe 2

Teilflächen:



Schwerpunktsabstand:

	1	2	3	4	Summe
A_i	at	at	at	$4 at$	$7 at$
e_{yi}	$a/2$	$a/2$	$a/2$	0	
$e_{yi} A_i$	$a^2 t/2$	$a^2 t/2$	$a^2 t/2$	0	$3 a^2 t/2$

Ergebnis: $e_y = \frac{3 a^2 t}{14 at} = \frac{3}{14} a$

Flächenträgheitsmomente:

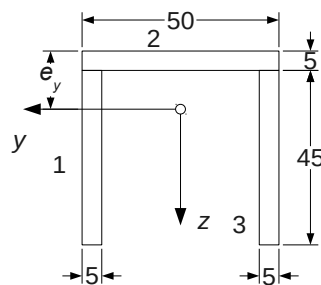
	1	2	3	4	Summe
A_i	at	at	at	$4 at$	$7 at$
y_{Si}	$2 a$	0	$-2 a$	0	
z_{Si}	$\frac{2}{7} a$	$\frac{2}{7} a$	$\frac{2}{7} a$	$-\frac{3}{14} a$	
I_{yi}	$\frac{a^3 t}{12}$	$\frac{a^3 t}{12}$	$\frac{a^3 t}{12}$	0	$\frac{a^3 t}{4}$

	1	2	3	4	Summe
I_{Zi}	0	0	0	$\frac{4^3 a^3 t}{12}$	$\frac{16 a^3 t}{3}$
$z_{Si}^2 A_i$	$\frac{4}{49} a^3 t$	$\frac{4}{49} a^3 t$	$\frac{4}{49} a^3 t$	$\frac{9}{49} a^3 t$	$\frac{3}{7} a^3 t$
$y_{Si}^2 A_i$	$4 a^3 t$	0	$4 a^3 t$	0	$8 a^3 t$

Ergebnis: $I_y = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{7} \right) a^3 t = \frac{19}{28} a^3 t$, $I_z = \left(\frac{16}{3} + 8 \right) a^3 t = \frac{40}{3} a^3 t$

Aufgabe 3

Teilflächen:



Schwerpunktsabstand:

		A_i	e_{yi}	$e_{yi} A_i$
1	Linker Steg	225	27,5	6187,5
2	Oberer Gurt	250	2,5	625
3	Rechter Steg	225	27,5	6187,5
	Summe	700		13000
		mm ²	mm	mm ³

Ergebnis: $e_y = \frac{13000 \text{ mm}^3}{700 \text{ mm}^2} = \underline{18,57 \text{ mm}}$

Flächenträgheitsmomente:

	1	2	3	Summe	
A_i	2,25	2,50	2,25	7,00	cm ²
y_{Si}	22,5	0	-22,5		mm

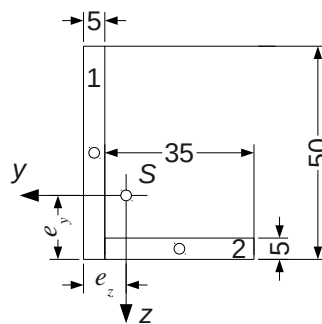
	1	2	3	Summe	
z_{Si}	8,93	-16,07	8,93		mm
I_{yi}	3,797	0,0521	3,797	7,646	cm ⁴
I_{zi}	0,0469	5,208	0,0469	5,302	cm ⁴
$z_{Si}^2 A_i$	1,794	6,456	1,794	10,04	cm ⁴
$y_{Si}^2 A_i$	11,39	0	11,39	22,78	cm ⁴

Ergebnis: $I_y = 7,646 \text{ cm}^4 + 10,04 \text{ cm}^4 = \underline{17,69 \text{ cm}^4}$

$I_z = 5,302 \text{ cm}^4 + 22,78 \text{ cm}^4 = \underline{28,08 \text{ cm}^4}$

Aufgabe 4

Teilflächen:



a) Schwerpunkt

	1	2	Summe	
A_i	250	175	425	mm ²
e_{yi}	25	2,5		mm
e_{zi}	2,5	22,5		mm
$e_{yi} A_i$	6250	437,5	6688	mm ³
$e_{zi} A_i$	625	3938	4563	mm ³

Ergebnis: $e_y = \frac{6688 \text{ mm}^3}{425 \text{ mm}^2} = \underline{15,74 \text{ mm}}$, $e_z = \frac{4563 \text{ mm}^3}{425 \text{ mm}^2} = \underline{10,74 \text{ mm}}$

b) Flächenträgheitsmomente

	1	2	Summe	
A_i	250	175	425	mm ²
y_{Si}	8,24	-11,76		mm
z_{Si}	-9,26	13,24		mm
I_{Yi}	52080	364,6	52440	mm ⁴
I_{Zi}	520,8	17860	18380	mm ⁴
$z_{Si}^2 A_i$	21440	30680	52120	mm ⁴
$y_{Si}^2 A_i$	16970	24200	41170	mm ⁴
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	19080	27250	46330	mm ⁴

Ergebnis: $I_y = (52440 + 52120) \text{ mm}^4 = \underline{10,46 \text{ cm}^4}$

$$I_z = (18380 + 41170) \text{ mm}^4 = \underline{5,96 \text{ cm}^4}$$

$$I_{yz} = \underline{4,63 \text{ cm}^4}$$

Trägheitsradien:

$$i_y = \sqrt{\frac{10,46 \text{ cm}^4}{4,25 \text{ cm}^2}} = \underline{1,57 \text{ cm}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{5,96 \text{ cm}^4}{4,25 \text{ cm}^2}} = \underline{1,18 \text{ cm}}$$

c) Hauptachsentransformation

Hauptträgheitsmomente:

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{10,46 + 5,96}{2} \text{ cm}^4 = 8,21 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{10,46 - 5,96}{2} \text{ cm}^4 = 2,25 \text{ cm}^4$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{2,25^2 + 4,63^2} \text{ cm}^4 = 5,148 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 8,21 \text{ cm}^4 + 5,148 \text{ cm}^4 = \underline{13,36 \text{ cm}^4}$$

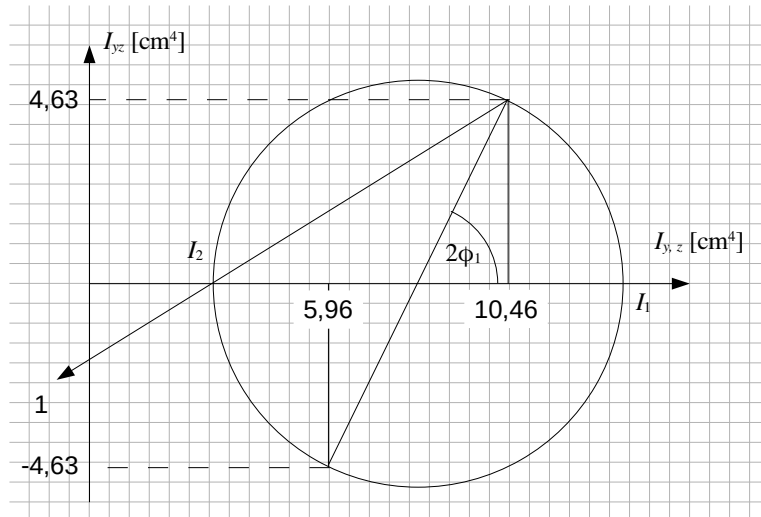
$$I_2 = 8,21 \text{ cm}^4 - 5,148 \text{ cm}^4 = \underline{3,06 \text{ cm}^4}$$

