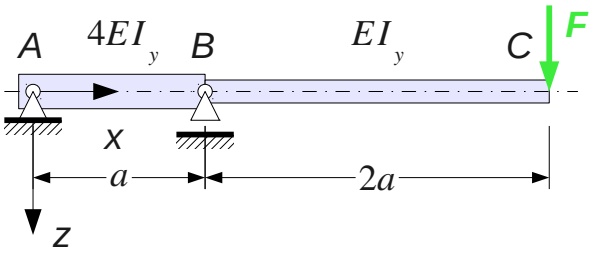
4.2 Balkensysteme

Aufgaben

Aufgabe 1

Der abgebildete Balken ist in den Punkten *A* und *B* gelenkig gelagert. Im Punkt *C* greift die Kraft F an. Im Bereich *AB* beträgt die Biegesteifigkeit $4EI_y$ und im Bereich *BC* EI_y.

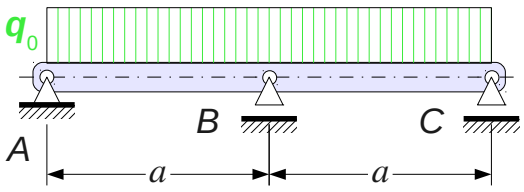


Gesucht ist die vertikale Verschiebung w_C am Lastangriffspunkt *C*.

(Ergebnis: $w_C = 3Fa^3/(EI_y)\ \downarrow$)

Aufgabe 2

Der abgebildete Balken mit der Biegesteifigkeit EI_y wird im Punkt *A* durch ein Festlager und in den Punkten *B* und *C* durch Loslager gehalten.

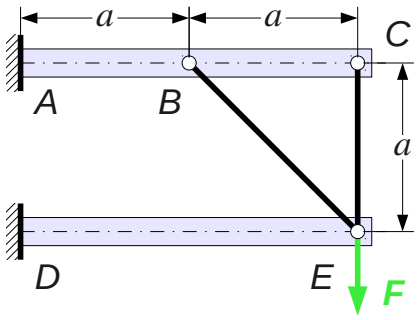


Bestimmen Sie die Lagerkräfte, den Verlauf der Schnittlasten sowie die Biegelinie.

(Ergebnis: $A_z = C_z = 3q_0 a/8\ \uparrow$, $B_z = 5q_0 a/4\ \uparrow$; $|M_y|_{max} = q_0 a^2/8$ in Punkt *B*)

Aufgabe 3

Das abgebildete Tragwerk besteht aus den Balken *AC* und *DE*, die in den Punkten *A* bzw. *D* fest eingespannt sind. Sie sind durch die gelenkig angeschlossenen Streben *BE* und *CE* miteinander verbunden. Im Punkt *E* greift die Kraft F an.



Die Balken *AC* und *DE* haben die Biegesteifigkeit EI_y und sind dehnstarr ($EA = \infty$). Die Streben *BE* und *CE* haben die Dehnsteifigkeit EA.

Zahlenwert: $I_y/A = a^2/12$

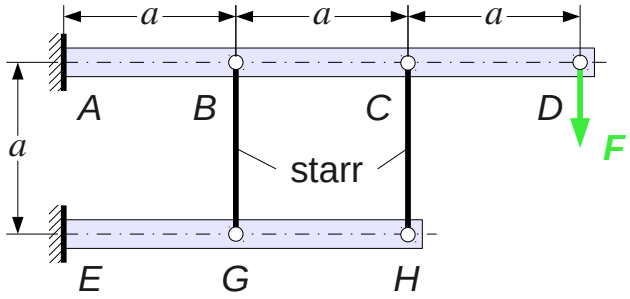
a) Bestimmen Sie die Normalkräfte N_{BE} und N_{CE} in den Streben *BE* und *CE*.

b) Bestimmen Sie die Vertikalverschiebung w_E des Lastangriffspunkts *E*.

(Ergebnis: a) $N_{BE} = 1{,}370F$, $N_{CE} = -0{,}1336F$; b) $w_E = 0{,}4396\, Fa^3/(EI_y)\downarrow$)

Aufgabe 4

Das abgebildete Tragwerk besteht aus den Balken *AD* und *EH*, die durch die gelenkig angeschlossenen starren Streben *BG* und *CH* miteinander verbunden sind. Die Balken sind in den Punkten *A* bzw. *E* fest eingespannt und haben die Biegesteifigkeit EI_y. Am Balken *AD* greift im Punkt *D* die Kraft F an.



