

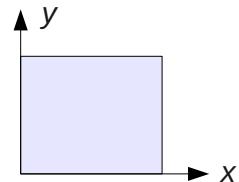
2.3 Ebener Spannungszustand

Aufgaben

Aufgabe 1

Stellen Sie die folgenden Spannungen auf den Kanten des abgebildeten Rechtecks graphisch dar:

- a) $\sigma_x = 150 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 100 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$
- b) $\sigma_x = 150 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -100 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$
- c) $\sigma_x = 150 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 100 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$
- d) $\sigma_x = -150 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 100 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$



Aufgabe 2

Der Spannungszustand in einem Punkt wird durch die Spannungen

$$\sigma_x = 50 \text{ MPa}, \sigma_y = 100 \text{ MPa} \text{ und } \tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$$

beschrieben. Geben Sie die Komponenten des Spannungsvektors auf Schnitten an, deren Normalenvektoren mit der x-Achse die Winkel $\phi_1 = 45^\circ$, $\phi_2 = 60^\circ$ und $\phi_3 = 120^\circ$ einschließen. Stellen Sie die Schnitte und die Spannungsvektoren jeweils graphisch dar.

(Ergebnis: $t_{1x} = 70,71 \text{ MPa}$, $t_{1y} = 106,1 \text{ MPa}$; $t_{2x} = 68,30 \text{ MPa}$, $t_{2y} = 111,6 \text{ MPa}$; $t_{3x} = 18,30 \text{ MPa}$, $t_{3y} = 61,60 \text{ MPa}$)

Aufgabe 3

Der Spannungszustand in einem Punkt wird durch die Spannungen

$$\sigma_x = 150 \text{ MPa}, \sigma_y = 200 \text{ MPa} \text{ und } \tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$$

beschrieben. Ermitteln Sie die Normalspannung und die Schubspannung in Schnittebenen, deren Normalenvektoren mit der x-Achse die Winkel $\phi_1 = 45^\circ$, $\phi_2 = 60^\circ$ und $\phi_3 = 120^\circ$ einschließen.

(Ergebnis: $\sigma_{1n} = 125 \text{ MPa}$, $\tau_{1m} = 25 \text{ MPa}$; $\sigma_{2n} = 144,2 \text{ MPa}$, $\tau_{2m} = 46,65 \text{ MPa}$; $\sigma_{3n} = 230,8 \text{ MPa}$, $\tau_{3m} = 3,35 \text{ MPa}$)

Aufgabe 4

Die Komponenten des Spannungstensors im xy-Koordinatensystem sind

$$\sigma_x = 150 \text{ MPa}, \sigma_y = 250 \text{ MPa} \text{ und } \tau_{xy} = 86,6 \text{ MPa.}$$

Berechnen Sie die Komponenten des Spannungstensors in Koordinatensystemen, die um die Winkel $\phi_1 = 30^\circ$ bzw. $\phi_2 = 60^\circ$ gegenüber dem xy -System gedreht sind. Überprüfen Sie die Ergebnisse anhand der Spannungsinvarianten.

(Ergebnis: $\phi_1 = 30^\circ$: $\sigma_\xi = 250 \text{ MPa}$, $\sigma_\eta = 150 \text{ MPa}$, $\tau_{\xi\eta} = 86,6 \text{ MPa}$;
 $\phi_2 = 60^\circ$: $\sigma_\xi = 300 \text{ MPa}$, $\sigma_\eta = 100 \text{ MPa}$, $\tau_{\xi\eta} = 0 \text{ MPa}$)

Aufgabe 5

Zeigen Sie durch elementare Rechnung, dass die Determinante der Spannungsmatrix eine Invariante ist, d. h. dass gilt:

$$\sigma_\xi \sigma_\eta - \tau_{\xi\eta}^2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie für die folgenden ebenen Spannungszustände die Hauptspannungen und die Hauptrichtungen. Stellen Sie die Ergebnisse im Mohrschen Spannungskreis dar.

- a) $\sigma_x = 200 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 100 \text{ MPa}$
- b) $\sigma_x = 200 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 600 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -400 \text{ MPa}$

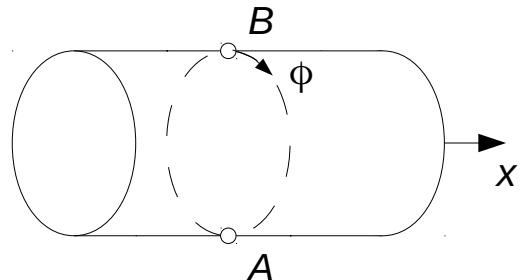
(Ergebnis: a) $\sigma_1 = 361,8 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 138,2 \text{ MPa}$, $\phi_1 = 58,28^\circ$; b) $\sigma_1 = 847,2 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -47,21 \text{ MPa}$, $\phi_1 = -58,28^\circ$)

Aufgabe 7

Das abgebildete dünnwandige Rohr wird durch ein Biegemoment, ein Torsionsmoment und durch Innendruck belastet. In den Punkten A und B werden die folgenden Spannungen gemessen:

	Punkt A	Punkt B
σ_x	25 MPa	-25 MPa
σ_ϕ	50 MPa	50 MPa
$\tau_{x\phi}$	50 MPa	50 MPa

Da das Bauteil dünnwandig ist, liegt in den Punkten A und B in guter Näherung ein ebener Spannungszustand vor.



Bestimmen Sie für beide Punkte die Hauptspannungen, die Hauptrichtungen

und die maximale Schubspannung.