Hauptachsen:

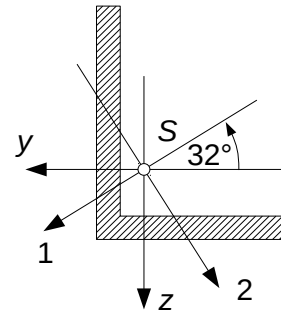
$$\tan(2\phi_H) = \frac{2 \cdot 4,63}{10,46 - 5,96} = 2,057 \rightarrow 2\phi_H = 64,08^\circ$$

$$I_{yz} > 0 \rightarrow \phi_1 = 32,04^\circ$$

Mohrscher Trägheitskreis:



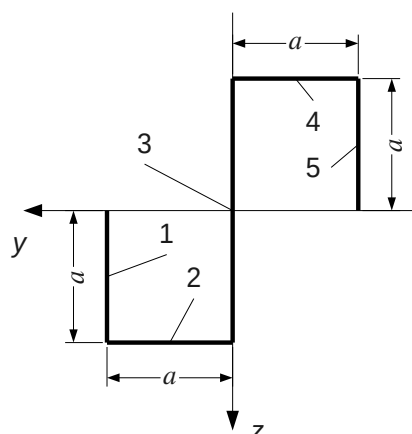
Lage der Hauptachsen:



Aufgabe 5

Flächenträgheitsmomente

Teilflächen:



	Profil 1	Profil 2	Profil 3	Profil 4	Profil 5	Summe
A_i	ta	ta	$2ta$	ta	ta	$6ta$
y_{Si}	a	$a/2$	0	$-a/2$	$-a$	
z_{Si}	$a/2$	a	0	$-a$	$-a/2$	
I_{Yi}	$a^3 t/12$	0	$8a^3 t/12$	0	$a^3 t/12$	$10a^3 t/12$
I_{Zi}	0	$a^3 t/12$	0	$a^3 t/12$	0	$2a^3 t/12$
$z_{Si}^2 A_i$	$a^3 t/4$	$a^3 t$	0	$a^3 t$	$a^3 t/4$	$5a^3 t/2$
$y_{Si}^2 A_i$	$a^3 t$	$a^3 t/4$	0	$a^3 t/4$	$a^3 t$	$5a^3 t/2$
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	$-a^3 t/2$	$-a^3 t/2$	0	$-a^3 t/2$	$-a^3 t/2$	$-2a^3 t$

Ergebnis: $I_y = \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{2}\right) a^3 t = \frac{10}{3} a^3 t$, $I_z = \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{2}\right) a^3 t = \frac{8}{3} a^3 t$, $I_{yz} = -2a^3 t$

Hauptachsentransformation

Hauptträgheitsmomente:

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{10+8}{6} a^3 t = 3a^3 t, \quad \frac{I_y - I_z}{2} = \frac{10-8}{6} a^3 t = \frac{1}{3} a^3 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 4} a^3 t = \frac{\sqrt{37}}{3} a^3 t$$

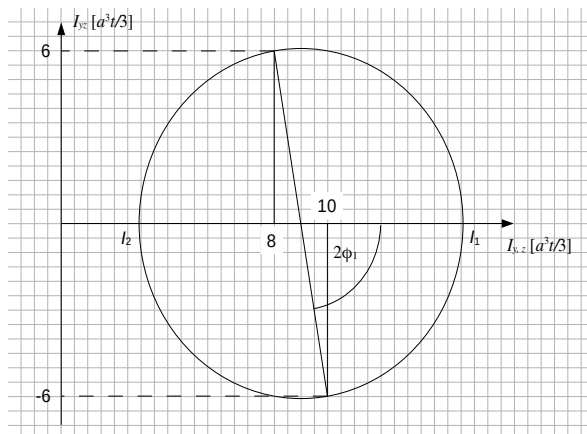
$$I_1 = \left(3 + \frac{\sqrt{37}}{3}\right) a^3 t = 5,028 a^3 t, \quad I_2 = \left(3 - \frac{\sqrt{37}}{3}\right) a^3 t = 0,9724 a^3 t$$

Hauptachsen:

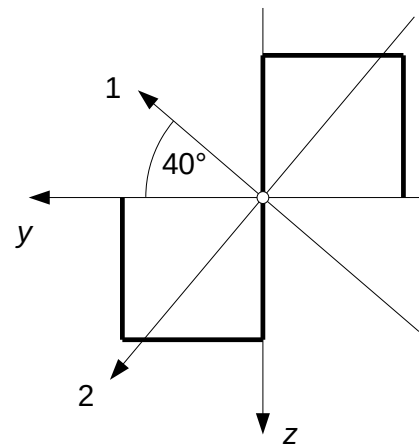
$$\tan(2\phi_H) = \frac{-4a^3 t}{\frac{10}{3}a^3 t - \frac{8}{3}a^3 t} = -\frac{12}{2} = -6 \rightarrow 2\phi_H = -80,54^\circ$$

$$I_{yz} < 0 \rightarrow \phi_1 = -40,27^\circ$$

Mohr'scher Trägheitskreis:



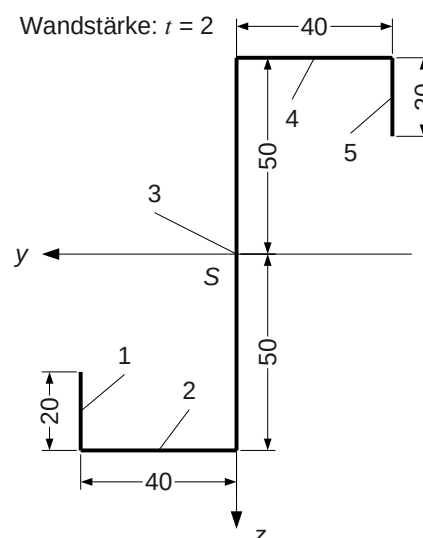
Lage der Hauptachsen:



Aufgabe 6

a) Flächenträgheitsmomente

Teilflächen:



	Profil 1	Profil 2	Profil 3	Profil 4	Profil 5	Summe	
A_i	40	80	200	80	40	440	mm ²
y_{Si}	40	20	0	-20	-40		mm
z_{Si}	40	50	0	-50	-40		mm
I_{Yi}	1333	0	166700	0	1333	169400	mm ⁴
I_{Zi}	0	10670	0	10670	0	21340	mm ⁴
$z_{Si}^2 A_i$	64000	200000	0	200000	64000	528000	mm ⁴
$y_{Si}^2 A_i$	64000	32000	0	32000	64000	192000	mm ⁴
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	-64000	-80000	0	-80000	-64000	-288000	mm ⁴

Ergebnis: $I_y = (169400 + 528000) \text{ mm}^4 = \underline{69,74 \text{ cm}^4}$

$$I_z = (21340 + 192000) \text{ mm}^4 = \underline{21,33 \text{ cm}^4}$$

$$I_{yz} = \underline{-28,80 \text{ cm}^4}$$

Trägheitsradien: $i_y = \sqrt{\frac{69,74 \text{ cm}^4}{4,40 \text{ cm}^2}} = \underline{3,98 \text{ cm}}$, $i_z = \sqrt{\frac{21,33 \text{ cm}^4}{4,40 \text{ cm}^2}} = \underline{2,20 \text{ cm}}$

b) Hauptachsentransformation

Hauptträgheitsmomente:

