

4.2 Balkensysteme

Lösungen

Aufgabe 1

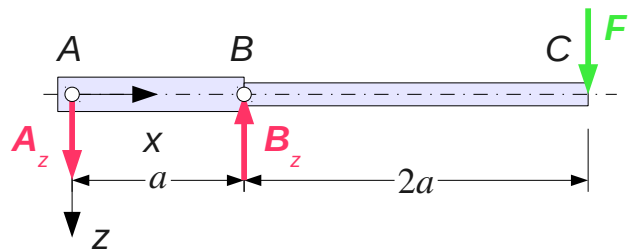
Lagerkräfte:

$$\sum M^B = 0 : a A_z - 2a F = 0$$

$$\rightarrow A_z = 2F$$

$$\sum M^A = 0 : a B_z - 3a F = 0$$

$$\rightarrow B_z = 3F$$



Biegemoment:

Da das System statisch bestimmt ist, hängt das Biegemoment nicht von der Biegesteifigkeit ab. Aus dem Gleichgewicht für den linken Teilbalken folgt:

$$M_y(x) = -(A_z x - \langle x-a \rangle B_z) = -(2x - 3\langle x-a \rangle)F$$

In die weiteren Integrationen geht die Biegesteifigkeit ein. Sie müssen abschnittsweise durchgeführt werden.

Abschnitt AB: $0 < x < a$

$$4EI_y \frac{dw}{dx}(x) = \left(x^2 - \frac{3}{2} \langle x-a \rangle^2 + c_1 \right) F$$

$$4EI_y w(x) = \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} \langle x-a \rangle^3 + c_1 x + c_2 \right) F$$

$$w(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$w(a) = 0 : \frac{1}{3} a^3 + c_1 a = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{1}{3} a^2$$

Abschnitt BC: $a < x < 3a$

$$EI_y \frac{dw}{dx}(x) = \left(x^2 - \frac{3}{2} (x-a)^2 + c_3 \right) F$$

$$EI_y w(x) = \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} (x-a)^3 + c_3 x + c_4 \right) F$$

$$w(a) = 0 : \frac{1}{3} a^3 + c_3 a + c_4 = 0 \rightarrow c_3 a + c_4 = -\frac{1}{3} a^3$$

Anschlussbedingung an der Stelle B :

Der Balken darf keinen Knick haben: $\frac{dw}{dx}(a-0) = \frac{dw}{dx}(a+0)$

$$\left(a^2 - \frac{1}{3}a^2\right) = 4(a^2 + c_3) \rightarrow c_3 = -\frac{5}{6}a^2$$

$$c_4 = -c_3 a - \frac{1}{3}a^3 = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)a^3 = \frac{1}{2}a^3$$

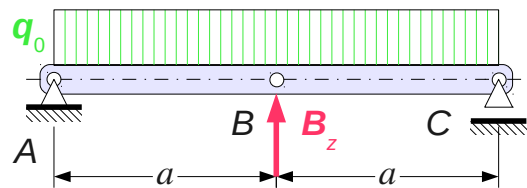
Vertikalverschiebung am Lastangriffspunkt:

$$w_C = w(3a) = \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{2} - \frac{15}{6} + \frac{1}{2}\right) \frac{F a^3}{E I_y} = 3 \frac{F a^3}{E I_y}$$

Aufgabe 2

Statisch bestimmtes Teilsystem

Das System ist 1-fach statisch unbestimmt. Entfernen des Lagers im Punkt B führt auf ein statisch bestimmtes Grundsystem.



Lastfall 0: konstante Streckenlast

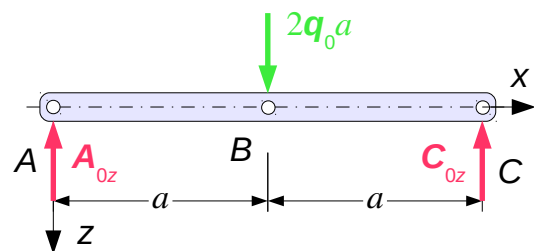
Lagerkräfte:

$$\sum M^A = 0 : 2a C_{0z} - 2q_0 a^2 = 0$$

$$\rightarrow C_{0z} = q_0 a$$

$$\sum M^C = 0 : -2a A_{0z} + 2q_0 a^2 = 0$$

$$\rightarrow A_{0z} = q_0 a$$



Schnittlasten (aus Tabelle):

$$Q_{0z}(x) = -\frac{q_0(2a)}{2} \left(2\frac{x}{2a} - 1\right) = -q_0 a \left(\frac{x}{a} - 1\right)$$

$$M_{0y} = -\frac{q_0(2a)^2}{2} \left[\left(\frac{x}{2a}\right)^2 - \frac{x}{2a}\right] = -\frac{q_0 a^2}{2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\frac{x}{a}\right]$$

Biegelinie (aus Tabelle):

$$w_0(x) = \frac{q_0(2a)^4}{24 E I_y} \left[\left(\frac{x}{2a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{2a}\right)^3 + \frac{x}{2a}\right] = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 8\frac{x}{a}\right]$$

Durchbiegung im Punkt B:

$$w_{0B} = w_0(a) = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y} (1 - 4 + 8) = \frac{5}{24} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

Lastfall 1: Kraft B_z

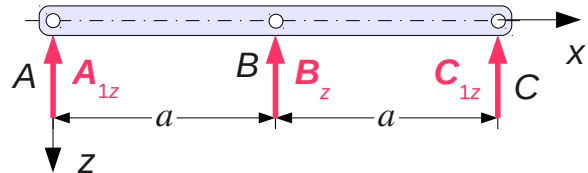
Lagerkräfte:

$$\sum M^A = 0 : a B_z + 2a C_{1z} = 0$$

$$\rightarrow C_{1z} = -\frac{1}{2} B_z$$

$$\sum M^C = 0 : -2a A_{1z} - a B_z = 0$$

$$\rightarrow A_{1z} = -\frac{1}{2} B_z$$



Schnittlasten (aus Tabelle):

$$Q_{1z}(x) = -B_z \left[1 - \frac{1}{2} - \left\langle \frac{x}{2a} - \frac{1}{2} \right\rangle^0 \right] = -\frac{B_z}{2} \left[1 - 2 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^0 \right]$$

$$M_{1y}(x) = -2a B_z \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) \frac{x}{2a} - \left\langle \frac{x}{2a} - \frac{1}{2} \right\rangle \right] = -\frac{B_z a}{2} \left[\frac{x}{a} - 2 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle \right]$$

Biegelinie (aus Tabelle):

$$\begin{aligned} w_1(x) &= -\frac{B_z (2a)^3}{6 E I_y} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) \frac{x}{2a} - \left(\frac{x}{2a} \right)^3 \right) + \left\langle \frac{x}{2a} - \frac{1}{2} \right\rangle^3 \right] \\ &= -\frac{B_z a^3}{12 E I_y} \left[3 \frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 2 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^3 \right] \end{aligned}$$

Durchbiegung im Punkt B:

$$w_{1B} = w_1(a) = -\frac{B_z a^3}{12 E I_y} (3 - 1) = -\frac{B_z a^3}{6 E I_y}$$

Verträglichkeitsbedingung

$$w_B = w_{0B} + w_{1B} = 0 : \frac{5}{24} \frac{q_0 a^4}{E I_y} - \frac{B_z a^3}{6 E I_y} = 0 \rightarrow B_z = \frac{30}{24} q_0 a = \frac{5}{4} q_0 a$$

Ergebnisse

Lagerkräfte:

$$A_z = A_{0z} + A_{1z} = q_0 a - \frac{1}{2} \frac{5}{4} q_0 a = \underline{\underline{\frac{3}{8} q_0 a}}, \quad B_z = \underline{\underline{\frac{5}{4} q_0 a}}$$

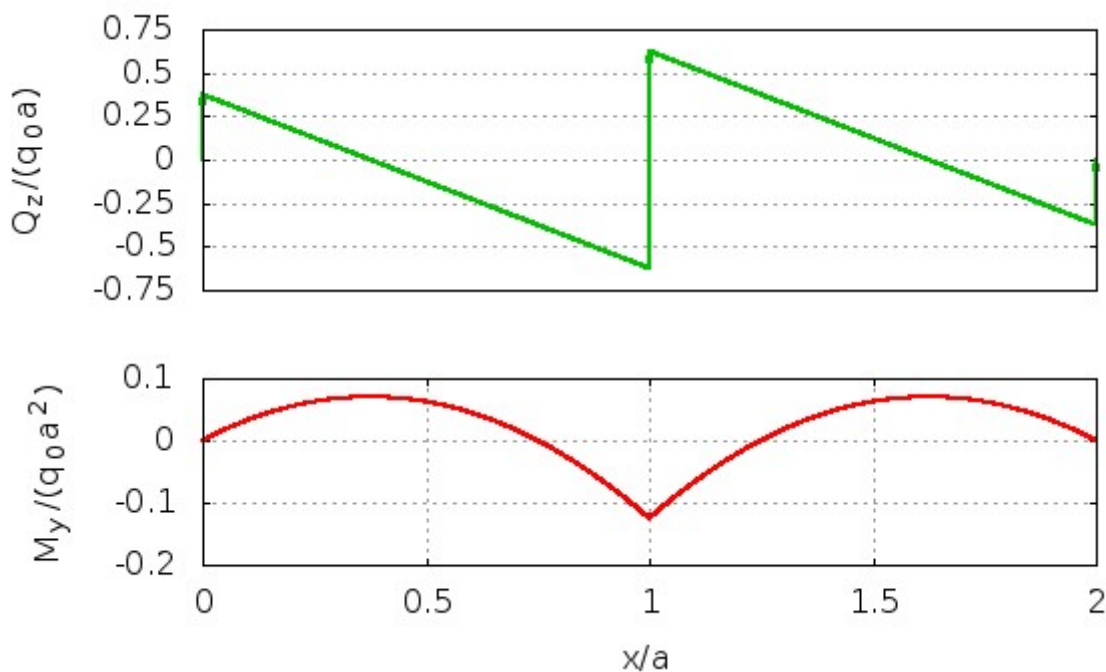
$$C_z = C_{0z} + C_{1z} = q_0 a - \frac{1}{2} \frac{5}{4} q_0 a = \underline{\underline{\frac{3}{8} q_0 a}}$$

Schnittlasten:

$$\begin{aligned} Q_z(x) &= Q_{0z}(x) + Q_{1z}(x) = -q_0 a \left[\frac{x}{a} - 1 + \frac{5}{8} \left(1 - 2 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^0 \right) \right] \\ &= \frac{q_0 a}{8} \left(3 - 8 \frac{x}{a} + 10 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y(x) &= M_{0y}(x) + M_{1y}(x) = -\frac{q_0 a^2}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 2 \frac{x}{a} + \frac{5}{4} \left(\frac{x}{a} - 2 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle \right) \right] \\ &= \frac{q_0 a^2}{8} \left[3 \frac{x}{a} - 4 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 10 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle \right] \end{aligned}$$

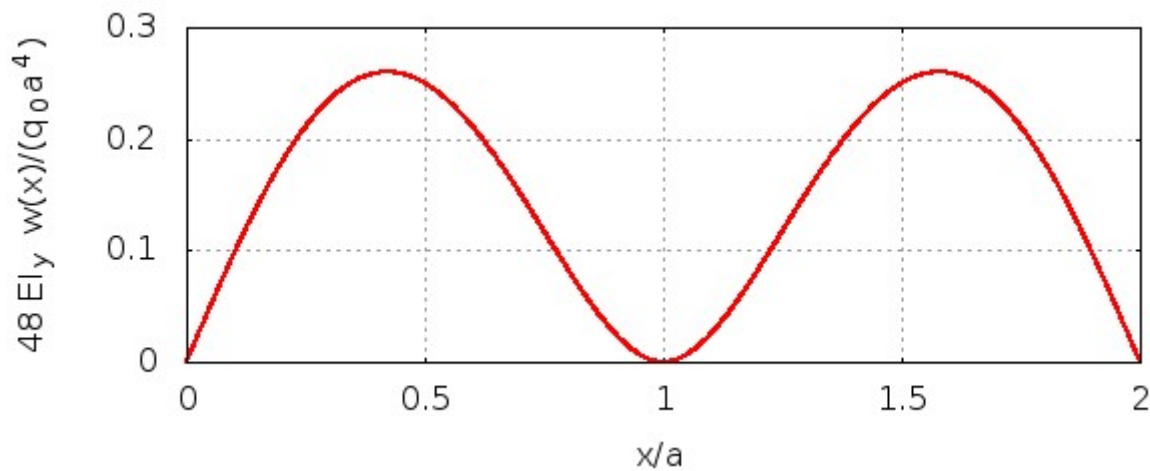
$$|M_{y\max}| = |M_y(a)| = \frac{q_0 a^2}{8} |3 - 4| = \frac{q_0 a^2}{8}$$



Biegelinie:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) = \frac{q_0 a^4}{24 EI_y} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 8 \frac{x}{a} - \frac{5}{2} \left(3 \frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 2 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^3 \right) \right]$$

$$= \frac{q_0 a^4}{48 EI_y} \left[2 \left(\frac{x}{a} \right)^4 - 3 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \frac{x}{a} - 10 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^3 \right]$$

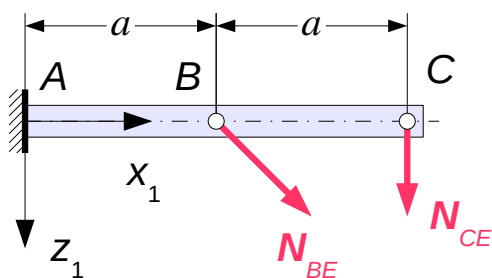


Aufgabe 3

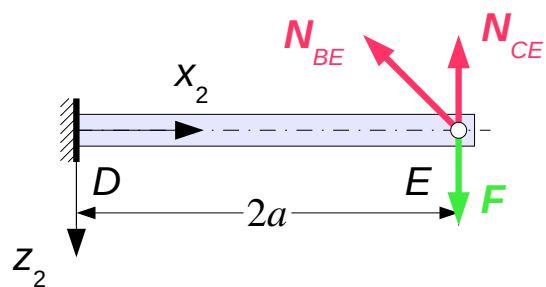
a) Normalkräfte in den Streben

Statisch bestimmte Teilsysteme:

Balken AC:



Balken DE:



Berechnungsgang:

1. Ermittlung der Vertikalverschiebungen w_B , w_C und w_E in Abhängigkeit von den noch unbekannten Normalkräften N_{BE} und N_{CE}
2. Ermittlung der Normalkräfte aus den Stabgleichungen für die Streben

BE und CE

Die Horizontalverschiebungen u_B , u_C und u_E sind null, da die Balken dehnstarr sind.