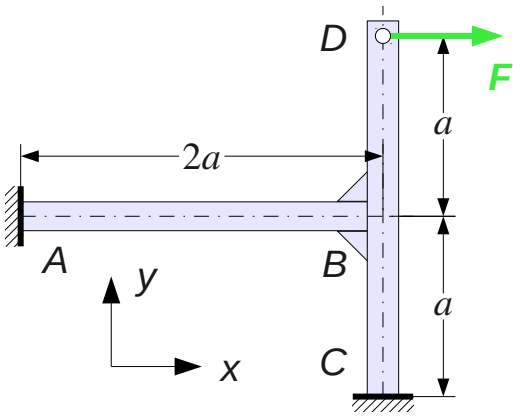
a) Ermitteln Sie die Normalkräfte N_{BG} und N_{CH} in den Streben.

b) Bestimmen Sie die Vertikalverschiebung w_D des Lastangriffspunkts *D*.

(Ergebnis: a) $N_{BG} = 6F/7$, $N_{CH} = -8F/7$; b) $w_D = 101Fa^3/(21EI_y)\downarrow$)

Aufgabe 5

Das abgebildete Tragwerk besteht aus den dehnstarren Balken *AB* und *CD*, die im Punkt *B* starr miteinander verbunden sind. Die Balken sind in den Punkten *A* bzw. *C* fest eingespannt und haben die Biegesteifigkeit EI_y. Am Balken *CD* greift im Punkt *D* die Kraft F an.



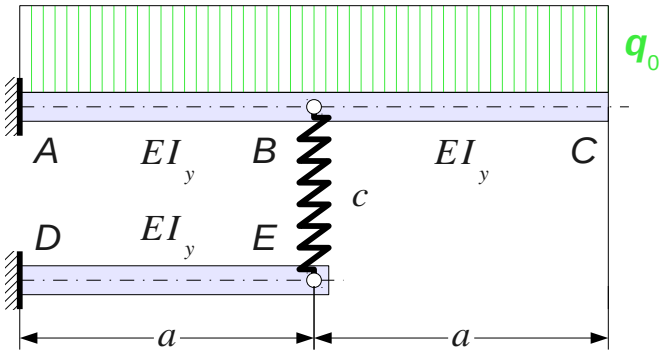
a) Ermitteln Sie die Schnittlasten im Punkt *B*.

b) Bestimmen Sie die Horizonralverschiebung u_D des Lastangriffspunkts *D*.

(Ergebnis: a) Lasten am Balken *AB*: $B_x = 2F\rightarrow$, $B_y = F/4\uparrow$, $M_B = Fa/3\circlearrowright$; b) $u_D = Fa^3/(2EI_y)\rightarrow$)

Aufgabe 6

Das abgebildete Tragwerk besteht aus den Balken *AC* und *DE*, die in den Punkten *A* bzw. *D* fest eingespannt sind und durch die an den Punkten *B* und *E* gelenkig angeschlossene lineare Feder *BE* miteinander verbunden sind. Beide Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y. Die Feder hat die Federsteifigkeit $c = EI_y/a^3$.



Der Balken *AC* wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet.

a) Ermitteln Sie die Kraft N_{BE} in der Feder *BE*.

b) Ermitteln Sie die Vertikalverschiebung w_C von Punkt *C*.

(Ergebnis: $N_{BE} = -0{,}425 q_0 a$; $w_C = 1{,}646 q_0 a^4/(EI_y)\downarrow$)

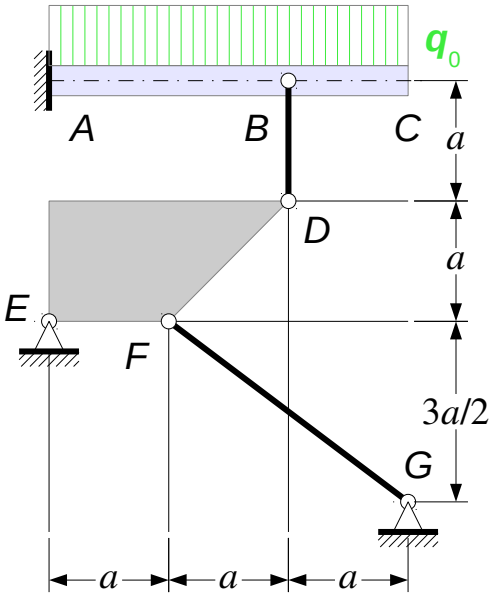
Aufgabe 7

Der Balken *AC* (Biegesteifigkeit EI_y) ist im Punkt *A* fest eingespannt. Im Punkt *B* ist der starre Stab *BD* gelenkig angeschlossen.