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{69,74 + 21,33}{2} \text{ cm}^4 = 45,54 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{69,74 - 21,33}{2} \text{ cm}^4 = 24,21 \text{ cm}^4$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{24,21^2 + 28,80^2} \text{ cm}^4 = 37,62 \text{ cm}^4$$

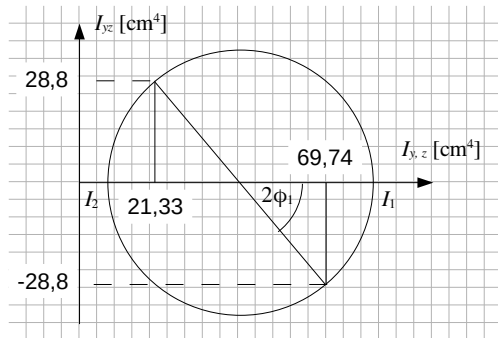
$$I_1 = (45,54 + 37,62) \text{ cm}^4 = \underline{83,16 \text{ cm}^4}, \quad I_2 = (45,54 - 37,62) \text{ cm}^4 = \underline{7,92 \text{ cm}^4}$$

Hauptachsen:

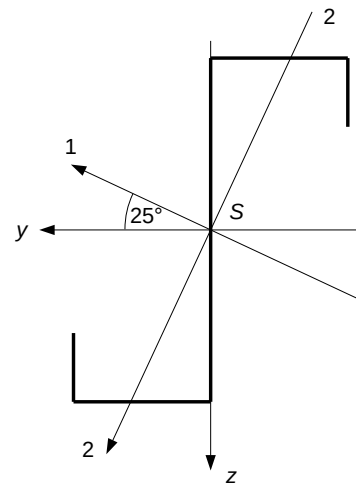
$$\tan(2\phi_H) = \frac{-2 \cdot 28,80}{69,74 - 21,33} = -1,190 \rightarrow 2\phi_H = -49,95^\circ$$

$$I_{yz} < 0 \rightarrow \phi_1 = -24,98^\circ$$

Mohrscher Trägheitskreis:



Lage der Hauptachsen:



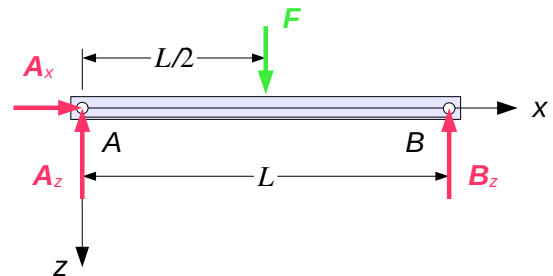
Aufgabe 7

Die größte Spannung tritt im Querschnitt mit dem größten Biegemoment auf.

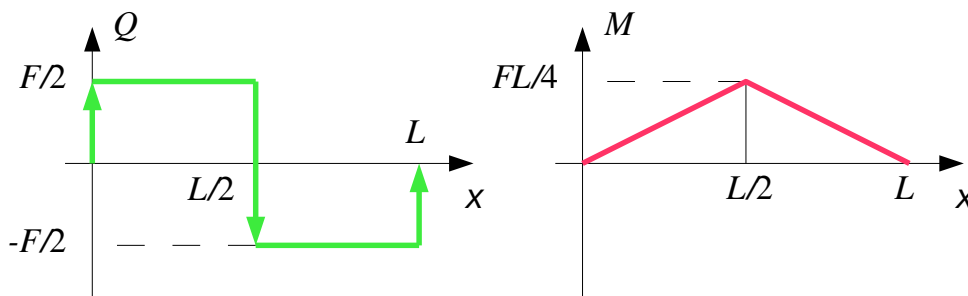
Lagerkräfte

$$\sum M^A = 0 : -\frac{L}{2}F + L B_z = 0 \rightarrow B_z = \frac{F}{2}$$

$$\sum M^B = 0 : -L A_z + \frac{L}{2}F = 0 \rightarrow A_z = \frac{F}{2}$$



Schnittlasten



Das größte Biegemoment tritt in der Mitte auf. Es hat den Wert

$$M_{ymax} = \frac{1}{4} F L$$

Zahlenwert: $M_{ymax} = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 1000 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1250 \text{ Nm}$

Normalspannung

Für die Normalspannung gilt:

$$\sigma(y, z) = \frac{\bar{M}_y}{I_y} z - \frac{\bar{M}_z}{I_z} y$$

Die Flächenträgheitsmomente wurden in Aufgabe 6 berechnet:

$$I_y = 69,74 \text{ cm}^4, \quad I_z = 21,33 \text{ cm}^4, \quad I_{yz} = -28,80 \text{ cm}^4$$

Damit gilt:

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{28,80^2}{69,74 \cdot 21,33} = 0,4424, \quad \frac{I_{yz}}{I_y} = -0,4130$$

$$\bar{M}_y = \frac{1250 \text{ Nm}}{0,4424} = 2825 \text{ Nm}, \quad \bar{M}_z = \frac{1250 \text{ Nm} \cdot 0,4130}{0,4424} = 1167 \text{ Nm}$$

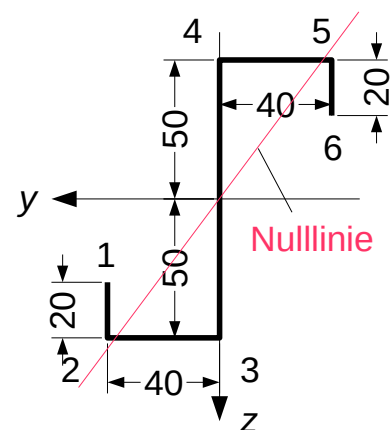
$$\frac{\bar{M}_y}{I_y} = \frac{2825 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{69,74 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 4,051 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3}, \quad \frac{\bar{M}_z}{I_z} = \frac{1167 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{21,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 5,470 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3}$$

$$\sigma(y, z) = 4,051 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \cdot z - 5,470 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \cdot y$$

$$\text{Nulllinie: } z = \frac{5,470}{4,051} y = 1,350 y$$

Zahlenwerte:

	y	z	σ
1	40	30	-97,27
2	40	50	-16,25
3	0	50	202,6
4	0	-50	-202,6
5	-40	-50	16,25
6	-40	-30	97,27
	mm	mm	MPa

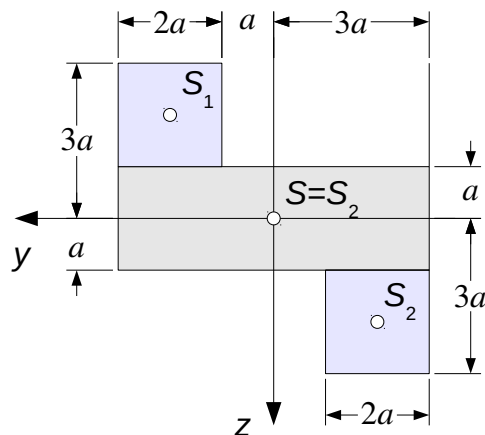


Der Wert der größten Spannung ist 202,6 MPa. Die Punkte, in denen die be-

tragsmäßig größte Spannung auftritt, haben den größten Abstand von der Nulllinie.