Balken AC:

$$w_B(N_{BE}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{N_{BE}(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

$$w_B(N_{CE}) = \frac{N_{CE}(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{5}{6} \frac{N_{CE}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow w_B = \frac{a^3}{6EI_y} (\sqrt{2}N_{BE} + 5N_{CE})$$

$$w_C(N_{BE}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{N_{BE}(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{12} \frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

$$w_C(N_{CE}) = \frac{N_{CE}(2a)^3}{3EI_y} = \frac{8}{3} \frac{N_{CE}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow w_C = \frac{a^3}{12EI_y} (5\sqrt{2}N_{BE} + 32N_{CE})$$

Balken DE:

$$w_E = \frac{\left(F - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{BE} - N_{CE} \right) (2a)^3}{3EI_y} = \frac{4}{3} \frac{a^3}{EI_y} (2F - \sqrt{2}N_{BE} - 2N_{CE})$$

Strebe BE:

$$N_{BE} = EA \frac{\Delta L_{BE}}{\sqrt{2}a} = EA \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{w_E - w_B}{\sqrt{2}a} = \frac{EA}{2a} (w_E - w_B)$$

Strebe CE:

$$N_{CE} = EA \frac{\Delta L_{CE}}{a} = \frac{EA}{a} (w_E - w_C)$$

Einsetzen für die Verschiebungen ergibt:

$$\begin{aligned} N_{BE} &= \frac{EA}{2a} \cdot \frac{a^3}{6EI_y} (16F - 8\sqrt{2}N_{BE} - 16N_{CE} - \sqrt{2}N_{BE} - 5N_{CE}) \\ &= \frac{Aa^2}{12I_y} (16F - 9\sqrt{2}N_{BE} - 21N_{CE}) \\ &\rightarrow \left(\frac{12I_y}{Aa^2} + 9\sqrt{2} \right) N_{BE} + 21N_{CE} = 16F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{CE} &= \frac{E A}{a} \cdot \frac{a^3}{12 E I_y} (32 F - 16 \sqrt{2} N_{BE} - 32 N_{CE} - 5 \sqrt{2} N_{BE} - 32 N_{CE}) \\
 &= \frac{A a^2}{12 I_y} (32 F - 21 \sqrt{2} N_{BE} - 64 N_{CE}) \\
 \rightarrow 21 \sqrt{2} N_{BE} + \left(\frac{12 I_y}{A a^2} + 64 \right) N_{CE} &= 32 F
 \end{aligned}$$

Mit $I_y/A = a^2/12$ folgt:

$$\begin{aligned}
 (1 + 9\sqrt{2}) N_{BE} + 21 N_{CE} &= 16 F \\
 21 \sqrt{2} N_{BE} + 65 N_{CE} &= 32 F
 \end{aligned}$$

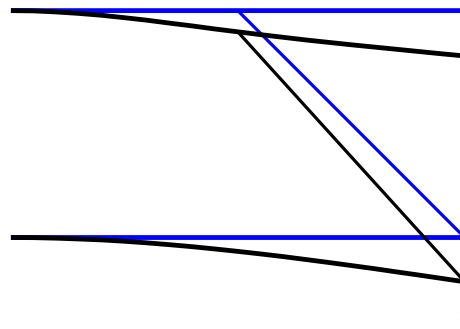
Das Gleichungssystem hat die Lösung:

$$N_{BE} = 1,370 F, \quad N_{CE} = -0,1336 F$$

b) Vertikalverschiebung des Lastangriffspunkts

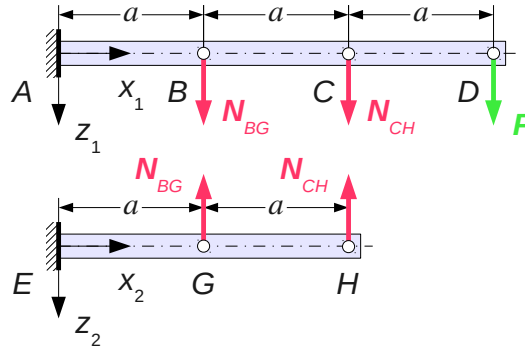
$$\begin{aligned}
 w_E &= \frac{4}{3} \frac{a^3}{E I_y} (2 F - \sqrt{2} N_{BE} - 2 N_{CE}) = \frac{4}{3} \frac{F a^3}{E I_y} (2 - \sqrt{2} \cdot 1,370 + 2 \cdot 0,1336) \\
 &= \underline{\underline{0,4396 \frac{F a^3}{E I_y}}}
 \end{aligned}$$

Loadcase 1:



Aufgabe 4

Statisch bestimmte Teilsysteme:



a) Normalkräfte in den Streben

Balken AD:

$$w_B(F) = \frac{F(3a)^3}{6EI_y} \left(3 \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} \right) = \frac{4}{3} \frac{F a^3}{EI_y}$$

$$w_B(N_{BG}) = \frac{N_{BG}(3a)^3}{6EI_y} \left(3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} \right) = \frac{1}{3} \frac{N_{BG} a^3}{EI_y}$$

$$w_B(N_{CH}) = \frac{N_{CH}(3a)^3}{6EI_y} \left(3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} \right) = \frac{5}{6} \frac{N_{CH} a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow w_B = \frac{a^3}{6EI_y} (8F + 2N_{BG} + 5N_{CH})$$

$$w_C(F) = \frac{F(3a)^3}{6EI_y} \left(3 \cdot \frac{2^2}{3^2} - \frac{2^3}{3^3} \right) = \frac{14}{3} \frac{F a^3}{EI_y}$$

$$w_C(N_{BG}) = \frac{N_{BG}(3a)^3}{6EI_y} \left(3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2}{3^2} - \frac{2^3}{3^3} + \frac{1}{3^3} \right) = \frac{5}{6} \frac{N_{BG} a^3}{EI_y}$$

$$w_C(N_{CH}) = \frac{N_{CH}(3a)^3}{6EI_y} \left(3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2^2}{3^2} - \frac{2^3}{3^3} \right) = \frac{8}{3} \frac{N_{CH} a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow w_C = \frac{a^3}{6EI_y} (28F + 5N_{BG} + 16N_{CH})$$

Balken EH :

$$w_G(N_{BG}) = -\frac{N_{BG}(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = -\frac{1}{3} \frac{N_{BG}a^3}{EI_y}$$

$$w_G(N_{CH}) = -\frac{N_{CH}(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = -\frac{5}{6} \frac{N_{CH}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow w_G = -\frac{a^3}{6EI_y} (2N_{BG} + 5N_{CH})$$

$$w_H(N_{BG}) = -\frac{N_{BG}(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = -\frac{5}{6} \frac{N_{BG}a^3}{EI_y}$$

$$w_H(N_{CH}) = -\frac{N_{CH}(2a)^3}{3EI_y} = -\frac{8}{3} \frac{N_{CH}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow w_H = -\frac{a^3}{6EI_y} (5N_{BG} + 16N_{CH})$$

Kinematische Verträglichkeitsbedingungen:

$$w_B = w_G : 8F + 2N_{BG} + 5N_{CH} = -2N_{BG} - 5N_{CH}$$

$$w_C = w_H : 28F + 5N_{BG} + 16N_{CH} = -5N_{BG} - 16N_{CH}$$

Daraus folgt das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung der Normalkräfte:

$$\begin{array}{rclcl} 4 & N_{BG} & + & 10 & N_{CH} & = & -8 & F \\ 10 & N_{BG} & + & 32 & N_{CH} & = & -28 & F \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung:

$$N_{BG} = \frac{6}{7}F, \quad N_{CH} = -\frac{8}{7}F$$

b) Vertikalverschiebung von Punkt D

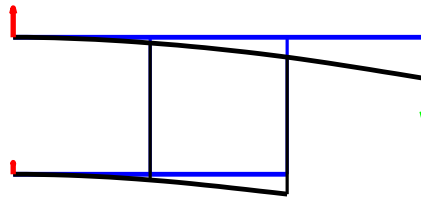
$$w_D(F) = \frac{F(3a)^3}{3EI_y} = 9 \frac{Fa^3}{EI_y}$$

$$w_D(N_{CH}) = \frac{N_{CH}(3a)^3}{6EI_y} \left(3 \cdot \frac{2^2}{3^2} - \frac{2^3}{3^3} \right) = \frac{14}{3} \frac{N_{CH}a^3}{EI_y} = -\frac{8}{7} \cdot \frac{14}{3} \frac{Fa^3}{EI_y} = -\frac{16}{3} \frac{Fa^3}{EI_y}$$

$$w_D(N_{BG}) = \frac{N_{BG}(3a)^3}{6EI_y} \left(3 \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} \right) = \frac{4}{3} \frac{N_{BG}a^3}{EI_y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{7} \frac{Fa^3}{EI_y} = \frac{8}{7} \frac{Fa^3}{EI_y}$$

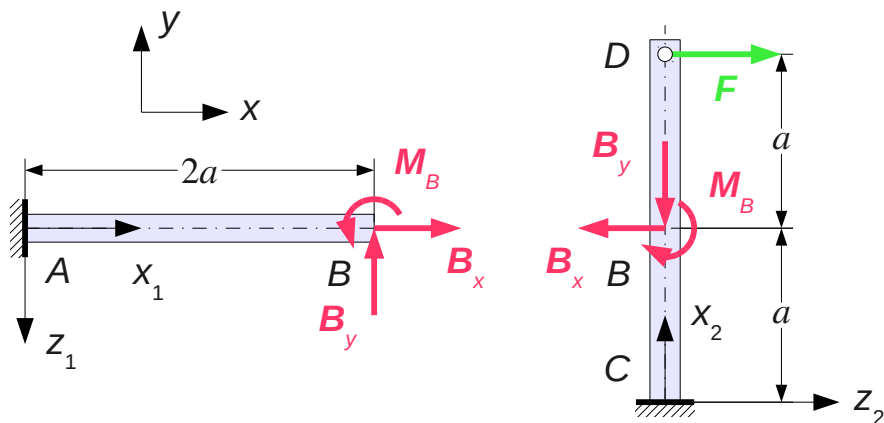
$$\rightarrow w_D = \frac{F a^3}{21 E I_y} (9 \cdot 21 - 16 \cdot 7 + 8 \cdot 3) = \frac{101 F a^3}{21 E I_y}$$

Loadcase 1:



Aufgabe 5

Statisch bestimmte Teilsysteme:

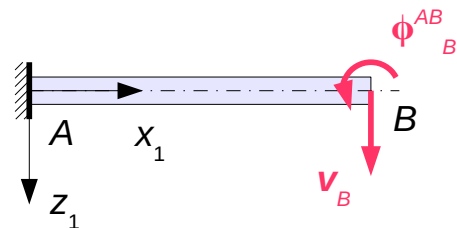


Da die Balken dehnstarr sind, gilt: $u_B = v_B = 0$

a) Schnittlasten

Balken AB:

$$v_B(B_y) = -\frac{8 B_y a^3}{3 E I_y}$$



$$v_B(M_B) = -\frac{M_B(2a)^2}{2EI_y} = -2\frac{M_B a^2}{EI_y}$$

$$v_B = v_B(B_y) + v_B(M_B) = -\frac{a^2}{3EI_y}(8B_y a + 6M_B) = 0 \rightarrow 8B_y a + 6M_B = 0$$

$$\phi_B^{AB}(B_y) = \frac{B_y(2a)^2}{2EI_y} = 2\frac{B_y a^2}{EI_y}$$

$$\phi_B^{AB}(M_B) = 2\frac{M_B a}{EI_y}$$

$$\phi_B^{AB} = \phi_B^{AB}(B_y) + \phi_B^{AB}(M_B) = \frac{2a}{EI_y}(B_y a + M_B)$$

Balken CD:

$$u_B(F) = \frac{F(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{5Fa^3}{6EI_y}$$

$$u_B(B_x) = -\frac{B_x(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = -\frac{1}{3}\frac{B_x a^3}{EI_y}$$

$$u_B(M_B) = \frac{M_B(2a)^2}{2EI_y} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{M_B a^2}{2EI_y}$$

$$u_B = u_B(F) + u_B(B_x) + u_B(M_B) = \frac{a^2}{6EI_y}(5Fa - 2B_x a + 3M_B) = 0$$

$$\rightarrow 2B_x a - 3M_B = 5Fa$$

$$\phi_B^{CD}(F) = -\frac{F(2a)^2}{2EI_y} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) = -\frac{3Fa^2}{2EI_y}$$

$$\phi_B^{CD}(B_x) = \frac{B_x(2a)^2}{2EI_y} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{1}{2}\frac{B_x a^2}{EI_y}$$

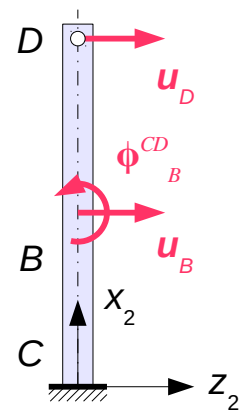
$$\phi_B^{CD}(M_B) = -\frac{1}{2}\frac{M_B(2a)}{EI_y} = -\frac{M_B a}{EI_y}$$

$$\phi_B^{CD} = \phi_B^{CD}(F) + \phi_B^{CD}(B_x) + \phi_B^{CD}(M_B) = \frac{a}{2EI_y}(-3Fa + B_x a - 2M_B)$$