(Ergebnis: Punkt A: $\sigma_1 = 89,04 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -14,04 \text{ MPa}$, $\phi_1 = 52,02^\circ$, $\tau_{max} = 51,54 \text{ MPa}$; Punkt B: $\sigma_1 = 75 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -50 \text{ MPa}$, $\phi_1 = 63,43^\circ$, $\tau_{max} = 62,5 \text{ MPa}$)

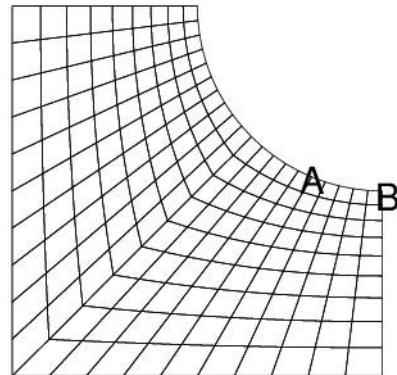
Aufgabe 8

- Gibt es bei jedem ebenen Spannungszustand eine Schnittrichtung, für die die Schubspannung verschwindet?
- Wie muss der Mohrsche Spannungskreis liegen, damit es eine Schnittrichtung gibt, für die eine der beiden Normalspannungen verschwindet?
- Wie muss der Mohrsche Spannungskreis liegen, damit es eine Schnittrichtung gibt, für die beide Normalspannungen verschwinden?

Aufgabe 9

Die Spannungen in den Punkten A und B einer dünnwandigen Struktur haben die in der Tabelle angegebenen Werte.

- Bestimmen Sie für einen martensitisch gehärteten Stahl mit einer Zugfestigkeit von 650 MPa die Sicherheit S_B gegen Bruch.
- Bestimmen Sie für einen Vergütungsstahl mit einer Streckgrenze von 490 MPa die Sicherheit S_F gegen Fließen nach der Schubspannungshypothese und der Gestaltänderungshypothese.



Werte:

Punkt	σ_x	σ_y	τ_{xy}
A	263	51	-100
B	390	15	-14
	MPa	MPa	MPa

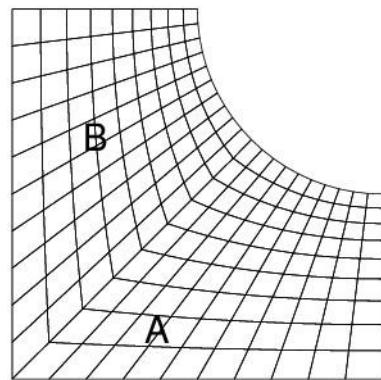
(Ergebnis: Punkt A: $S_B = 2,14$, $S_{F,SH} = 1,61$, $S_{F,GH} = 1,64$; Punkt B: $S_B = 1,66$, $S_{F,SH} = 1,25$, $S_{F,GH} = 1,27$)

Aufgabe 10

Die Spannungen in den Punkten A und B einer dünnwandigen Struktur haben die in der Tabelle angegebenen Werte.

Bestimmen Sie für einen Vergütungsstahl mit einer Streckgrenze von 490 MPa die Sicherheit S_F gegen Fließen nach der Schubspannungshypothese und der Gestaltänderungshypothese.

Werte:



Punkt	σ_x	σ_y	τ_{xy}
A	208	-26	-3
B	101	-15	-15
	MPa	MPa	MPa

(Ergebnis: Punkt A: $S_{F,SH} = 2,09$, $S_{F,GH} = 2,20$; Punkt B: $S_{F,SH} = 4,09$, $S_{F,GH} = 4,36$)

Aufgabe 11

Gegeben sind die Spannungen $\sigma_x = 250$ MPa, $\sigma_y = 50$ MPa und $\tau_{xy} = 75$ MPa.

- Berechnen Sie die mittlere Normalspannung σ_M , die maximale Schubspannung τ_{max} , die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sowie die Richtung ϕ_1 der ersten Hauptachse.
- Überprüfen Sie die Ergebnisse mit dem Mohrschen Spannungskreis ($1 \text{ cm} \triangleq 25 \text{ MPa}$).

(HM, Prüfung WS 2020)

(Ergebnis: a) $\sigma_M = 150$ MPa, $\tau_{max} = 125$ MPa, $\sigma_1 = 275$ MPa, $\sigma_2 = 25$ MPa, $\phi_1 = 18,43^\circ$)

Aufgabe 12

In einem Punkt eines dünnen Bleches aus Stahl (Zugfestigkeit $R_m = 510$ MPa, Streckgrenze $R_e = 355$ MPa) sind die Komponenten des ebenen Spannungszustandes gegeben durch $\sigma_x = 400$ MPa, $\sigma_y = -200$ MPa und $\tau_{xy} = 100$ MPa.

- Berechnen Sie die Spannung σ_ϕ in einer Schnittfläche, deren Normalenvektor gegenüber der x-Achse den Winkel $\phi = 30^\circ$ hat.
- Für welchen Winkel ϕ_{max} nimmt die Spannung σ_ϕ ein Maximum an, und

welchen Wert σ_{max} hat das Maximum?

- c) Welchen Wert hat die maximale Schubspannung τ_{max} ?
- d) Ermitteln Sie die Sicherheiten S_B gegen Bruch und S_F gegen Fließen und entscheiden Sie, ob und gegebenenfalls welches Versagen auftritt.

(HM, Prüfung SS 2022)

(Ergebnis: a) $\sigma_\phi = 336,6 \text{ MPa}$; b) $\phi_{max} = 9,217^\circ$, $\sigma_{max} = 416,2 \text{ MPa}$; c) $\tau_{max} = 316,2 \text{ MPa}$; d) $S_B = 1,22$, $S_F = 0,63$ (0,56))