Aufgabe 8

a) Flächenträgheitsmomente



	Fläche 1	Fläche 2	Fläche 3	Summe
A_i	$4 a^2$	$12 a^2$	$4 a^2$	
y_{Si}	$2 a$	0	$-2 a$	
z_{Si}	$-2 a$	0	$2 a$	
I_{Yi}	$\frac{4}{3} a^4$	$4 a^4$	$\frac{4}{3} a^4$	$\frac{20}{3} a^4$
I_{Zi}	$\frac{4}{3} a^4$	$36 a^4$	$\frac{4}{3} a^4$	$\frac{116}{3} a^4$
$z_{Si}^2 A_i$	$16 a^4$	0	$16 a^4$	$32 a^4$
$y_{Si}^2 A_i$	$16 a^4$	0	$16 a^4$	$32 a^4$
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	$16 a^4$	0	$16 a^4$	$32 a^4$

Ergebnis:

$$I_y = \left(\frac{20}{3} + 32 \right) a^4 = \frac{116}{3} a^4, \quad I_z = \left(\frac{116}{3} + 32 \right) a^4 = \frac{212}{3} a^4, \quad I_{yz} = 32 a^4$$

b) Hauptachsentransformation

Hauptträgheitsmomente:

$$I_{1/2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{116 + 212}{6} a^4 = \frac{164}{3} a^4, \quad \frac{I_y - I_z}{2} = \frac{116 - 212}{6} a^4 = \frac{164}{3} a^4 = -16 a^4$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{16^2 + 32^2} a^4 = 16 a^4 \sqrt{1 + 2^2} = 16 \sqrt{5} a^4$$

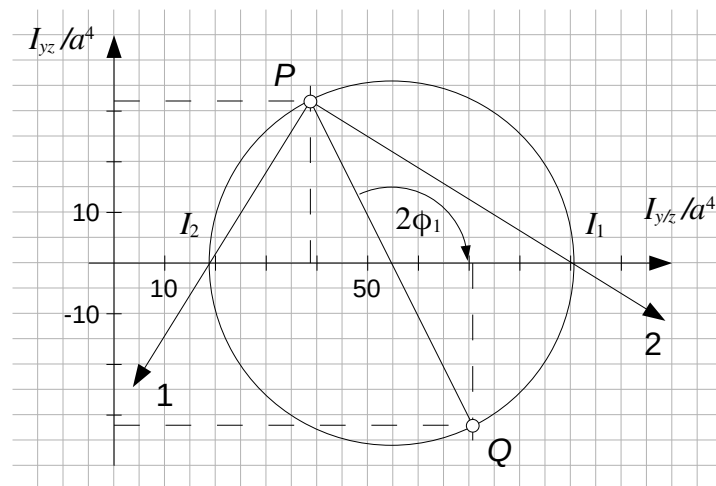
$$I_1 = \left(\frac{164}{3} + 16 \sqrt{5}\right) a^4 = 90,44 a^4, \quad I_2 = \left(\frac{164}{3} - 16 \sqrt{5}\right) a^4 = 18,89 a^4$$

Hauptachsen:

$$\tan(2\phi_H) = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{32 a^4}{-16 a^4} = -2 \rightarrow \phi_H = -31,72^\circ$$

$$I_{yz} > 0 \rightarrow \phi_1 = -31,72^\circ + 90^\circ = 58,28^\circ$$

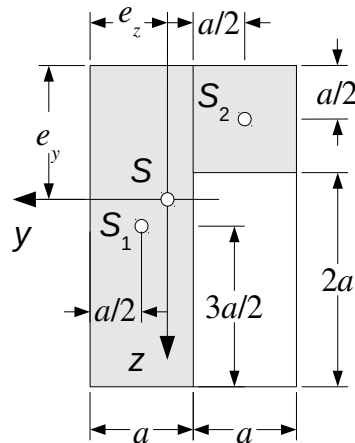
Mohrscher Trägheitskreis:



Aufgabe 9

a) Flächenträgheitsmomente

Aufteilung:



	Fläche 1	Fläche 2	Summe
A_i	$3a^2$	a^2	$4a^2$
y_{Si}	$e_z - \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a$	$-\left(\frac{3}{2}a - e_z\right) = -\frac{3}{4}a$	
z_{Si}	$\frac{3}{2}a - e_y = \frac{1}{4}a$	$-\left(e_y - \frac{a}{2}\right) = -\frac{3}{4}a$	
I_{Yi}	$\frac{(3a)^3 a}{12} = \frac{9}{4}a^4$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{7}{3}a^4$
I_{Zi}	$\frac{a^3 \cdot 3a}{12} = \frac{1}{4}a^4$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{1}{3}a^4$
$z_{Si}^2 A_i$	$\frac{3}{16}a^4$	$\frac{9}{16}a^4$	$\frac{3}{4}a^4$
$y_{Si}^2 A_i$	$\frac{3}{16}a^4$	$\frac{9}{16}a^4$	$\frac{3}{4}a^4$
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	$-\frac{3}{16}a^4$	$-\frac{9}{16}a^4$	$-\frac{3}{4}a^4$

$$I_y = \left(\frac{7}{3} + \frac{3}{4}\right)a^4 = \frac{37}{12}a^4, \quad I_z = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)a^4 = \frac{13}{12}a^4, \quad I_{yz} = -\frac{3}{4}a^4$$

b) Hauptachsentransformation

Hauptträgheitsmomente:

$$I_{1/2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}, \quad \frac{I_y + I_z}{2} = \frac{50}{24} a^4 = \frac{25}{12} a^4$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{24}{24} a^4 = a^4, \quad \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} a^4 = \frac{5}{4} a^4$$

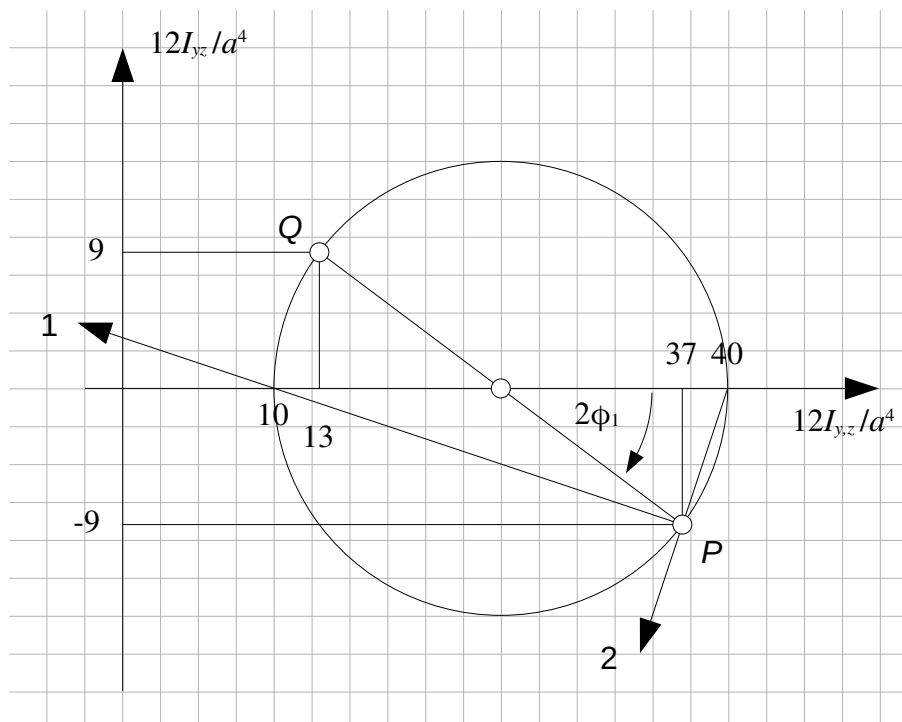
$$I_1 = \left(\frac{25}{12} + \frac{5}{4}\right) a^4 = \frac{40}{12} a^4 = \frac{10}{3} a^4, \quad I_2 = \left(\frac{25}{12} - \frac{5}{4}\right) a^4 = \frac{10}{12} a^4 = \frac{5}{6} a^4$$