Kinematische Verträglichkeitsbedingung: $\phi_B^{AB} = \phi_B^{CD}$

$$4B_y a + 4M_B = -3Fa + B_x a - 2M_B$$

$$\rightarrow -B_x a + 4B_y a + 6M_B = -3Fa$$



Zusammen mit den Bedingungen $u_B = 0$ und $v_B = 0$ stehen drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Schnittlasten zur Verfügung:

$$u_B = 0 \quad : \quad 2 B_x a \quad - \quad 3 M_B = 5 F a \quad (1)$$

$$v_B = 0 \quad : \quad 8 B_y a + 6 M_B = 0 \quad (2)$$

$$\phi_B^{AB} = \phi_B^{CD} \quad : \quad -B_x a + 4 B_y a + 6 M_B = -3 F a \quad (3)$$

Auflösen:

$$(1) \rightarrow B_x a = \frac{5}{2} F a + \frac{3}{2} M_B$$

$$(2) \rightarrow B_y a = -\frac{3}{4} M_B$$

$$\text{in (3)} \rightarrow -\frac{5}{2} F a - \frac{3}{2} M_B - 3 M_B + 6 M_B = -3 F a$$

$$\rightarrow (-3 - 6 + 12) M_B = (-6 + 5) F a \rightarrow \underline{M_B = -\frac{1}{3} F a}$$

$$\rightarrow B_x = \frac{5}{2} F - \frac{1}{2} F = \underline{2F}, \quad \underline{B_y = \frac{1}{4} F}$$

b) Horizontalverschiebung von Punkt D

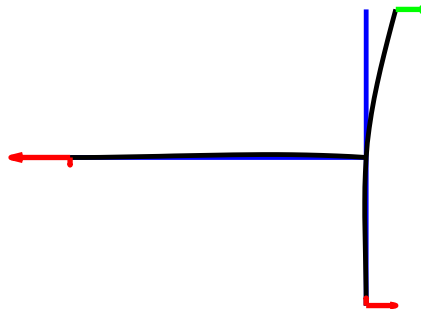
$$u_D(F) = \frac{8 F a^3}{3 E I_y}$$

$$u_D(B_x) = -\frac{B_x (2a)^3}{6 E I_y} \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = -\frac{5 B_x a^3}{6 E I_y} = -\frac{5 F a^3}{3 E I_y}$$

$$u_D(M_B) = -\frac{M_B (2a)^2}{2 E I_y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{3 M_B a^2}{2 E I_y} = -\frac{1 F a^3}{2 E I_y}$$

$$\rightarrow u_D = \frac{F a^3}{6 E I_y} (16 - 10 - 3) = \underline{\underline{\frac{1 F a^3}{2 E I_y}}}$$

Loadcase 1:

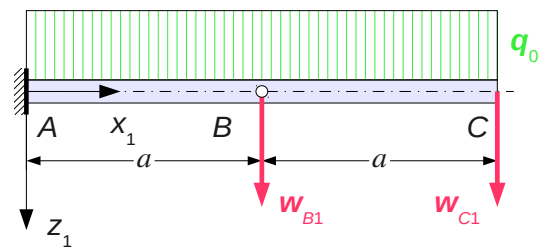


Aufgabe 6

a) Federkraft

Oberer Balken

Lastfall 1: Streckenlast



Aus der Biegeliniertabelle kann entnommen werden:

$$w_1(x) = \frac{q_0 (2a)^4}{24 E I_y} \left[6 \left(\frac{x_1}{2a} \right)^2 - 4 \left(\frac{x_1}{2a} \right)^3 + \left(\frac{x_1}{2a} \right)^4 \right]$$

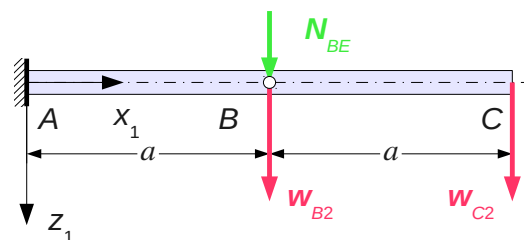
$$= \frac{q_0 a^4}{24 E I_y} \left[24 \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 - 8 \left(\frac{x_1}{a} \right)^3 + \left(\frac{x_1}{a} \right)^4 \right]$$

Daraus folgt:

$$w_{B1} = w_1(a) = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y} (24 - 8 + 1) = \frac{17 q_0 a^4}{24 E I_y}$$

$$w_{C1} = w_2(a) = \frac{16 q_0 a^4}{24 E I_y} (6 - 4 + 1) = 2 \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

Lastfall 2: Federkraft



Aus der Biegeliniertabelle kann entnommen werden:

$$w_2(x) = \frac{N_{BE}(2a)^3}{6EI_y} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x_1}{2a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{2a} \right)^3 + \left\langle \frac{x_1}{2a} - \frac{1}{2} \right\rangle^3 \right]$$

$$= \frac{N_{BE}a^3}{6EI_y} \left[3 \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{a} \right)^3 + \left\langle \frac{x_1}{a} - 1 \right\rangle^3 \right]$$

Daraus folgt:

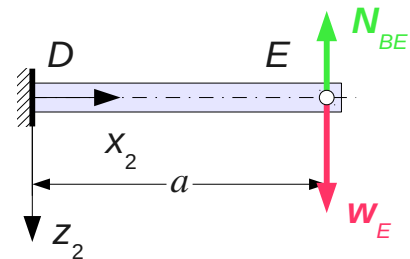
$$w_{B2} = w_2(a) = \frac{N_{BE}a^3}{6EI_y} (3 - 1) = \frac{1}{3} \frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

$$w_{C2} = w_2(2a) = \frac{N_{BE}a^3}{6EI_y} (3 \cdot 4 - 8 + 1) = \frac{5}{6} \frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

Unterer Balken

Aus der Biegeliniertabelle kann entnommen werden:

$$w_E = \frac{-N_{BE}a^3}{3EI_y}$$



Verträglichkeitsbedingung

$$N_{BE} = c \Delta L_{BE} = c (w_E - (w_{B1} + w_{B2}))$$

Einsetzen ergibt:

$$N_{BE} = c \left(-\frac{1}{3} \frac{N_{BE}a^3}{EI_y} - \frac{17}{24} \frac{q_0a^4}{EI_y} - \frac{1}{3} \frac{N_{BE}a^3}{EI_y} \right) = -\frac{ca^3}{EI_y} \left(\frac{2}{3} N_{BE} + \frac{17}{24} q_0a \right)$$

Daraus folgt:

$$\left(1 + \frac{2}{3} \frac{ca^3}{EI_y} \right) N_{BE} = -\frac{17}{24} \frac{cq_0a^4}{EI_y} \rightarrow N_{BE} = -\frac{17}{24} \frac{\frac{ca^3}{EI_y}}{1 + \frac{2}{3} \frac{ca^3}{EI_y}} q_0a = -\frac{17}{24} \frac{q_0a}{\frac{2}{3} + \frac{EI_y}{ca^3}}$$

$$\rightarrow N_{BE} = -\frac{17q_0a}{16 + 24 \frac{EI_y}{ca^3}}$$

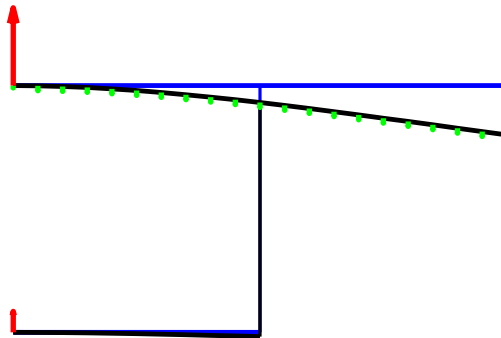
Mit $c = EI_y/a^3$ folgt: $N_{BE} = -\frac{17}{40} q_0a = \underline{\underline{-0,425 q_0a}}$

b) Vertikalverschiebung von Punkt C

$$w_C = w_{C1} + w_{C2} = \frac{a^3}{E I_y} \left(2 q_0 a + \frac{5}{6} N_{BE} \right) = \frac{q_0 a^4}{E I_y} \left(2 - \frac{5}{6} \cdot \frac{17}{40} \right) = \frac{79}{48} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

$$\rightarrow \underline{w_C = 1,646 \frac{q_0 a^4}{E I_y}}$$

Loadcase 1:

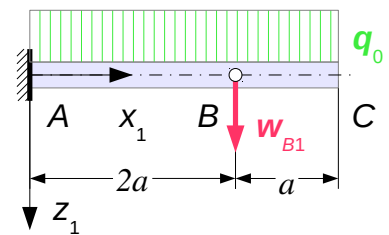
**Aufgabe 7**Balken AB

Lastfall 1: Streckenlast

Aus der Biegeliniertabelle kann entnommen werden:

$$\begin{aligned} w_1(x_1) &= \frac{q_0 (3a)^4}{24 E I_y} \left[6 \left(\frac{x_1}{3a} \right)^2 - 4 \left(\frac{x_1}{3a} \right)^3 + \left(\frac{x_1}{3a} \right)^4 \right] \\ &= \frac{q_0 a^4}{24 E I_y} \left[54 \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 - 12 \left(\frac{x_1}{a} \right)^3 + \left(\frac{x_1}{a} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

$$w_{B1} = w_1(2a) = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y} (54 \cdot 4 - 12 \cdot 8 + 16) = \underline{\underline{\frac{17}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y}}}$$

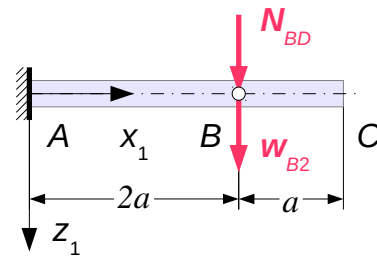


Lastfall 2: Unbekannte Stabkraft N_{BD}

Aus der Biegeliniertabelle kann entnommen werden:

$$w_2(x_1) = \frac{N_{BD}(3a)^3}{6EI_y} \left[2\left(\frac{x_1}{3a}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{3a}\right)^3 + \left\langle \frac{x_1}{3a} - \frac{2}{3} \right\rangle^3 \right] = \frac{N_{BD}a^3}{6EI_y} \left[6\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^3 + \left\langle \frac{x_1}{a} - 2 \right\rangle^3 \right]$$

$$w_{B2} = w_2(2a) = \frac{N_{BD}a^3}{6EI_y} (6 \cdot 4 - 8) = \underline{\underline{\frac{8}{3} \frac{N_{BD}a^3}{EI_y}}}$$

Starrer Körper

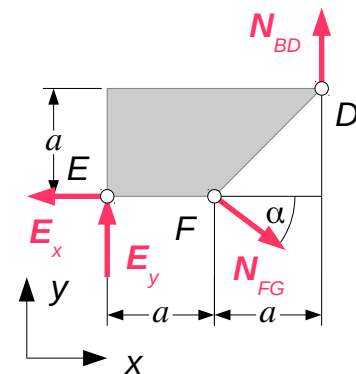
Geometrie:

$$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{4}{5}, \quad \sin(\alpha) = \frac{3}{5}$$

Gleichgewicht:

$$\sum M^E = 0 : 2a N_{BD} - a N_{FG} \sin(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow 2 N_{BD} = \frac{3}{5} N_{FG} \rightarrow 10 N_{BD} = 3 N_{FG}$$



Kinematik:

$$v_D = 2a\phi, \quad u_F = 0, \quad v_F = a\phi$$

Stab FG

$$\Delta L_{FG} = (u_G - u_F) \cos(-\alpha) + (v_G - v_F) \sin(-\alpha)$$

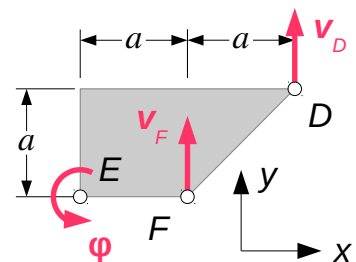
$$= v_F \sin(\alpha) = \frac{3}{5} v_F$$

$$L_{FG} = \sqrt{2^2 + \frac{3^2}{2^2}} a = \frac{5}{2} a$$

$$N_{FG} = EA \frac{\Delta L_{FG}}{L_{FG}} = \frac{2}{5} EA \cdot \frac{3}{5} \frac{v_F}{a} = \frac{6}{25} EA \phi$$

Aus dem Momentengleichgewicht folgt:

$$N_{BD} = \frac{3}{10} N_{FG} = \frac{18}{250} EA \phi$$



Verträglichkeitsbedingung

Da der Stab BD starr ist, muss gelten: $v_D = -w_B$

$$2a\phi = -(w_{B1} + w_{B2}) = -\frac{17}{3} \frac{q_0 a^4}{EI_y} - \frac{8}{3} \frac{N_{BD} a^3}{EI_y} = -\frac{17}{3} \frac{q_0 a^4}{EI_y} - \frac{24}{125} \frac{Aa^2}{I_y} a\phi$$

$$\left(2 + \frac{24}{125} \frac{Aa^2}{I_y}\right) a\phi = -\frac{17}{3} \frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

$$\phi = -\frac{17}{3} \frac{q_0 a^3}{EI_y} \frac{1}{2 + \frac{24}{125} \frac{Aa^2}{I_y}} = -\frac{17}{3} \frac{q_0 a^3}{E} \frac{125}{250 I_y + 24 Aa^2}$$

Stabkräfte

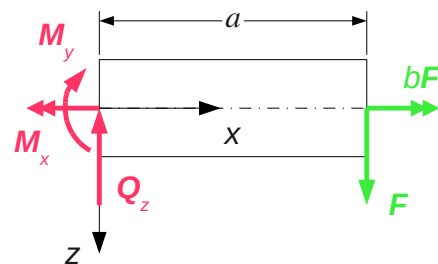
$$N_{BD} = -\frac{18}{250} \frac{17}{3} \frac{125 A q_0 a^3}{250 I_y + 24 Aa^2} = -\frac{51 q_0 a}{24 + 250 I_y / (Aa^2)}$$

$$N_{FG} = -\frac{6}{25} \frac{17}{3} \frac{125 A q_0 a^3}{250 I_y + 24 Aa^2} = -\frac{170 q_0 a}{24 + 250 I_y / (Aa^2)}$$

Aufgabe 8a) Innendurchmesser

Die am Querarm angreifende Kraft kann durch eine im Mittelpunkt des Rohrs angreifende Kraft und ein Torsionsmoment ersetzt werden.