Der starre Körper *EDF* wird im Punkt *E* durch ein Festlager gehalten. In den Punkten *D* und *F* sind die Stäbe *BD* und *FG* gelenkig angeschlossen. Der Stab *FG* hat die Dehnsteifigkeit EA und wird im Punkt *G* durch ein Festlager gehalten.

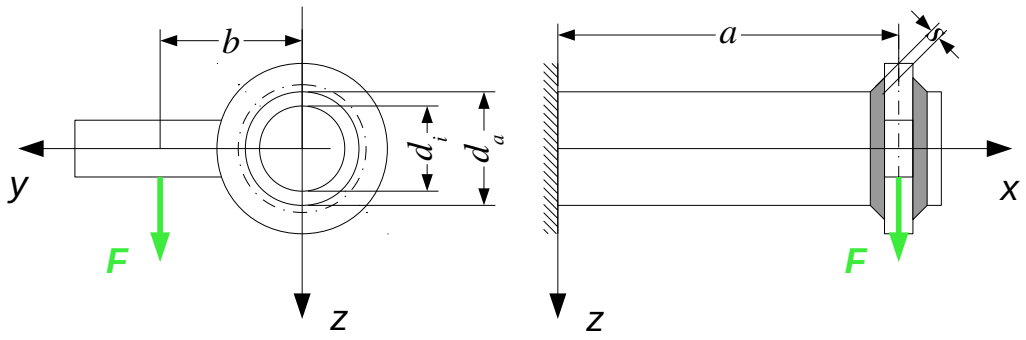
Der Balken *AC* wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet.

Gesucht sind die Kräfte in den Stäben *BD* und *FG*.



(Ergebnis: $N_{BD} = -\dfrac{51\, q_0 a}{24 + 250\, I_y/(A a^2)}$, $N_{FG} = -\dfrac{170\, q_0 a}{24 + 250\, I_y/(A a^2)}$)

Aufgabe 8



Der abgebildete Hebel besteht aus einem Rohr, an das ein Querarm angeschweißt ist. Am Querarm greift die Kraft F an. Rohr und Querarm bestehen aus einem duktilen Werkstoff mit der zulässigen Spannung σ_{zul}.

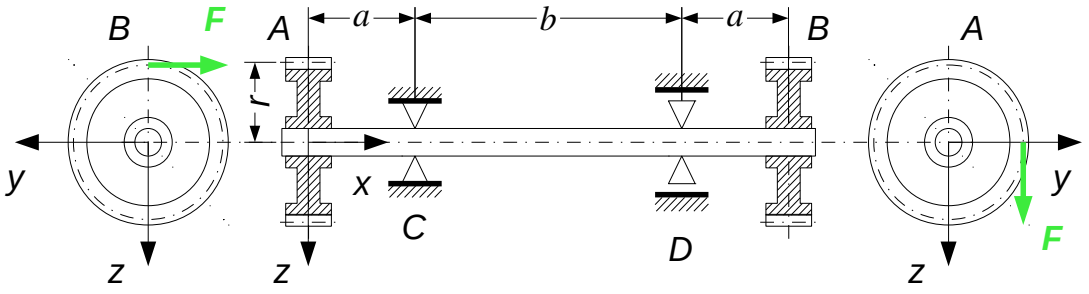
a) Wie groß darf nach der Gestaltänderungshypothese der Innendurchmesser d_i höchstens werden?

b) Wie groß ist die Schubspannung τ_S in der Schweißnaht, wenn davon ausgegangen wird, dass die Schubspannung hauptsächlich durch das zu übertragende Torsionsmoment erzeugt wird?

Zahlenwerte: $a = 30$ cm, $b = 10$ cm , $s = 5$ mm, $d_a = 2$ cm, $F = 250$ N, $\sigma_{zul} = 180$ MPa

(Ergebnis: $d_i = 1{,}63$ cm, $\tau_S = 4{,}0$ MPa)