Richtung der ersten Hauptachse:

$$\tan(2\phi_H) = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = -\frac{3}{4} \rightarrow \phi_H = -18,43^\circ$$

$$I_{yz} < 0 \rightarrow \phi_1 = -18,43^\circ$$

Mohrscher Trägheitskreis:



Aufgabe 10

a) Flächenträgheitsmomente

	Äußeres Rechteck	Inneres Rechteck	Summe
A	$10 \cdot 6 = 60$	$-3 \cdot 4 = -12$	48
I_y	$\frac{10 \cdot 6^3}{12} = 180$	$-\frac{4 \cdot 3^3}{12} = -9$	171
I_z	$\frac{10^3 \cdot 6}{12} = 500$	$-\frac{4^3 \cdot 3}{12} = -16$	484
y_s	$e_z - 5 = 0,5$	$e_z - 3 = 2,5$	
z_s	$e_y - 3 = 0,125$	$e_y - 2,5 = 0,625$	
$y_s^2 A$	15	-75	-60
$z_s^2 A$	0,9375	-4,6875	-3,75
$-y_s z_s A$	-3,75	18,75	15,00

Ergebnis:

$$I_y = 171 \text{ cm}^4 - 3,75 \text{ cm}^4 = 167,25 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 484 \text{ cm}^4 - 60 \text{ cm}^4 = 424 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = 15 \text{ cm}^4$$

b) Hauptträgheitsmomente

$$I_{1/2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{167,25 + 424}{2} \text{ cm}^4 = 295,625 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{167,25 - 424}{2} \text{ cm}^4 = -128,375 \text{ cm}^4$$

$$\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2 = 16705 \text{ cm}^4, \quad \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 129,2 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 424,9 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 166,4 \text{ cm}^4$$

c) Hauptachsen

$$\tan(2\phi_H) = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{30}{167,25 - 425} = \frac{30}{-257,75} = -0,1164$$

$$\rightarrow 2\phi_H = -6,639^\circ \rightarrow \phi_H = -3,319^\circ$$

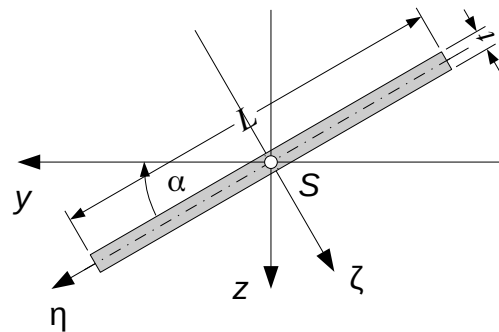
$$I_{yz} > 0 \rightarrow \phi_1 = -3,319^\circ + 90^\circ = 86,68^\circ$$

Aufgabe 11Lösungsweg 1: Transformation

Im $\eta\zeta$ -Koordinatensystem gilt:

$$I_\eta = I_{\eta\zeta} = 0, \quad I_\zeta = \frac{1}{12} L^3 t$$

Das yz -Koordinatensystem geht durch Drehung um den Winkel $-\alpha$ aus dem $\eta\zeta$ -Koordinatensystem hervor.



Die Transformationsformeln lauten:

$$I_y = \frac{I_\eta + I_\zeta}{2} + \frac{I_\eta - I_\zeta}{2} \cos(-2\alpha) + I_{\eta\zeta} \sin(-2\alpha) = \frac{L^3 t}{24} (1 - \cos(2\alpha))$$

$$I_z = \frac{I_\eta + I_\zeta}{2} - \frac{I_\eta - I_\zeta}{2} \cos(-2\alpha) - I_{\eta\zeta} \sin(-2\alpha) = \frac{L^3 t}{24} (1 + \cos(2\alpha))$$

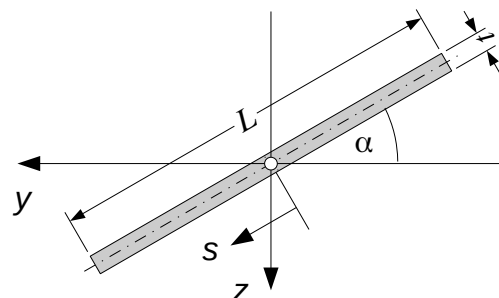
$$I_{yz} = -\frac{I_\eta - I_\zeta}{2} \sin(-2\alpha) + I_{\eta\zeta} \cos(-2\alpha) = -\frac{L^3 t}{24} \sin(2\alpha)$$

Lösungsweg 2: Integration

$$y = s \cos(\alpha)$$

$$z = s \sin(\alpha)$$

$$dA = t ds$$



$$I_y = \int_{-L/2}^{L/2} z^2 t ds = \int_{-L/2}^{L/2} s^2 ds t \sin^2(\alpha) = t \sin^2(\alpha) \left[\frac{s^3}{3} \right]_{s=-L/2}^{s=L/2} = \frac{L^3 t}{12} \sin^2(\alpha)$$

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 t ds = \int_{-L/2}^{L/2} s^2 ds t \cos^2(\alpha) = \frac{L^3 t}{12} \cos^2(\alpha)$$

$$I_{yz} = - \int_{-L/2}^{L/2} y z t ds = - \int_{-L/2}^{L/2} s^2 ds t \sin(\alpha) \cos(\alpha) = - \frac{L^3 t}{12} \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

Mit

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)), \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$

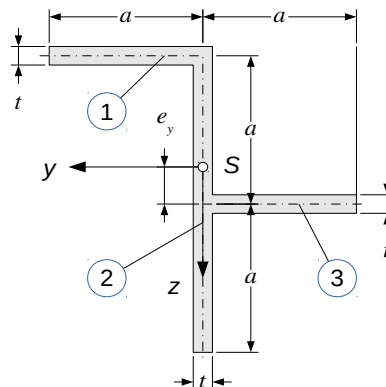
$$\sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$$

folgt:

$$I_y = \frac{L^3 t}{24} (1 - \cos(2\alpha)), \quad I_z = \frac{L^3 t}{24} (1 + \cos(2\alpha)), \quad I_{yz} = - \frac{L^3 t}{24} \sin(2\alpha)$$

Aufgabe 12

a) Flächenträgheitsmomente



	1	2	3	Σ
A	at	$2at$	at	$4at$
I_Y	0	$\frac{2}{3}a^3t$	0	$\frac{2}{3}a^3t$
I_Z	$\frac{1}{12}a^3t$	0	$\frac{1}{12}a^3t$	$\frac{1}{6}a^3t$
y_S	$\frac{1}{2}a$	0	$-\frac{1}{2}a$	
z_S	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	