Die größte Beanspruchung tritt an der Einspannung auf. Sie setzt sich aus einer Biegespannung und einer Torsionsspannung zusammen.

Biegespannung

Biegemoment an der Einspannung: $M_y = -aF$

Biegespannung: $\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{aF}{W_y}$

Die betragsmäßig größte Biegespannung tritt am oberen und unteren Rand

des Rohrs auf.

Mit dem Widerstandsmoment

$$W_y = \frac{\pi}{4} \frac{R_a^4 - R_i^4}{R_a} = \frac{\pi}{32} \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}$$

des Kreisrings gilt:

$$\sigma_{max} = \frac{32 a F}{\pi} \frac{d_a}{d_a^4 - d_i^4}$$

Torsionsspannung

Das Torsionsmoment ist längs des Rohrs konstant: $M_x = b F$

Die größte Torsionsspannung tritt am äußeren Rand des Rohrs auf. Sie hat den Wert:

$$\tau_{max} = \frac{|M_x|}{W_T} = \frac{b F}{W_T}$$

Mit dem Torsionswiderstandsmoment

$$W_T = \frac{\pi}{2} \frac{R_a^4 - R_i^4}{R_a} = \frac{\pi}{16} \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}$$

gilt:

$$\tau_{max} = \frac{16 b F}{\pi} \frac{d_a}{d_a^4 - d_i^4}$$

Auslegung

Die größte Beanspruchung tritt an der Einspannstelle im oberen und unteren Punkt des äußeren Randes des Rohrs auf. Die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \sigma_{V, GH} &= \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3 \tau_{max}^2} = \sqrt{\left(\frac{32 a F}{\pi} \frac{d_a}{d_a^4 - d_i^4} \right)^2 + 3 \left(\frac{16 b F}{\pi} \frac{d_a}{d_a^4 - d_i^4} \right)^2} \\ &= \frac{16 F}{\pi} \frac{d_a}{d_a^4 - d_i^4} \sqrt{4 a^2 + 3 b^2} \leq \sigma_{zul}. \end{aligned}$$

Auflösen nach dem gesuchten Innendurchmesser d_i ergibt:

$$\frac{16 F d_a}{\pi \sigma_{zul}} \sqrt{4 a^2 + 3 b^2} \leq d_a^4 - d_i^4 \rightarrow d_i^4 \leq d_a^4 - \frac{16 F d_a \sqrt{4 a^2 + 3 b^2}}{\pi \sigma_{zul}}$$

Zahlenwert:

$$\sqrt{4a^2 + 3b^2} = \sqrt{4 \cdot 300^2 + 3 \cdot 100^2} \text{ mm} = 624,5 \text{ mm}$$

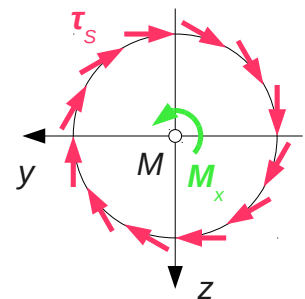
$$\frac{16 F d_a}{\pi \sigma_{zul}} = \frac{16 \cdot 250 \text{ N} \cdot 20 \text{ mm}}{\pi \cdot 180 \text{ N/mm}^2} = 141,5 \text{ mm}^3$$

$$d_i^4 \leq 20^4 \text{ mm}^4 - 114,5 \text{ mm}^4 \cdot 624,5 \text{ mm} = 160000 \text{ mm}^4 - 88350 \text{ mm}^4 = 71650 \text{ mm}^4$$

$$\rightarrow d_i \leq \underline{16,36 \text{ mm}}$$

b) Schubspannung in der Schweißnaht

Es darf angenommen werden, dass die Schubspannung in der Schweißnaht konstant ist. Das resultierende Moment der Schubspannungen in beiden Schweißnähten um den Kreismittelpunkt muss mit dem Torsionsmoment im Gleichgewicht sein:



$$\sum M^M = 0 : M_x - 2 \cdot \frac{d_a}{2} \cdot \tau_s s \pi d_a = 0$$

$$\rightarrow \tau_s = \frac{M_x}{\pi d_a^2 s} = \frac{b F}{\pi d_a^2 s}$$

Zahlenwert:

$$\tau_s = \frac{100 \text{ mm} \cdot 250 \text{ N}}{\pi \cdot 20^2 \text{ mm}^2 \cdot 5 \text{ mm}} = \underline{3,980 \text{ MPa}}$$

Aufgabe 9

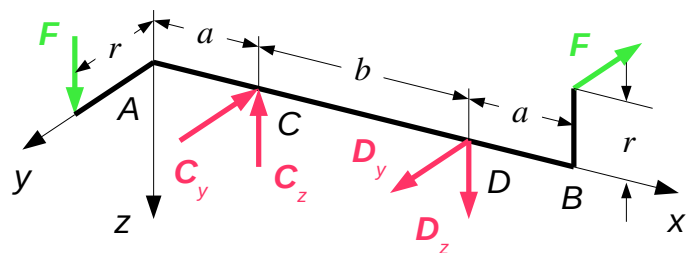
Lagerkräfte

$$\sum M_y^C = 0 : a F - b D_z = 0$$

$$\rightarrow D_z = \frac{a}{b} F$$

$$\sum M_z^C = 0 :$$

$$b D_y - (b + a) F = 0 \rightarrow D_y = \frac{b + a}{b} F = \left(1 + \frac{a}{b}\right) F$$



$$\sum F_y = 0 : -C_y + D_y - F = 0 \rightarrow C_y = D_y - F = \frac{a}{b} F$$

$$\sum F_z = 0 : F - C_z + D_z = 0 \rightarrow C_z = F + D_z = \left(1 + \frac{a}{b}\right) F$$

Zahlenwerte:

$$C_y = \frac{1}{3} \cdot 450 \text{ N} = 150 \text{ N}, \quad C_z = \frac{4}{3} \cdot 450 \text{ N} = 600 \text{ N}$$

$$D_y = \frac{4}{3} \cdot 450 \text{ N} = 600 \text{ N}, \quad D_z = \frac{1}{3} \cdot 450 \text{ N} = 150 \text{ N}$$

Biegemomente

Abschnitt AC : Gleichgewicht für die linke Teilwelle

$$M_y(x) = -x F, \quad M_y(a) = -a F = -45000 \text{ Nmm} = -45 \text{ Nm}$$

$$M_z(x) = 0$$

Abschnitt CD: Gleichgewicht für die linke Teilwelle

$$M_y(x) = -(x F - (x - a) C_z) = -x F + (x - a) C_z$$

$$M_y(a + b) = -(a + b) F + b C_z = (-a - b + b + a) F = 0$$

$$M_z(x) = -(x - a) C_y$$

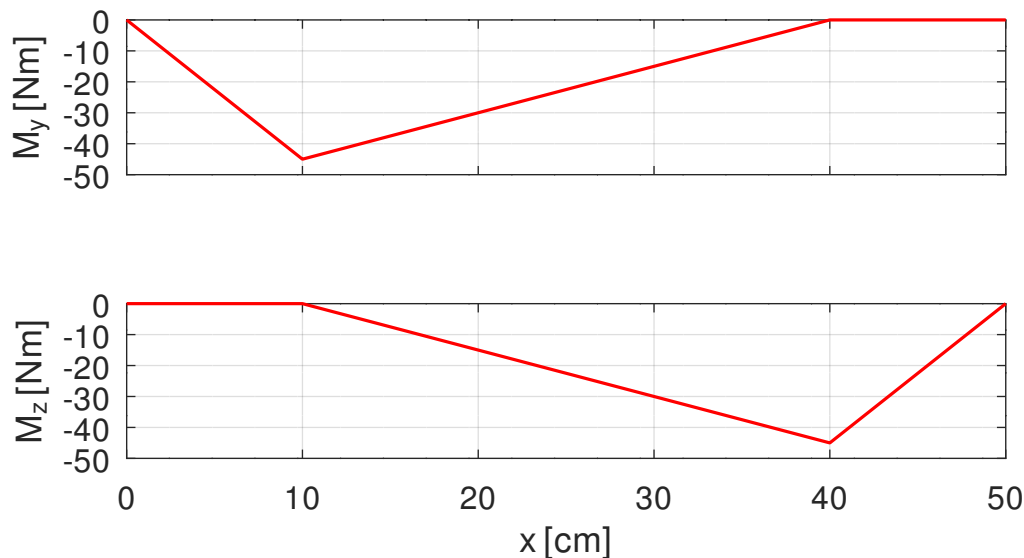
$$M_z(a + b) = -b C_y = -a F = -45 \text{ Nm}$$

Abschnitt DB: Gleichgewicht für die rechte Teilwelle

$$M_y(x) = 0$$

$$M_z(x) = -(2a + b - x) F$$

$$M_z(a + b) = -a F, \quad M_z(2a + b) = 0$$



In den Abschnitten *AC* und *DB* besteht die Belastung aus jeweils nur einem Moment, während sich in dem Abschnitt *CD* die Momente um die *y*- und die *z*-Achse überlagern. Da beim Kreisquerschnitt das Flächenträgheitsmoment um jede Achse durch den Schwerpunkt gleich ist, kann die Biegespannung mit dem Betrag des resultierenden Moments berechnet werden:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

Mit $M_y(x) = -45 \text{ Nm} \left(1 - \frac{x - 100 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}\right)$ und $M_z(x) = -45 \text{ Nm} \left(\frac{x - 100 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}\right)$

folgt:

$$\begin{aligned} M^2(x) &= 45^2 \text{ N}^2 \text{ m}^2 \left[\left(1 - \frac{x - 100 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}\right)^2 + \left(\frac{x - 100 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}\right)^2 \right] \\ &= 45^2 \text{ N}^2 \text{ m}^2 \left[1 + 2 \left(\frac{x - 100 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}\right)^2 - 2 \left(\frac{x - 100 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}\right) \right] \end{aligned}$$

Für die Stelle des Extremwerts gilt:

$$\frac{dM^2}{dx}(x_E) = 0 : 4 \left(\frac{x_E - 100 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}\right) = 2 \rightarrow x_E = 100 \text{ mm} + \frac{300 \text{ mm}}{2} = 250 \text{ mm}$$

Der Wert des Extremums ist:

$$M^2(x_E) = 45^2 \text{ N}^2 \text{ m}^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2} \right] = \frac{45^2 \text{ N}^2 \text{ m}^2}{2}$$

Das Extremum ist kleiner als der Wert an den beiden Intervallgrenzen und daher ein Minimum.

Das größte Biegemoment tritt also in den Punkten C und D auf und beträgt:

$$M_{max} = 45 \text{ Nm}$$

Torsionsmoment

Nur die beiden an den Zahnrädern angreifenden Kräfte liefern einen Beitrag zum Torsionsmoment. Das Torsionsmoment ist daher in der gesamten Welle konstant.

Aus dem Gleichgewicht am rechten Teilbalken für einen beliebigen Schnitt folgt:

$$M_x = -r F$$

$$\text{Zahlenwert: } |M_x| = 100 \text{ mm} \cdot 450 \text{ N} = 45 \text{ Nm}$$

Spannungen

Die größten Spannungen treten am äußeren Rand des Querschnitts auf.

Für den Betrag der größten Biegespannung gilt: $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$

Mit dem Widerstandsmoment

$$W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}$$

des Kreisquerschnitts folgt: $\sigma_{max} = \frac{32 M_{max}}{\pi d^3}$

Der Betrag der größten Torsionsspannung ist: $\tau_{max} = \frac{|M_x|}{W_T}$

Mit dem Torsionswiderstandsmoment

$$W_T = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

des Kreisquerschnitts folgt: $\tau_{max} = \frac{16 |M_x|}{\pi d^3}$

Die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese berechnet sich zu:

$$\sigma_{V, GH} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3 \tau_{max}^2} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{4 M_{max}^2 + 3 M_x^2} \leq \sigma_{zul}$$

Auflösen nach dem gesuchten Durchmesser ergibt:

$$\frac{16}{\pi \sigma_{zul}} \sqrt{4 M_{max}^2 + 3 M_x^2} \leq d^3$$

Zahlenwert:

$$d^3 \geq \frac{16 \sqrt{4 \cdot (45 \cdot 10^3 \text{ Nmm})^2 + 3 \cdot (45 \cdot 10^3 \text{ Nmm})^2}}{\pi \cdot 150 \text{ N/mm}^2} = \frac{16 \sqrt{7}}{\pi} \frac{45 \cdot 10^3 \text{ mm}^3}{150} = 4043 \text{ mm}^3$$

$$\rightarrow \underline{d \geq 16 \text{ mm}}$$

Aufgabe 10

Welle AC

Am Zahnrad B greift die vom Zahnrad E ausgeübte Kraft an.

Berechnung der Kräfte:

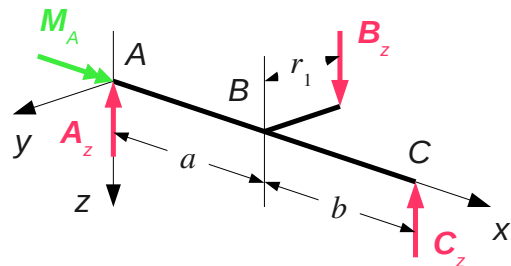
$$\sum M_x^A = 0 : M_A - r_1 B_z = 0$$

$$\rightarrow B_z = \frac{M_A}{r_1}$$

$$\sum M_y^A = 0 : -a B_z + (a+b) C_z = 0$$

$$\rightarrow C_z = \frac{a}{a+b} B_z = \frac{a}{a+b} \frac{M_A}{r_1}$$

$$\sum F_z = 0 : -A_z + B_z - C_z = 0 \rightarrow A_z = B_z - C_z = \frac{a+b-a}{a+b} B_z = \frac{b}{a+b} \frac{M_A}{r_1}$$



Biegemoment: (Gleichgewicht für den linken Teilbalken)

$$M_y(x) = -(-x A_z + (x-a) B_z) = \frac{M_A}{r_1} \left(\frac{b x}{a+b} - (x-a) \right)$$

$$M_y(0) = 0, \quad M_y(a) = \frac{M_A}{r_1} \frac{a b}{a+b}, \quad M_y(a+b) = \frac{M_A}{r_1} (b-b) = 0$$

Das größte Biegemoment tritt an der Stelle B auf. Es hat den Wert:

$$M_{max} = M_y(a) = \frac{M_A}{r_1} \frac{a b}{a+b}$$

Torsionsmoment: (Gleichgewicht für den linken Teilbalken)

$$M_x = -M_A + (x-a)^0 r_1 B_z = -M_A (1 - (x-a)^0)$$

Das Torsionsmoment ist abschnittsweise konstant. Es hat im Bereich AB den Wert

$$M_x = -M_A$$

und ist im Bereich BC null.

Die größte Beanspruchung tritt an der Stelle B im oberen und unteren Punkt des äußeren Rands des Querschnitts auf.

Mit

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_1} = \frac{32 M_{max}}{\pi d_1^3} = \frac{32}{\pi d_1^3} \frac{M_A}{r_1} \frac{ab}{a+b}$$

und $\tau_{max} = \frac{16 |M_x|}{\pi d_1^3} = \frac{16 M_A}{\pi d_1^3}$

berechnet sich die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese zu

$$\sigma_{V, GH} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} = \frac{16 M_A}{\pi d_1^3} \sqrt{4 \left(\frac{ab}{r_1(a+b)} \right)^2 + 3} \leq \sigma_{zul}.$$

Daraus folgt für den Durchmesser:

$$d_1 \geq 2 \sqrt[3]{\frac{2 M_A}{\pi \sigma_{zul}} \sqrt{4 \left(\frac{ab}{r_1(a+b)} \right)^2 + 3}}$$

Zahlenwert:

$$\frac{ab}{r_1(a+b)} = \frac{300 \cdot 400}{50 \cdot 700} = \frac{24}{7}$$

$$\sqrt{4 \left(\frac{ab}{r_1(a+b)} \right)^2 + 3} = \sqrt{\frac{4 \cdot 24^2}{49} + 3} = 7,073$$

$$\frac{2 M_A}{\pi \sigma_{zul}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{\pi \cdot 150 \text{ N/mm}^2} = 42,44 \text{ mm}^3$$

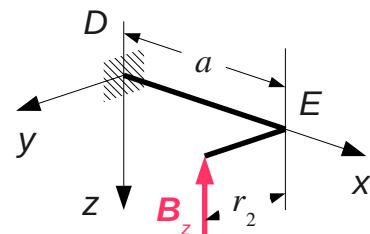
$$d_1 \geq 2 \sqrt[3]{42,44 \text{ mm}^3 \cdot 7,073} = \underline{\underline{13,40 \text{ mm}}}$$

Welle DE

Biege- und Torsionsmoment werden aus dem Gleichgewicht für den rechten Teilbalken ermittelt:

$$M_y(x) = (a-x) B_z = \frac{a-x}{r_1} M_A$$

$$M_x = -r_2 B_z = -\frac{r_2}{r_1} M_A$$



Die größte Beanspruchung tritt an der Stelle D im oberen und unteren Punkt des äußeren Rands des Querschnitts auf.

Mit

$$\sigma_{\max} = \frac{a}{r_1} \frac{M_A}{W_2} = \frac{32}{\pi d_2^3} \frac{M_A a}{r_1}$$

und

$$\tau_{\max} = \frac{16|M_x|}{\pi d_2^3} = \frac{16}{\pi d_2^3} \frac{M_A r_2}{r_1}$$

berechnet sich die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese zu

$$\sigma_{V, GH} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \frac{16 M_A}{\pi d_2^3 r_1} \sqrt{4a^2 + 3r_2^2} \leq \sigma_{zul}.$$

Daraus folgt für den Durchmesser:

$$d_2 \geq 2 \sqrt[3]{\frac{2 M_A}{\pi \sigma_{zul}} \frac{\sqrt{4a^2 + 3r_2^2}}{r_1}}$$

Zahlenwert:

$$\frac{\sqrt{4a^2 + 3r_2^2}}{r_1} = \frac{\sqrt{4 \cdot 300^2 + 3 \cdot 25^2}}{50} = 12,03$$

$$\frac{2 M_A}{\pi \sigma_{zul}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{\pi \cdot 150 \text{ N/mm}^2} = 42,44 \text{ mm}^3$$

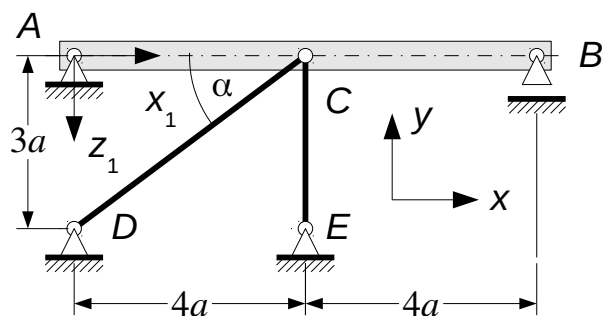
$$d_2 \geq 2 \sqrt[3]{42,44 \text{ mm}^3 \cdot 12,03} = \underline{15,99 \text{ mm}}$$

Aufgabe 11

Geometrie:

$$L_{CD} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a$$

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$$



Das System wird in zwei Teilsysteme zerlegt:

1. Teilsystem 1: Balken AB
2. Teilsystem 2: Stäbe CD und CE

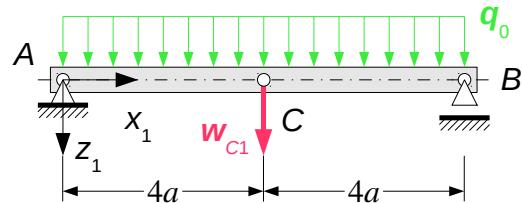
Die Verschiebung von Punkt C muss für beide Teilsysteme gleich sein.

Balken AB

Lastfall 1: Streckenlast

Aus der Biegeliniertabelle kann entnommen werden:

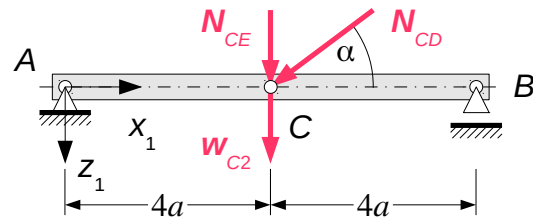
$$w_{C1} = \frac{5}{384} \frac{q_0 (8a)^4}{EI_y} = \frac{160}{3} \frac{q_0 a^4}{EI_y}$$



Lastfall 2: Stabkräfte

Für die resultierende Kraft im Punkt C gilt:

$$\begin{aligned} F &= N_{CE} + N_{CD} \sin(\alpha) \\ &= N_{CE} + \frac{3}{5} N_{CD} \end{aligned}$$



Aus der Biegeliniertabelle kann entnommen werden:

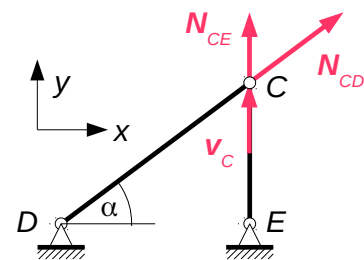
$$w_{C2} = \frac{F (8a)^3}{48 EI_y} = \frac{32}{3} \frac{a^3}{EI_y} \left(N_{CE} + \frac{3}{5} N_{CD} \right)$$

Stabsystem

Mit $u_C = 0$ gilt für die Längenänderungen:

$$\Delta L_{DC} = v_C \sin(\alpha) = \frac{3}{5} v_C$$

$$\Delta L_{EC} = v_C$$



Stabgleichungen:

$$N_{CD} = EA \frac{\Delta L_{CD}}{L_{CD}} = \frac{3}{25} \frac{EA}{a} v_C, \quad N_{CE} = EA \frac{\Delta L_{CE}}{L_{CE}} = \frac{1}{3} \frac{EA}{a} v_C$$

Verträglichkeit und Stabkräfte

$$v_C = -w_C = -(w_{C1} + w_{C2}) :$$

$$v_C = -\frac{160}{3} \frac{q_0 a^4}{EI_y} - \frac{32}{3} \frac{a^3}{EI_y} \frac{EA}{a} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{25} \right) v_C$$

$$\left[1 + \frac{32}{3} \frac{a^2 A}{I_y} \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{125} \right) \right] v_c = -\frac{160}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

$$\left(1 + \frac{4864}{1125} \frac{a^2 A}{I_y} \right) v_c = -\frac{160}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

Mit

$$\frac{a^2 A}{I_y} = \frac{1125}{256}$$

folgt:

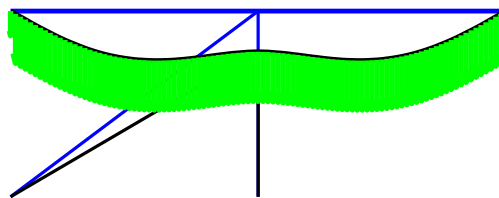
$$20 v_c = -\frac{160}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y} \rightarrow v_c = -\frac{8}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

Damit gilt für die Stabkräfte:

$$N_{CD} = -\frac{3}{25} \frac{E A}{a} \cdot \frac{8}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y} = -\frac{8}{25} \frac{a^2 A}{I_y} q_0 a = -\frac{45}{32} q_0 a$$

$$N_{CE} = -\frac{1}{3} \frac{E A}{a} \cdot \frac{8}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y} = -\frac{8}{9} \frac{a^2 A}{I_y} q_0 a = -\frac{125}{32} q_0 a$$

Loadcase 1:

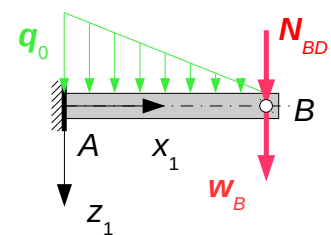


Aufgabe 12

Die Aufgabe lässt sich mit Superposition lösen.

Oberer Balken

Lastfall 1: Streckenlast



$$w_{B1} = \frac{q_0 a^4}{30 E I_y}$$

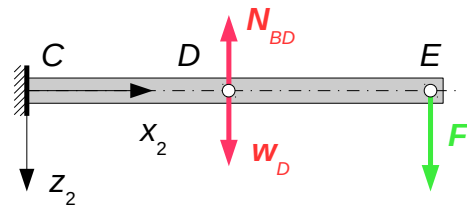
Lastfall 2: Kraft N_{BD}

$$w_{B2} = \frac{N_{BD} a^3}{3 E I_y}$$

Unterer Balken

Lastfall 1: Kraft F

$$w_{D1} = \frac{8 F a^3}{6 E I_y} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{5 F a^3}{6 E I_y}$$

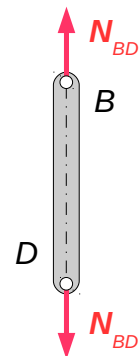


Lastfall 2: Kraft N_{BD}

$$w_{D2} = -\frac{8 N_{BD} a^3}{6 E I_y} \left(3 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} \right) = -\frac{N_{BD} a^3}{3 E I_y}$$

Stab

$$\Delta L_{BD} = \frac{N_{BD} a}{E A}$$



Verträglichkeitsbedingung

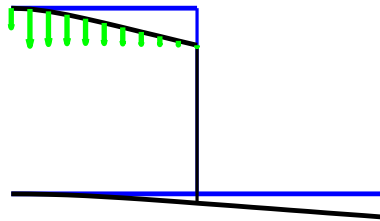
$$\Delta L_{BD} = w_D - w_B$$

$$\frac{N_{BD} a}{E A} = \frac{a^3}{6 E I_y} \left(5 F - 2 N_{BD} - \frac{q_0 a}{5} - 2 N_{BD} \right)$$

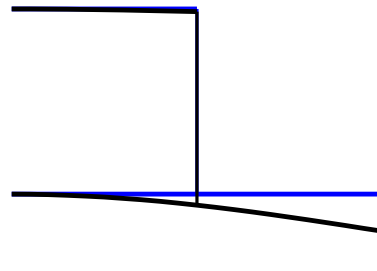
$$\left(\frac{1}{A} + \frac{2 a^2}{3 I_y} \right) N_{BD} = \frac{a^2}{6 I_y} \left(5 F - \frac{q_0 a}{5} \right)$$

$$\rightarrow \left(4 + 6 \frac{I_y}{a^2 A} \right) N_{BD} = \frac{25 F - q_0 a}{5} \rightarrow N_{BD} = \frac{25 F - q_0 a}{20 + 30 I_y / (a^2 A)}$$

Loadcase 1:



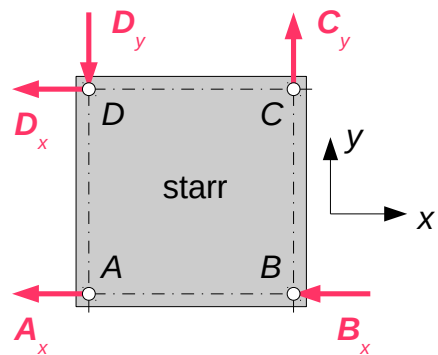
Loadcase 2:



Aufgabe 13

a) Freischnitt des starren Körper

In den Gelenken A und B treten keine Kräfte in y -Richtung auf, da sich der starre Körper nur in x -Richtung bewegen kann und sich daher die Länge der in diesen Punkten angeschlossenen Balken nicht ändert.



b) Verschiebung des starren Körpers

Der starre Körper kann sich nur in x -Richtung verschieben. Da der Körper starr ist, gilt:

$$u_A = u_B = u_C = u_D = u$$

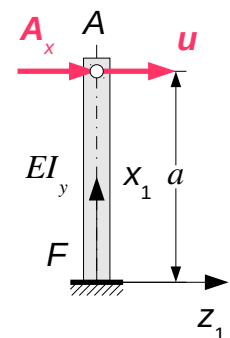
Stab ED :

$$u = \Delta L_{ED} = a \left(\frac{D_x}{E A} + \alpha_T \Delta T \right) \rightarrow D_x = E A \left(\frac{u}{a} - \alpha_T \Delta T \right)$$