	1	2	3	Σ
$z_S^2 A$	$\frac{9}{16} a^3 t$	$\frac{2}{16} a^3 t$	$\frac{1}{16} a^3 t$	$\frac{3}{4} a^3 t$
$y_S^2 A$	$\frac{1}{4} a^3 t$	0	$\frac{1}{4} a^3 t$	$\frac{1}{2} a^3 t$
$-y_S z_S A$	$\frac{3}{8} a^3 t$	0	$\frac{1}{8} a^3 t$	$\frac{1}{2} a^3 t$

Ergebnis: $I_y = \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) a^3 t = \frac{17}{12} a^3 t$, $I_z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) a^3 t = \frac{2}{3} a^3 t$, $I_{yz} = \frac{1}{2} a^3 t$

b) Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{17+8}{24} a^3 t = \frac{25}{24} a^3 t$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{17-8}{24} a^3 t = \frac{9}{24} a^3 t = \frac{3}{8} a^3 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}} a^3 t = \sqrt{\frac{25}{64}} a^3 t = \frac{5}{8} a^3 t$$

Hauptträgheitsmomente:

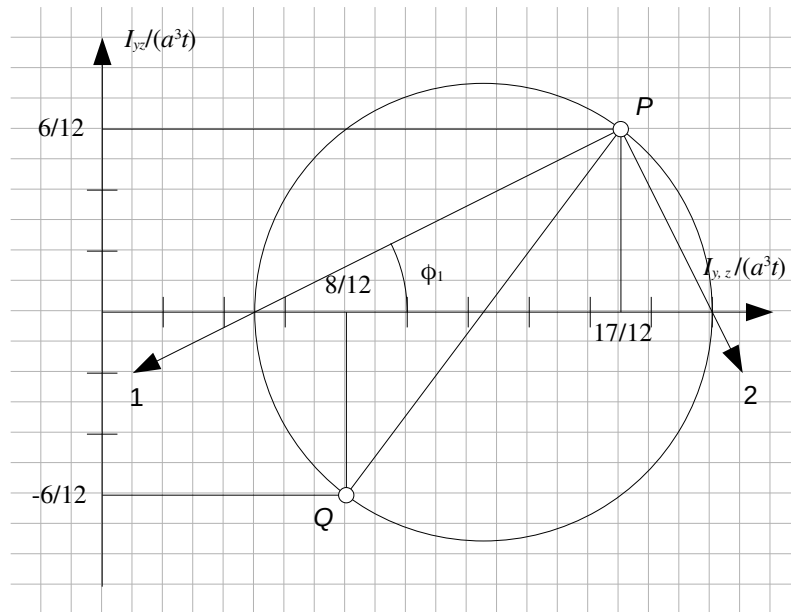
$$I_1 = \left(\frac{25}{24} + \frac{15}{24}\right) a^3 t = \frac{40}{24} a^3 t = \frac{5}{3} a^3 t$$

$$I_2 = \left(\frac{25}{24} - \frac{15}{24}\right) a^3 t = \frac{10}{24} a^3 t = \frac{5}{12} a^3 t$$

Richtung der ersten Hauptachse:

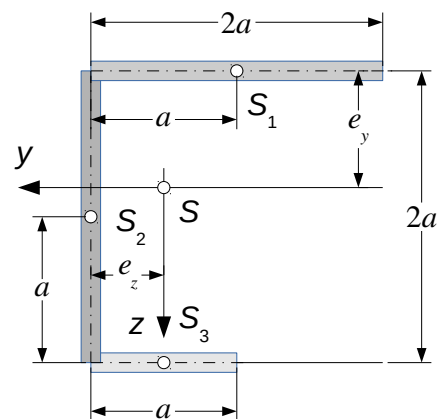
$$\tan(2\phi_H) = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{8}{3} \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad 2\phi_H = 53,13^\circ$$

$$I_{yz} > 0 \quad \rightarrow \quad \phi_1 = 26,57^\circ$$

c) Mohrscher Trägheitskreis**Aufgabe 13**a) Flächenträgheitsmomente

Aufteilung des Querschnitts:

- 1 Oberer Flansch
- 2 Steg
- 3 Unterer Flansch



	1	2	3	Σ
A	$2at$	$2at$	at	$5at$
y_s	$-\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	
z_s	$-\frac{4}{5}a$	$\frac{a}{5}$	$\frac{6}{5}a$	

	1	2	3	Σ
I_Y	0	$\frac{2}{3}a^3t$	0	$\frac{2}{3}a^3t$
I_Z	$\frac{2}{3}a^3t$	0	$\frac{a^3t}{12}$	$\frac{3}{4}a^3t$
$z_s^2 A$	$\frac{32}{25}a^3t$	$\frac{2}{25}a^3t$	$\frac{36}{25}a^3t$	$\frac{14}{5}a^3t$
$y_s^2 A$	$\frac{1}{2}a^3t$	$\frac{1}{2}a^3t$	0	a^3t
$-y_s z_s A$	$-\frac{4}{5}a^3t$	$-\frac{1}{5}a^3t$	0	$-a^3t$

Ergebnis:

$$I_y = \left(\frac{2}{3} + \frac{14}{5} \right) a^3 t = \frac{52}{15} a^3 t$$

$$I_z = \left(\frac{3}{4} + 1 \right) a^3 t = \frac{7}{4} a^3 t$$

$$I_{yz} = -a^3 t$$

b) Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{52}{15} + \frac{7}{4} \right) a^3 t = \frac{313}{120} a^3 t = 2,608 a^3 t$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{52}{15} - \frac{7}{4} \right) a^3 t = \frac{103}{120} a^3 t = 0,8583 a^3 t$$

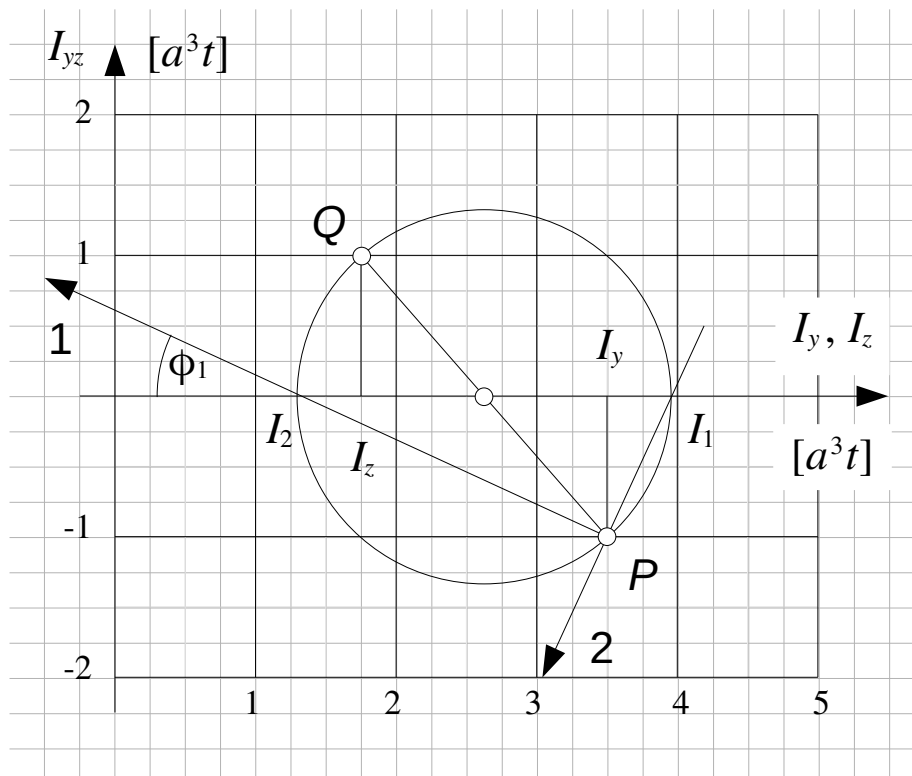
$$\sqrt{\left(\frac{103}{120} \right)^2 + 1} a^3 t = \sqrt{1,737} a^3 t = 1,318 a^3 t$$