Balken FA und GB :

Aus Tabelle:

$$u = \frac{1}{3} \frac{A_x a^3}{E I_y} \rightarrow A_x = \frac{3 E I_y}{a^3} u$$



ebenso: $B_x = \frac{3EI_y}{a^3} u$

Kräftegleichgewicht des starren Körpers in x-Richtung:

$$\sum F_x = 0 : -D_x - A_x - B_x = 0$$

Einsetzen der Beziehungen für die Kräfte ergibt:

$$EA \left(\frac{u}{a} - \alpha_T \Delta T \right) + 6 \frac{EI_y}{a^3} u = 0$$

$$\left(A + 6 \frac{I_y}{a^2} \right) u = A a \alpha_T \Delta T \rightarrow \left(1 + 6 \frac{I_y}{a^2 A} \right) u = a \alpha_T \Delta T$$

Mit $I_y/(a^2 A) = 1/6$ folgt: $u = \frac{1}{2} a \alpha_T \Delta T$

c) Gelenkkräfte

Mit den Ergebnissen aus Teil b) folgt:

$$A_x = B_x = \frac{3}{2} \frac{EI_y}{a^2} \alpha_T \Delta T$$

$$D_x = EA \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \alpha_T \Delta T = -\frac{1}{2} EA \alpha_T \Delta T$$

Die restlichen beiden Kräfte folgen aus den verbleibenden beiden Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper:

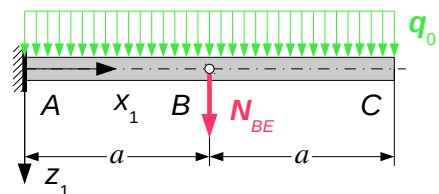
$$\sum M^D = 0 : a C_y - a (A_x + B_x) = 0 \rightarrow C_y = A_x + B_x = 3 \frac{EI_y}{a^2} \alpha_T \Delta T$$

$$\sum F_y = 0 : C_y - D_y = 0 \rightarrow D_y = C_y = 3 \frac{EI_y}{a^2} \alpha_T \Delta T$$

Aufgabe 14

Balken ABC

Lastfall 1: Streckenlast



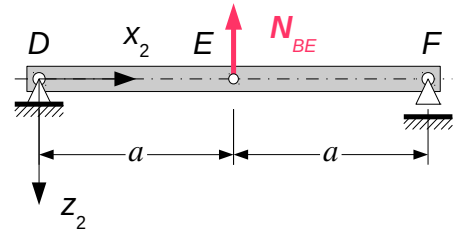
$$w_{B1} = \frac{q_0 (2a)^4}{24 E I_y} \left(6 \cdot \frac{1}{2^2} - 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \right) = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y} (24 - 8 + 1) = \frac{17}{24} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

Lastfall 2: Stabkraft

$$w_{B2} = \frac{N_{BE} (2a)^3}{6 E I_y} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{N_{BE} a^3}{6 E I_y} (3 - 1) = \frac{1}{3} \frac{N_{BE} a^3}{E I_y}$$

Balken DEF

$$w_E = -\frac{N_{BE} (2a)^3}{3 E I_y} \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{2^2} = -\frac{N_{BE} a^3}{6 E I_y}$$



Stab BE

$$\Delta L_{BE} = \frac{N_{BE} a}{E A}$$

Verträglichkeit

$$\Delta L_{BE} = w_E - w_B$$

$$\frac{N_{BE} a}{E A} = -\frac{N_{BE} a^3}{6 E I_y} - \frac{17}{24} \frac{q_0 a^4}{E I_y} - \frac{1}{3} \frac{N_{BE} a^3}{E I_y}$$

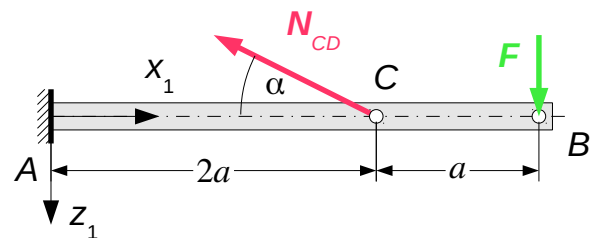
$$17 \frac{q_0 a^3}{I_y} = -\left(\frac{24}{A} + 4 \frac{a^2}{I_y} + 8 \frac{a^2}{I_y} \right) N_{BE} = -12 \frac{a^2}{I_y} \left(2 \frac{I_y}{a^2 A} + 1 \right) N_{BE}$$

$$\rightarrow N_{BE} = -\frac{17}{12} \frac{q_0 a}{1 + 2 I_y / (a^2 A)}$$

Aufgabe 15

Balken AB

Geometrie: $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$



Lastfall 1: Kraft F

Aus Tabelle:

$$w_1(x_1) = \frac{F(3a)^3}{6EI_y} \left(3 \left(\frac{x_1}{3a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{3a} \right)^3 \right) = \frac{F a^3}{6EI_y} \left(9 \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_1^3}{a^3} \right)$$

$$w_{C1} = w_1(2a) = \frac{F a^3}{6EI_y} (9 \cdot 4 - 8) = \frac{14}{3} \frac{F a^3}{EI_y}$$

Lastfall 2: Seilkraft N_{CD}

Aus Tabelle:

$$w_2(x_1) = -\frac{N_{CD} \sin(\alpha) (3a)^3}{6EI_y} \left(3 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{x_1}{3a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{3a} \right)^3 + \left\langle \frac{x_1}{3a} - \frac{2}{3} \right\rangle^3 \right)$$

$$= -\frac{N_{CD} a^3}{6\sqrt{5}EI_y} \left(6 \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_1^3}{a^3} + \left\langle \frac{x_1}{a} - 2 \right\rangle^3 \right)$$

$$w_{C2} = w_2(2a) = -\frac{N_{CD} a^3}{6\sqrt{5}EI_y} (6 \cdot 4 - 8) = -\frac{8 N_{CD} a^3}{3\sqrt{5}EI_y}$$

Seil CDMit $u_C = 0$ (Balken AB ist dehnstarr) gilt für die Längenänderung:

$$\Delta L_{CD} = -v_C \sin(180^\circ - \alpha) = -v_C \sin(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}} v_C$$

Aus der Stabgleichung

$$\Delta L_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot \sqrt{5} a}{EA}$$

folgt:

$$v_C = -\sqrt{5} \Delta L_{CD} = -\frac{5a}{EA} N_{CD}$$

Verträglichkeitsbedingung

$$w_C = w_{C1} + w_{C2} = -v_C \rightarrow \frac{14}{3} \frac{F a^3}{EI_y} - \frac{8 N_{CD} a^3}{3\sqrt{5}EI_y} = \frac{5 N_{CD} a}{EA}$$

Mit

$$A = 15 \frac{I_y}{a^2}$$

folgt:

$$\frac{a^3}{3I_y} \left(14F - \frac{8}{\sqrt{5}} N_{CD} \right) = \frac{5N_{CD}a^3}{15I_y} = \frac{N_{CD}a^3}{3I_y}$$

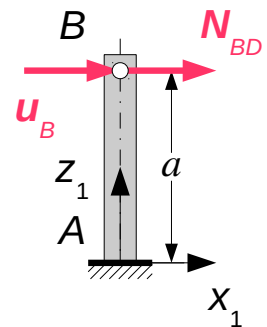
$$\rightarrow 14F = \left(1 + \frac{8}{\sqrt{5}} \right) N_{CD} \rightarrow N_{CD} = \frac{14F}{1 + \frac{8}{\sqrt{5}}} = \frac{14\sqrt{5}F}{8 + \sqrt{5}} = 3,058F$$

Aufgabe 16

Balken AB

Aus Tabelle:

$$u_B = \frac{1}{3} \frac{N_{BD} a^3}{EI_y}$$



Balken CE

Lastfall 1: Kraft F

$$u_{D1} = \frac{F(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{F a^3}{6EI_y} (6 - 1) = \frac{5}{6} \frac{F a^3}{EI_y}$$

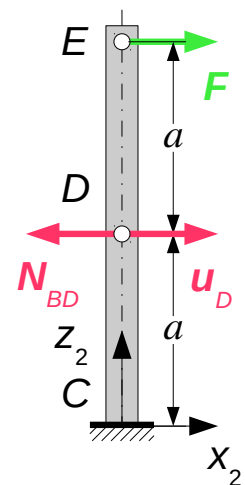
Lastfall 2: Kraft N_{BD}

$$u_{D2} = -\frac{N_{BD}(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2^3} - \frac{1}{2^3} \right) = -\frac{N_{BD} a^3}{3EI_y}$$

Verträglichkeitsbedingung

$$u_B = u_{D1} + u_{D2} : \frac{1}{3} \frac{N_{BD} a^3}{EI_y} = \frac{5}{6} \frac{F a^3}{EI_y} - \frac{N_{BD} a^3}{3EI_y}$$

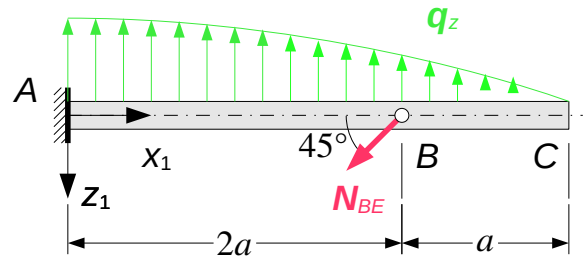
$$\rightarrow 4N_{BD} = 5F \rightarrow N_{BD} = \frac{5}{4} F$$



Aufgabe 17

Tragflügel ABC

Lastfall 1: Streckenlast



$$EI_y \frac{d^4 w_1}{dx_1^4} = -q_0 \left(1 - \frac{1}{9} \frac{x_1^2}{a^2} \right)$$

$$EI_y \frac{d^3 w_1}{dx_1^3} = -q_0 \left(x_1 - \frac{1}{27} \frac{x_1^3}{a^2} + c_1 \right) = -Q_z(x_1)$$

$$EI_y \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = -q_0 \left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{108} \frac{x_1^4}{a^2} + c_1 x_1 + c_2 \right) = -M_y(x_1)$$

$$EI_y \frac{dw_1}{dx_1} = -q_0 \left(\frac{1}{6} x_1^3 - \frac{1}{540} \frac{x_1^5}{a^2} + \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + c_2 x_1 + c_3 \right)$$

$$EI_y w_1 = -q_0 \left(\frac{1}{24} x_1^4 - \frac{1}{3240} \frac{x_1^6}{a^2} + \frac{1}{6} c_1 x_1^3 + \frac{1}{2} c_2 x_1^2 + c_3 x_1 + c_4 \right)$$

Randbedingungen:

$$Q_z(3a) = 0 : 3a - a + c_1 = 0 \quad \rightarrow c_1 = -2a$$

$$M_y(3a) = 0 : \frac{9}{2} a^2 - \frac{3}{4} a^2 - 6a^2 + c_2 = 0 \quad \rightarrow c_2 = \frac{9}{4} a^2$$

$$\frac{dw_1}{dx_1}(0) = 0 : c_3 = 0$$

$$w_1(0) = 0 : c_4 = 0$$

Verschiebung von Punkt B:

$$w_{B1} = w_1(2a) = -\frac{q_0 a^4}{EI_y} \left(\frac{2^4}{24} - \frac{2^6}{3240} - \frac{2}{6} \cdot 2^3 + \frac{9}{8} \cdot 2^2 \right) = -\frac{2009}{810} \frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

Lastfall 2: Strebenkraft N_{BE}

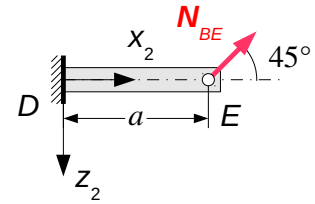
$$\text{aus Tabelle: } w_2(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{N_{BE} (3a)^3}{EI_y} \left[3 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{x_1}{3a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{3a} \right)^3 + \left(\frac{x_1}{3a} - \frac{2}{3} \right)^3 \right]$$

$$w_{B2} = w_2(2a) = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{N_{BE} a^3}{EI_y} (6 \cdot 2^2 - 2^3) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{N_{BE} a^3}{EI_y}$$

Balken DE

aus Tabelle:

$$w_E = -\frac{\sqrt{2}}{6} \frac{N_{BE} a^3}{E I_y}$$

Verträglichkeitsbedingung

$$\Delta L_{BE} = 0 \rightarrow w_B = w_E$$

$$-\frac{2009}{810} \frac{q_0 a^4}{E I_y} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{N_{BE} a^3}{E I_y} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \frac{N_{BE} a^3}{E I_y}$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \sqrt{2} N_{BE} = \frac{2009}{810} q_0 a$$

$$\rightarrow N_{BE} = \frac{2 \cdot 2009}{3 \cdot 810 \sqrt{2}} q_0 a = \frac{2009 \sqrt{2}}{2430} q_0 a = 1,169 q_0 a$$

Aufgabe 18a) Schnittlasten

Rechter Teilbalken:

$$N = \sum F_x = F_x = 100 \text{ kN}$$

$$Q_y = \sum F_y = 0, \quad Q_z = \sum F_y = 0$$

$$M_x = \sum M_x^X = h F_y = 80 \text{ mm} \cdot 80 \text{ kN} = 6,4 \text{ kNm}$$

$$M_y = \sum M_y^X = -h F_x = -80 \text{ mm} \cdot 100 \text{ kN} = -8 \text{ kNm}$$

$$M_z = \sum M_z^X = 0$$

b) Querschnittskennwerte

$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(5^2 - 3^2) \text{ cm}^2 = 50,27 \text{ cm}^2$$

$$I_T = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2}(5^4 - 3^4) \text{ cm}^4 = 854,5 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} I_T = 427,3 \text{ cm}^4$$

c) Spannungen

Normalspannung:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} R = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ N}}{50,27 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} + \frac{8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{427,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} \cdot 50 \text{ mm} \\ = 19,89 \text{ MPa} + 93,61 \text{ MPa} = 113,5 \text{ MPa}$$

Schubspannung:

$$\tau_{xy} = \frac{M_x}{I_T} R = \frac{6,4 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{854,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} \cdot 50 \text{ mm} = 37,45 \text{ MPa}$$

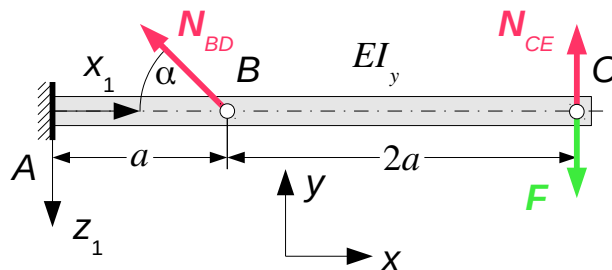
d) Sicherheit gegen Fließen

Vergleichsspannung:

$$\sigma_{V, GH} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \tau_{xy}^2} = \sqrt{113,5^2 + 3 \cdot 37,45^2} \text{ MPa} = \sqrt{17090} \text{ MPa} = 130,7 \text{ MPa}$$

Sicherheit:

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{V, GH}} = \frac{295 \text{ MPa}}{130,7 \text{ MPa}} = 2,25$$

Aufgabe 19KragbalkenWinkel: $\alpha = 45^\circ$ Lastfall 1: $F - N_{CE}$

aus Tabelle:

$$w_1(x_1) = \frac{(F - N_{CE})(3a)^3}{6EI_y} \left[3 \left(\frac{x_1}{3a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{3a} \right)^3 \right] = \frac{(F - N_{CE})a^3}{6EI_y} \left[9 \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{a} \right)^3 \right]$$

$$w_{B1} = w_1(a) = \frac{4}{3} \frac{(F - N_{CE})a^3}{EI_y}, \quad w_{C1} = w_1(3a) = 9 \frac{(F - N_{CE})a^3}{EI_y}$$

Lastfall 2: N_{BD}

aus Tabelle:

$$\begin{aligned}
 w_2(x_1) &= -\frac{\sqrt{2}}{12} \frac{N_{BD}(3a)^3}{EI_y} \left[3 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{x_1}{3a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{3a} \right)^3 + \left\langle \frac{x_1}{3a} - \frac{1}{3} \right\rangle^3 \right] \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{12} \frac{N_{BD}a^3}{EI_y} \left[3 \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{a} \right)^3 + \left\langle \frac{x_1}{a} - 1 \right\rangle^3 \right] \\
 w_{B2} = w_2(a) &= -\frac{\sqrt{2}}{6} \frac{N_{BD}a^3}{EI_y}, \quad w_{C2} = w_2(3a) = -\frac{2}{3} \sqrt{2} \frac{N_{BD}a^3}{EI_y}
 \end{aligned}$$

Stäbe

$$\begin{aligned}
 \text{Stab } DB: \quad \Delta L_{DB} &= v_B \sin(-\alpha) = -w_B \sin(-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} w_B \\
 \rightarrow w_B &= \sqrt{2} \Delta L_{DB} = \sqrt{2} \frac{N_{BD} \cdot \sqrt{2} a}{EA} = \frac{2 N_{BD} a}{EA}
 \end{aligned}$$

$$\text{Stab } CE: \quad \Delta L_{CE} = w_C = \frac{N_{CE} a}{EA}$$

Verträglichkeitsbedingungen

$$w_B = w_{B1} + w_{B2} \quad :$$

$$\frac{2 N_{BD} a}{EA} = \frac{4}{3} \frac{(F - N_{CE}) a^3}{EI_y} - \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{N_{BD} a^3}{EI_y} \quad (1)$$

$$w_C = w_{C1} + w_{C2} \quad :$$

$$\frac{N_{CE} a}{EA} = 9 \frac{(F - N_{CE}) a^3}{EI_y} - \frac{2}{3} \sqrt{2} \frac{N_{BD} a^3}{EI_y} \quad (2)$$

$$6 \frac{EI_y}{a^3} \cdot (1) \rightarrow \left(12 \frac{I_y}{a^2 A} + \sqrt{2} \right) N_{BD} + 8 N_{CE} = 8 F \quad (1')$$

$$3 \frac{EI_y}{a^3} \cdot (2) \rightarrow 2 \sqrt{2} N_{BD} + \left(3 \frac{I_y}{a^2 A} + 27 \right) N_{CE} = 27 F \quad (2')$$

Mit

$$\frac{I_y}{a^2 A} = \frac{1}{3}$$

folgt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (1') \quad (4 + \sqrt{2}) N_{BD} + 8 N_{CE} &= 8F \\ (2') \quad 2\sqrt{2} N_{BD} + 28 N_{CE} &= 27F \end{aligned}$$

Es hat die Lösung:

$$N_{BD} = 0,06203 F, \quad N_{CE} = 0,9580 F$$

Aufgabe 20

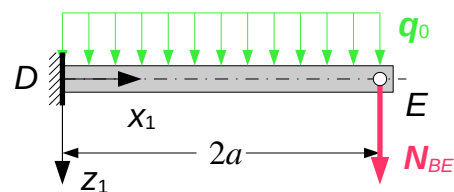
Balken DE

Lastfall 0: q_0

$$w_{E0} = \frac{q_0 (2a)^4}{8EI_y} = 2 \frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

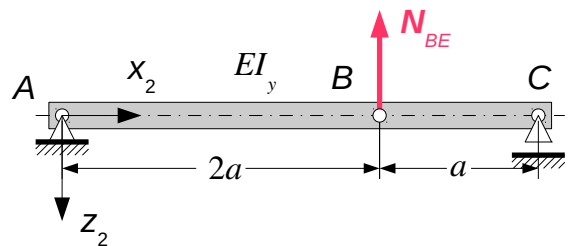
Lastfall 1: N_{BE}

$$w_{E1} = \frac{N_{BE} (2a)^3}{3EI_y} = \frac{8}{3} \frac{N_{BE} a^3}{EI_y}$$



Balken ABC

$$\begin{aligned} w_{B1} &= \frac{-N_{BE} (3a)^3}{3EI_y} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{4}{9} \frac{N_{BE} a^3}{EI_y} \end{aligned}$$

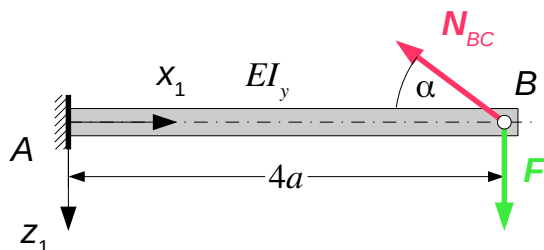


Verträglichkeitsbedingung

$$\begin{aligned} w_{E0} + w_{E1} &= w_{B1} : 2 \frac{q_0 a^4}{EI_y} + \frac{8}{3} \frac{N_{BE} a^3}{EI_y} = -\frac{4}{9} \frac{N_{BE} a^3}{EI_y} \\ \rightarrow (24 + 4) N_{BE} &= -18 q_0 a \rightarrow N_{BE} = -\frac{9}{14} q_0 a \end{aligned}$$

Aufgabe 21

Geometrie: $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$



Balken AB: $w_B = \frac{(4a)^3 (F - N_{BC} \sin(\alpha))}{3 E I_y} = \left(\frac{1}{3} F - \frac{1}{5} N_{BC} \right) \frac{64 a^3}{E I_y}$

Seil BC:

$$\Delta L_{BC} = v_B \sin(-\alpha) = -\frac{3}{5} v_B$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{5 a N_{BC}}{E A} = -\frac{3}{5} v_B \rightarrow v_B = -\frac{25}{3} \frac{N_{BC} a}{E A}$$

Verträglichkeit: $w_B = -v_B$

$$\left(\frac{1}{3} F - \frac{1}{5} N_{BC} \right) \frac{64 a^3}{E I_y} = \frac{25}{3} \frac{N_{BC} a}{E A}$$

$$5 F - 3 N_{BC} = \frac{125}{64} \frac{I_y}{a^2 A} N_{BC} = \frac{125}{64} \frac{8}{125} N_{BC} = \frac{1}{8} N_{BC}$$

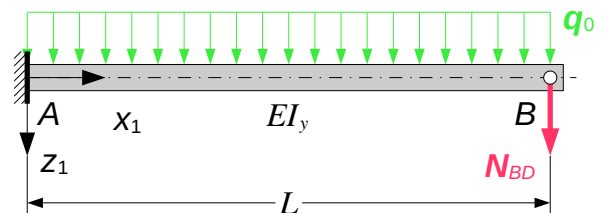
$$40 F = (1 + 24) N_{BC} \rightarrow N_{BC} = \frac{40}{25} F = \frac{8}{5} F$$

Aufgabe 22

Balken AB:

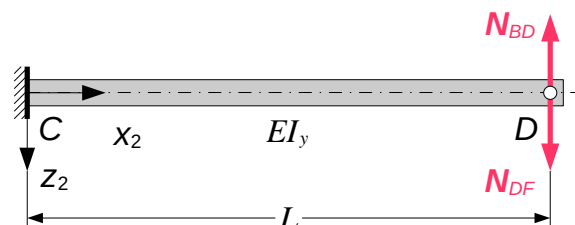
Lastfall 0: q_0 $w_{B0} = \frac{q_0 L^4}{8 E I_y}$

Lastfall 1: N_{BD} $w_{B1} = \frac{N_{BD} L^3}{3 E I_y}$



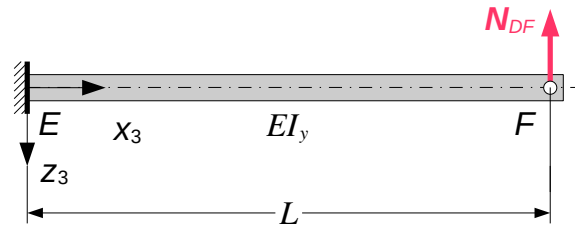
Balken CD:

$$w_D = \frac{(N_{DF} - N_{BD}) L^3}{3 E I_y}$$



Balken EF :

$$w_F = \frac{-N_{DF} L^3}{3 E I_y}$$



Verträglichkeitsbedingungen:

$$w_B = w_D : \quad \frac{q_0 L^4}{8 E I_y} + \frac{N_{BD} L^3}{3 E I_y} = \frac{(N_{DF} - N_{BD}) L^3}{3 E I_y}$$

$$\rightarrow 16 N_{BD} - 8 N_{DF} = -3 q_0 L \quad (1)$$

$$w_D = w_F : \quad \frac{(N_{DF} - N_{BD}) L^3}{3 E I_y} = \frac{-N_{DF} L^3}{3 E I_y}$$

$$\rightarrow -N_{BD} + 2 N_{DF} = 0 \quad (2)$$

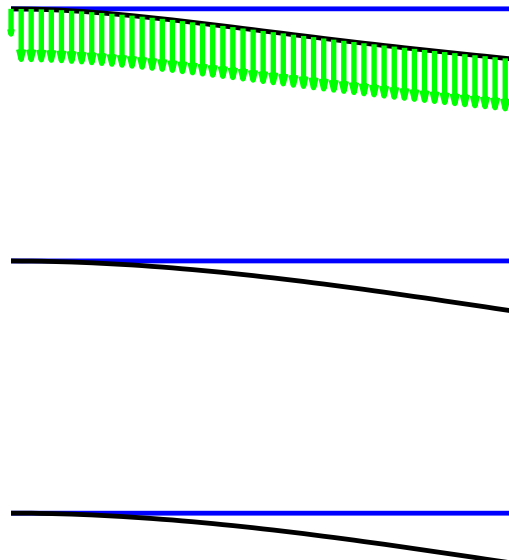
Auflösen nach den Kräften:

$$(2) \rightarrow N_{BD} = 2 N_{DF}$$

$$\text{in (1)} \rightarrow (32 - 8) N_{DF} = -3 q_0 L \quad \rightarrow N_{DF} = -\frac{3}{24} q_0 L = -\frac{1}{8} q_0 L$$

$$\rightarrow N_{BD} = -\frac{1}{4} q_0 L$$

Loadcase 1:



Aufgabe 23

Gleichgewichtsbedingungen für Booster:

$$\sum M^C = 0 : aF - 4aD_x = 0 \rightarrow D_x = \frac{1}{4}F$$

$$\sum F_x = 0 : D_x - C_x = 0 \rightarrow C_x = D_x = \frac{1}{4}F$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 : F - C_y - D_y &= 0 \\ \rightarrow C_y + D_y &= F \end{aligned} \quad (1)$$

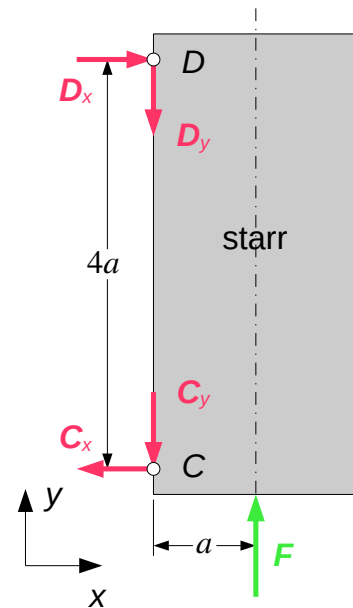
Balken AC: $v_C = \frac{C_y a^3}{3EI_y}$

Balken BD: $v_D = \frac{D_y a^3}{3 \cdot 2EI_y} = \frac{D_y a^3}{6EI_y}$

Verträglichkeitsbedingung: $v_D = v_C$

$$\frac{D_y a^3}{6EI_y} = \frac{C_y a^3}{3EI_y} \rightarrow D_y = 2C_y$$

Einsetzen in (1) ergibt: $3C_y = F \rightarrow C_y = \frac{1}{3}F, D_y = \frac{2}{3}F$



Aufgabe 24

Balken AB

Lastfall 0: q_0

$$w_{B0}^{AB} = \frac{q_0 (2a)^4}{8EI_y} = 2 \frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

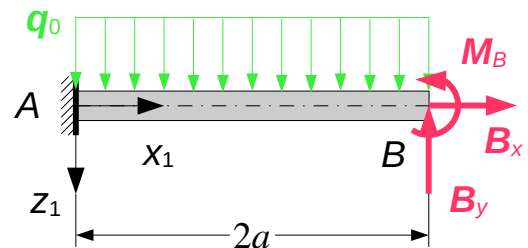
$$\phi_{B0}^{AB} = -\frac{q_0 (2a)^3}{6EI_y} = -\frac{4}{3} \frac{q_0 a^3}{EI_y}$$