$$I_{1/2} = (2,608 \pm 1,318) a^3 t :$$

$$I_1 = 3,926 a^3 t, \quad I_2 = 1,290 a^3 t$$

$$\tan(2\phi_H) = -\frac{120}{103} \rightarrow 2\phi_H = -49,36^\circ$$

$$I_{yz} < 0 \rightarrow \phi_1 = -24,68^\circ$$

c) Mohrscher Trägheitskreis**Aufgabe 14**a) Spannung in Punkt A

Ersatzmomente:

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{28,80^2}{44,7 \cdot 30,1} = 0,3835$$

$$\bar{M}_y = \frac{M_y - M_z I_{yz} / I_z}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)}$$

$$\rightarrow \bar{M}_y = \frac{4 - 28,80 / 30,10}{0,3835} \text{ kNm} = \frac{3,043}{0,3835} \text{ kNm} = 7,935 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_z = \frac{M_z - M_y I_{yz} / I_y}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)}$$

$$\rightarrow \bar{M}_z = \frac{1 - 4 \cdot 28,80 / 44,70}{0,3835} \text{ kNm} = \frac{-1,577}{0,3835} \text{ kNm} = -4,112 \text{ kNm}$$

Gleichung der Nulllinie:

$$z = \frac{\bar{M}_z}{\bar{M}_y} \frac{I_y}{I_z} y = \frac{-4,112}{7,935} \cdot \frac{44,7}{30,1} y = -0,7696 y$$

Spannung im Punkt A:

$$\sigma_x = \frac{\bar{M}_y}{I_y} z_A - \frac{\bar{M}_z}{I_z} y_A :$$

$$y_A = -\frac{s}{2} = -2,5 \text{ mm} , \quad z_A = -\frac{h}{2} = -30 \text{ mm}$$

$$\frac{\bar{M}_y}{I_y} = \frac{7,935 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{44,7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 17,75 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$$

$$\frac{\bar{M}_z}{I_z} = \frac{-4,112 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{30,1 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = -13,66 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$$

$$\sigma_x = -17,75 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \cdot 30 \text{ mm} - 13,66 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \cdot 2,5 \text{ mm} = -566,7 \text{ MPa}$$

b) Hauptachsentransformation

Hauptträgheitsmomente:

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{44,7 + 30,1}{2} \text{ cm}^4 = 37,4 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{44,7 - 30,1}{2} \text{ cm}^4 = 7,3 \text{ cm}^4$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{7,3^2 + 28,8^2} \text{ cm}^4 = \sqrt{882,7} \text{ cm}^4 = 29,71 \text{ cm}^4$$

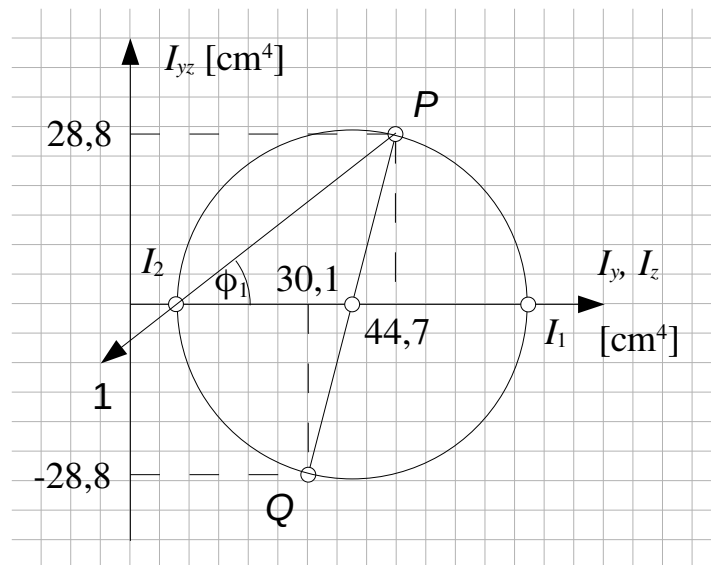
$$I_1 = 37,4 \text{ cm}^4 + 29,71 \text{ cm}^4 = 67,11 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 37,4 \text{ cm}^4 - 29,71 \text{ cm}^4 = 7,69 \text{ cm}^4$$

Richtung der 1. Hauptachse:

$$\tan(2\phi_H) = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{28,80}{7,3} = 3,945 \rightarrow \phi_H = 37,89^\circ$$

$$I_{yz} > 0 \rightarrow \phi_1 = 37,89^\circ$$

c) Mohrscher Trägheitskreis**Aufgabe 15**a) Flächenträgheitsmomente

	Steg	Flansch	Summe
A	$6at$	$3at$	$9at$
y_S	$e_z = \frac{a}{2}$	$-\frac{3}{2}a + e_z = -a$	
z_S	$3a - e_y = a$	$-e_y = -2a$	
I_y	$\frac{(6a)^3 t}{12} = 18a^3 t$	0	$18a^3 t$
I_z	0	$\frac{(3a)^3 t}{12} = \frac{9}{4}a^3 t$	$\frac{9}{4}a^3 t$
$z_S^2 A$	$6a^3 t$	$12a^3 t$	$18a^3 t$
$y_S^2 A$	$\frac{3}{2}a^3 t$	$3a^3 t$	$\frac{9}{2}a^3 t$
$-y_S z_S A$	$-3a^3 t$	$-6a^3 t$	$-9a^3 t$

$$I_y = (18 + 18)a^3 t = 36a^3 t, \quad I_z = \left(\frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right)a^3 t = \frac{27}{4}a^3 t, \quad I_{yz} = -9a^3 t$$

b) Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{4 \cdot 36 + 27}{8} a^3 t = \frac{171}{8} a^3 t = 21,375 a^3 t$$