Lastfall 1: B_y

$$w_{B1}^{AB} = -\frac{B_y (2a)^3}{3EI_y} = -\frac{8}{3} \frac{B_y a^3}{EI_y}, \quad \phi_{B1}^{AB} = \frac{B_y (2a)^2}{2EI_y} = 2 \frac{B_y a^2}{EI_y}$$

Lastfall 2: M_B

$$w_{B2}^{AB} = \frac{M_B (2a)^2}{2EI_y} (1-2) = -2 \frac{M_B a^2}{EI_y}, \quad \phi_{B2}^{AB} = 2 \frac{M_B a}{EI_y}$$



Balken CDLastfall 1: B_x

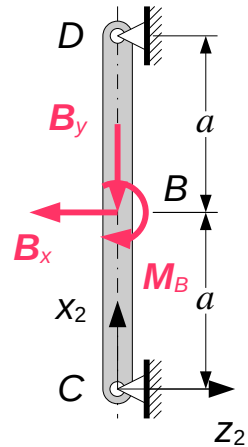
$$w_{B1}^{CD} = -\frac{B_x (2a)^3}{3EI_y} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^2} = -\frac{1}{6} \frac{B_x a^3}{EI_y}$$

$$\phi_{B1}^{CD} = \frac{B_x (2a)^2}{6EI_y} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2^2} \right) \right] = 0$$

Lastfall 2: M_B

$$w_{B2}^{CD} = \frac{M_B (2a)^2}{3EI_y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2^2} - \frac{3}{2} + 1 \right) = 0$$

$$\phi_{B2}^{CD} = -\frac{M_B (2a)}{6EI_y} \left(\frac{3}{2^2} + 2 - \frac{6}{2} + \frac{3}{2^2} \right) = -\frac{1}{6} \frac{M_B a}{EI_y}$$

VerträglichkeitsbedingungenBalken CD ist dehnstarr: $w_B^{AB} = w_{B0}^{AB} + w_{B1}^{AB} + w_{B2}^{AB} = 0$

$$2 \frac{q_0 a^4}{EI_y} - \frac{8}{3} \frac{B_y a^3}{EI_y} - 2 \frac{M_B a^2}{EI_y} = 0 \quad \rightarrow \quad 8 B_y a + 6 M_B = 6 q_0 a^2 \quad (1)$$

Balken AB ist dehnstarr: $w_B^{CD} = w_{B1}^{CD} + w_{B2}^{CD} = 0$

$$-\frac{1}{6} \frac{B_x a^3}{EI_y} = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = 0$$

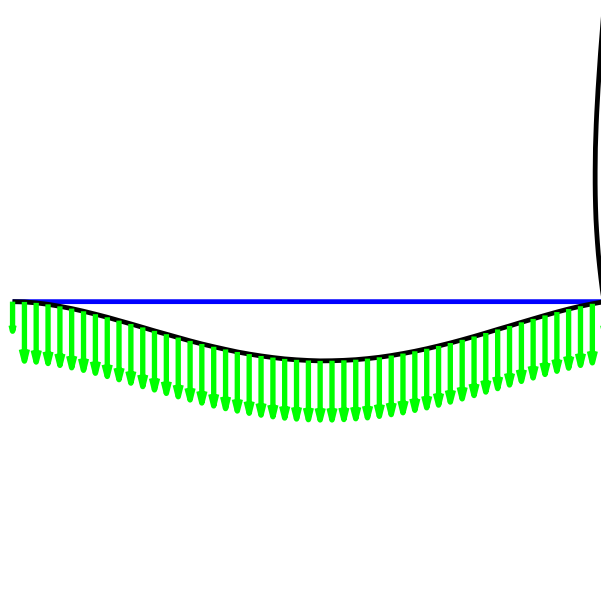
Balken sind starr verbunden: $\phi_B^{AB} = \phi_B^{CD}$

$$-\frac{4}{3} \frac{q_0 a^3}{EI_y} + 2 \frac{B_y a^2}{EI_y} + 2 \frac{M_B a}{EI_y} = -\frac{1}{6} \frac{M_B a}{EI_y} \quad \rightarrow \quad 12 B_y a + 13 M_B = 8 q_0 a^2 \quad (2)$$

Auflösen der Gleichungen (1) und (2):

$$B_y = \frac{15}{16} q_0 a, \quad M_B = -\frac{1}{4} q_0 a^2$$

Loadcase 1:

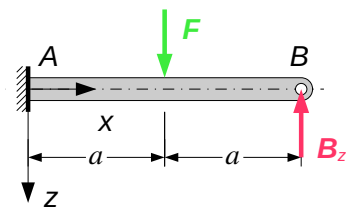


Aufgabe 25

Balken AB

Lastfall 0: F

$$w_{B0}^{AB} = \frac{F(2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{Fa^3}{6EI_y} (6-1) = \frac{5}{6} \frac{Fa^3}{EI_y}$$

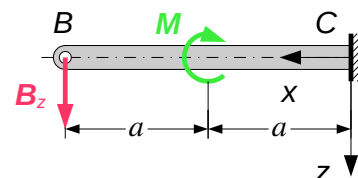
Lastfall 1: B_z

$$w_{B1}^{AB} = \frac{-B_z(2a)^3}{3EI_y} = -\frac{8}{3} \frac{B_z a^3}{EI_y}$$

Balken BC

Lastfall 0: M

$$w_{B0}^{BC} = \frac{M(2a)^2}{2EI_y} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{Ma^2}{2EI_y} (1-4) = -\frac{3}{2} \frac{Ma^2}{EI_y}$$



Lastfall 1: B_z

$$w_{B1}^{BC} = \frac{B_z (2a)^3}{3EI_y} = \frac{8}{3} \frac{B_z a^3}{EI_y}$$

Verträglichkeitsbedingung

$$w_B^{AB} = w_B^{BC} : \frac{5}{6} \frac{F a^3}{EI_y} - \frac{8}{3} \frac{B_z a^3}{EI_y} = -\frac{3}{2} \frac{M a^2}{EI_y} + \frac{8}{3} \frac{B_z a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow 5Fa - 16B_z a = -9M + 16B_z a$$

$$\rightarrow (5 + 3 \cdot 9)F = 32B_z \quad \rightarrow B_z = F$$

Verschiebung von Punkt B

$$w_B = w_B^{AB} = \left(\frac{5}{6} - \frac{16}{6} \right) \frac{F a^3}{EI_y} = -\frac{11}{6} \frac{F a^3}{EI_y}$$

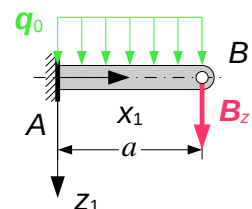
Probe:

$$w_B^{BC} = \left(-\frac{9}{2} + \frac{8}{3} \right) \frac{F a^3}{EI_y} = -\frac{11}{6} \frac{F a^3}{EI_y}$$

Aufgabe 26

Balken ABLastfall 0: q_0

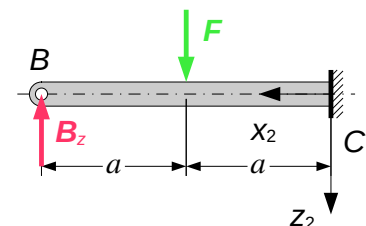
$$w_{B0}^{AB} = \frac{q_0 a^4}{8EI_y} = \frac{1}{8} \frac{F a^3}{EI_y}$$

Lastfall 1: B_z

$$w_{B1}^{AB} = \frac{1}{3} \frac{B_z a^3}{EI_y}$$

Balken BCLastfall 0: F

$$w_{B0}^{BC} = \frac{F (2a)^3}{6EI_y} \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{1}{6} \frac{F a^3}{EI_y} (6 - 1) = \frac{5}{6} \frac{F a^3}{EI_y}$$



Lastfall 1: B_z

$$w_{B1}^{BC} = -\frac{B_z (2a)^2}{3EI_y} = -\frac{8}{3} \frac{B_z a^3}{EI_y}$$

Verträglichkeitsbedingung: $w_B^{AB} = w_B^{BC}$

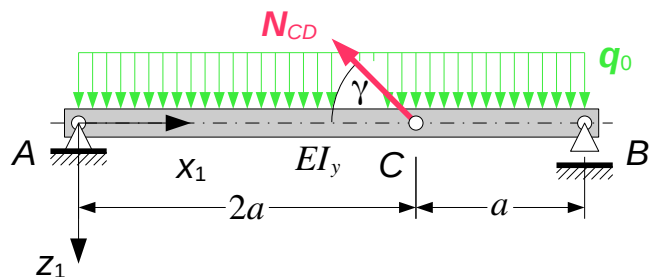
$$\frac{1}{8} \frac{F a^3}{EI_y} + \frac{1}{3} \frac{B_z a^3}{EI_y} = \frac{5}{6} \frac{F a^3}{EI_y} - \frac{8}{3} \frac{B_z a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow 3F + 8B_z = 20F - 64B_z$$

$$\rightarrow 72B_z = 17F \rightarrow B_z = \frac{17}{72} F$$

Aufgabe 27a) Geometrie

$$L_{CD} = \sqrt{8}a = 2\sqrt{2}a, \quad \sin(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) SeilkraftBalken ABLastfall 0: q_0

$$w_0(x_1) = \frac{q_0 (3a)^4}{24EI_y} \left[\left(\frac{x}{3a} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{3a} \right)^3 + \frac{x}{3a} \right] = \frac{q_0 a^4}{24EI_y} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 6 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 27 \frac{x}{a} \right]$$

$$w_{C0} = w_0(2a) = \frac{q_0 a^4}{24EI_y} (16 - 48 + 54) = \frac{11}{12} \frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

Lastfall 1: N_{CD}

$$w_{C1} = \frac{-N_{CD} \sin(\gamma) (3a)^3}{3EI_y} \left(1 - \frac{2}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = -\frac{\sqrt{2} N_{CD} a^3}{18EI_y} \cdot 4 = -\frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{N_{CD} a^3}{EI_y}$$

Seil

Längenänderung:

$$u_C = 0 \rightarrow \Delta L_{CD} = u_C \cos(-\gamma) + v_C \sin(-\gamma) = -\frac{1}{\sqrt{2}} v_C$$

Seilgleichung:

$$\Delta L_{CD} = \frac{N_{CD} L_{CD}}{E A} = \frac{2\sqrt{2} N_{CD} a}{E A} = -\frac{\sqrt{2}}{2} v_C \rightarrow v_C = -4 \frac{N_{CD} a}{E A}$$

Verträglichkeit

$$w_C = -v_C : \frac{11}{12} \frac{q_0 a^4}{E I_y} - \frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{N_{CD} a^3}{E I_y} = 4 \frac{N_{CD} a}{E A} \quad | \cdot 36 \frac{E I_y}{a^3}$$

$$\rightarrow 33 q_0 a = \left(144 \frac{I_y}{a^2 A} + 8\sqrt{2} \right) N_{CD}$$

$$I_y = \frac{\sqrt{2} a^2 A}{144} \rightarrow 33 q_0 a = 9\sqrt{2} N_{CD} \rightarrow N_{CD} = \frac{33 q_0 a}{9\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{6} q_0 a$$

Aufgabe 28a) Geometrie

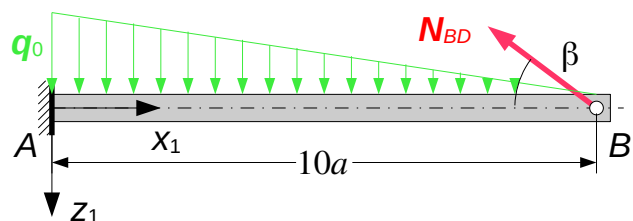
$$L_{BD} = \sqrt{(10-6)^2 + 3^2} a = 5a, \quad \sin(\beta) = \frac{3}{5}$$

b) SeilkraftBalken AB:Lastfall 0: q_0

$$w_{B0} = \frac{q_0 (10a)^4}{30 E I_y} = \frac{1000}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

Lastfall 1: N_{BD}

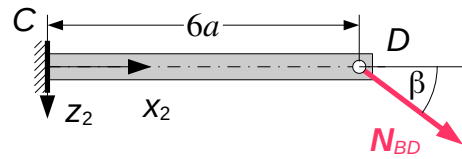
$$w_{B1} = \frac{-N_{BD} \sin(\beta) (10a)^3}{3 E I_y} = -\frac{3}{5} \frac{1000}{3} \frac{N_{BD} a^3}{E I_y} = -200 \frac{N_{BD} a^3}{E I_y}$$



Balken CD:

$$w_{D1} = \frac{N_{BD} \sin(\beta) (6a)^3}{3 E I_y}$$

$$= \frac{3 \cdot 72}{5} \frac{N_{BD} a^3}{E I_y} = \frac{216}{5} \frac{N_{BD} a^3}{E I_y}$$

Seil:

$$\Delta L_{BD} = \frac{N_{BD} L_{BD}}{E A} = \frac{5 N_{BD} a}{E A}$$

Verträglichkeit:

$$\Delta L_{BD} = (v_B - v_D) \sin(-\beta) = -\frac{3}{5} (v_B - v_D) = \frac{3}{5} (w_B - w_D)$$

Einsetzen ergibt:

$$\frac{5 N_{BD} a}{E A} = \frac{3}{5} \left(\frac{1000}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y} - 200 \frac{N_{BD} a^3}{E I_y} - \frac{216}{5} \frac{N_{BD} a^3}{E I_y} \right)$$

$$125 \frac{I_y}{a^2 A} N_{BD} = (5000 q_0 a - (3000 + 3 \cdot 216) N_{BD})$$

$$\left(125 \frac{I_y}{a^2 A} + 3648 \right) N_{BD} = 5000 q_0 a$$

Mit $I_y = \frac{352}{125} a^2 A$ folgt: $N_{BD} = \frac{5}{4} q_0 a = 1,25 q_0 a$