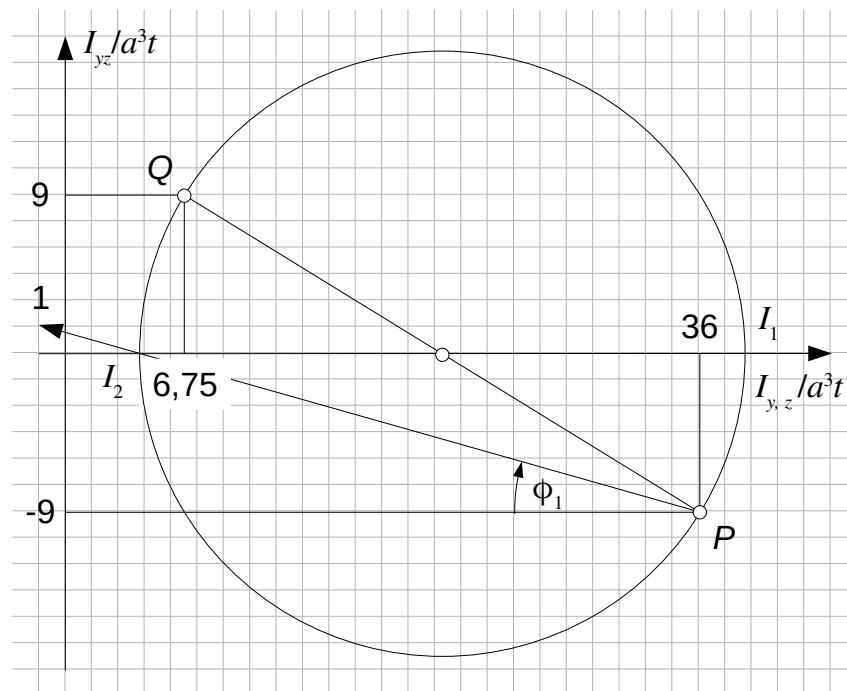
$$\frac{I_y - I_z}{2} = \frac{4 \cdot 36 - 27}{8} a^3 t = \frac{117}{8} a^3 t = 14,625 a^3 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{294,89} a^3 t = 17,17 a^3 t$$

$$I_1 = 38,55 a^3 t, \quad I_2 = 4,203 a^3 t$$

$$\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{-9 \cdot 8}{117} = -\frac{8}{13} \rightarrow 2\phi_H = -31,61^\circ$$

$$I_{yz} < 0 \rightarrow \phi_1 = -15,80^\circ$$

c) Mohrscher Trägheitskreis**Aufgabe 16**a) Flächenträgheitsmomente

1 = Oberer Flansch, 2 = mittlerer Flansch, 3 = Steg

	1	2	3	Summe
A_i	at	at	$2at$	$4at$
y_{Si}	$-\frac{1}{4}a$	$-\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	
z_{Si}	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	
I_{Yi}	0	0	$\frac{8}{12}a^3t$	$\frac{2}{3}a^3t$
I_{Zi}	$\frac{1}{12}a^3t$	$\frac{1}{12}a^3t$	0	$\frac{1}{6}a^3t$
$z_{Si}^2 A_i$	$\frac{9}{16}a^3t$	$\frac{1}{16}a^3t$	$\frac{2}{16}a^3t$	$\frac{3}{4}a^3t$
$y_{Si}^2 A_i$	$\frac{1}{16}a^3t$	$\frac{1}{16}a^3t$	$\frac{2}{16}a^3t$	$\frac{1}{4}a^3t$
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	$-\frac{3}{16}a^3t$	$\frac{1}{16}a^3t$	$-\frac{2}{16}a^3t$	$-\frac{1}{4}a^3t$

Ergebnis:

$$I_y = \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)a^3t = \frac{17}{12}a^3t, \quad I_z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)a^3t = \frac{5}{12}a^3t, \quad I_{yz} = -\frac{1}{4}a^3t$$

b) Hauptträgheitsmomente

$$\frac{I_y + I_z}{2} = \frac{11}{12}a^3t, \quad \frac{I_y - I_z}{2} = \frac{1}{2}a^3t$$

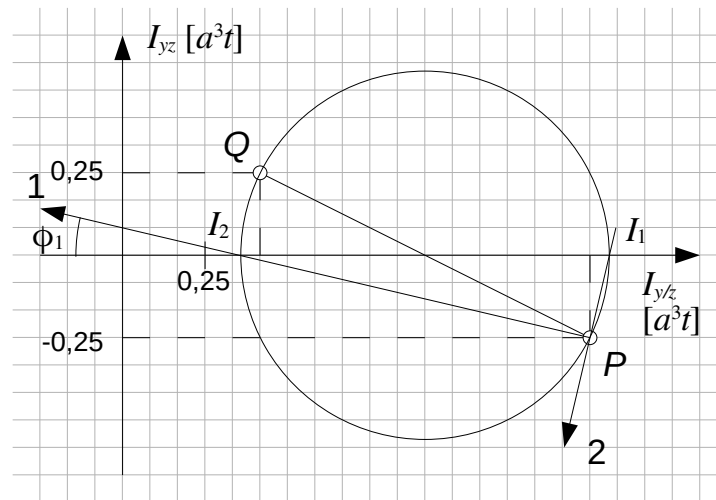
$$\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2} + I_{yz} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}a^3t = \frac{\sqrt{5}}{4}a^3t = 0,5590a^3t$$

$$I_1 = \left(\frac{11}{12} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)a^3t = \frac{11+3\sqrt{5}}{12}a^3t = 1,476a^3t$$

$$I_2 = \left(\frac{11}{12} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)a^3t = \frac{11-3\sqrt{5}}{12}a^3t = 0,3576a^3t$$

$$\tan(2\phi_H) = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = -\frac{1}{4} \cdot 2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \phi_H = -13,28^\circ$$

$$I_{yz} < 0 \rightarrow \phi_1 = -13,28^\circ$$

c) Mohrscher Trägheitskreis**Aufgabe 17**a) Ersatzmomente und Nulllinie

Ersatzmomente:

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{12,2^2}{13,5 \cdot 17,6} = 0,3736, \quad \frac{I_{yz}}{I_y} = \frac{12,2}{13,5} = 0,9037$$

$$\bar{M}_y = \frac{400 \text{ Nm}}{0,3736} = 1071 \text{ Nm}, \quad \bar{M}_z = \frac{-400 \text{ Nm} \cdot 0,9037}{0,3736} = -967,6 \text{ Nm}$$

Nulllinie:

$$z = -\frac{I_y}{A} \frac{N}{\bar{M}_y} + \frac{I_y}{I_z} \frac{\bar{M}_z}{\bar{M}_y} y = -\frac{13,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{5,43 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} \cdot \frac{40 \cdot 10^3 \text{ N}}{1071 \cdot 10^3 \text{ Nmm}} - \frac{13,5}{17,6} \cdot \frac{967,6}{1071} y$$

$$= -9,285 \text{ mm} - 0,6930 y$$

b) Normalspannungen

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{\bar{M}_y}{I_y} z - \frac{\bar{M}_z}{I_z} y = 73,66 \text{ MPa} + 7,933 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \cdot z + 5,498 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \cdot y$$

Koordinaten:

$$y_A = 37,75 \text{ mm}, \quad z_A = -20 \text{ mm}$$

$$y_B = 2,25 \text{ mm}, \quad z_B = 20 \text{ mm}$$

Spannungen: $\sigma_A = 122,5 \text{ MPa}$, $\sigma_B = 244,7 \text{ MPa}$

c) Hauptachsentransformation

$$\frac{I_y + I_z}{2} = 15,55 \text{ cm}^4, \quad \frac{I_y - I_z}{2} = -2,05 \text{ cm}^4, \quad \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 12,37 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = (15,55 + 12,37) \text{ cm}^4 = 27,92 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = (15,55 - 12,37) \text{ cm}^4 = 3,179 \text{ cm}^4$$

$$\tan(2\phi_H) = \frac{12,2}{-2,05} = -5,951 \rightarrow \phi_H = -40,23^\circ$$

$$I_{yz} > 0 \rightarrow \phi_1 = -40,23^\circ + 90^\circ = 49,77^\circ$$