Aufgabe 9



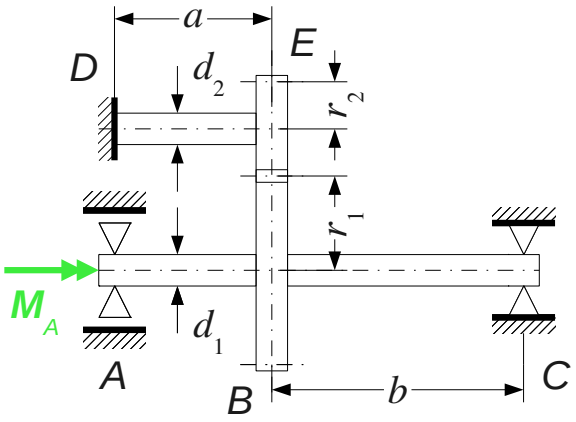
Auf einer Vollwelle mit Kreisquerschnitt sitzen zwei Zahnräder mit Radius r, an denen wie abgebildet jeweils die Kraft F angreift. Ermitteln Sie den nach der Gestaltänderungshypothese nötigen Wellendurchmesser d.

Zahlenwerte: $a = 100$ mm, $b = 300$ mm, $r = 100$ mm, $F = 450$ N, $\sigma_{zul} = 150$ MPa

(Ergebnis: $d \geq 16$ mm)

Aufgabe 10

Das abgebildete Getriebe besteht aus zwei Zahnrädern. Zahnrad *B* sitzt auf der Welle *AC*, die in den Punkten *A* und *C* gelenkig gelagert ist. Sie wird im Punkt *A* durch das Moment M_A angetrieben.



Zahnrad *E* sitzt auf der Welle *DE*, die im Punkt *D* fest eingespannt ist.

Die Zahnräder sind gerade verzahnt.

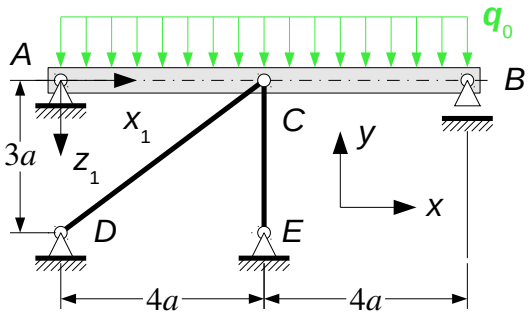
Beide Wellen sind Vollwellen mit einem Kreisquerschnitt. Ermitteln Sie die nach der Gestaltänderungshypothese benötigten Durchmesser d_1 und d_2.

Zahlenwerte: $a = 300$ mm, $b = 400$ mm, $r_1 = 50$ mm, $r_2 = 25$ mm, $M_A = 10$ Nm, $\sigma_{zul} = 150$ MPa

(Ergebnis: $d_1 = 13{,}4$ mm, $d_2 = 16$ mm)

Aufgabe 11

Der Balken *AB* wird im Punkt *A* durch ein Festlager und im Punkt *B* durch ein Loslager gehalten. Im Punkt *C* sind die Stäbe *CD* und *CE* gelenkig angeschlossen, die in den Punkten *D* bzw. *E* durch Festlager gehalten werden.



Der Balken *AB* hat die Biegesteifigkeit EI_y und ist dehnstarr, d.h. seine Längenänderung darf vernachlässigt werden. Die Stäbe *CD* und *CE* haben die Dehnsteifigkeit EA.

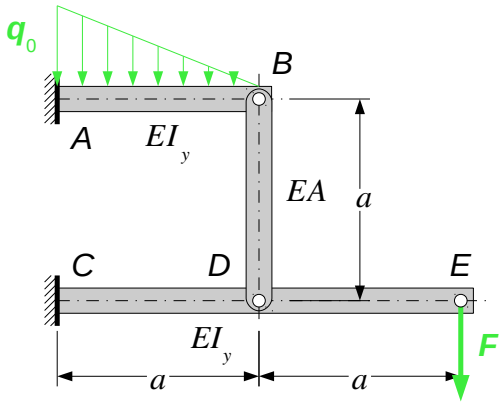
Ermitteln Sie die Kräfte in den Stäben *CD* und *CE*, wenn der Balken *AB* durch die konstante Streckenlast q_0 belastet wird.

Zahlenwerte: $A = 1125 I_y/(256a^2)$

(HM, Prüfung SS 2014)

(Ergebnis: $N_{CD} = -45q_0a/32$, $N_{CE} = -125q_0a/32$)

Aufgabe 12



Das abgebildete Tragwerk besteht aus den Balken *AB* und *CE* (Biegesteifigkeit EI_y), die in den Punkten *A* bzw. *C* fest eingespannt sind. In den Punkten *B* und *D* ist der Stab *BD* (Dehnsteifigkeit EA) gelenkig angeschlossen.

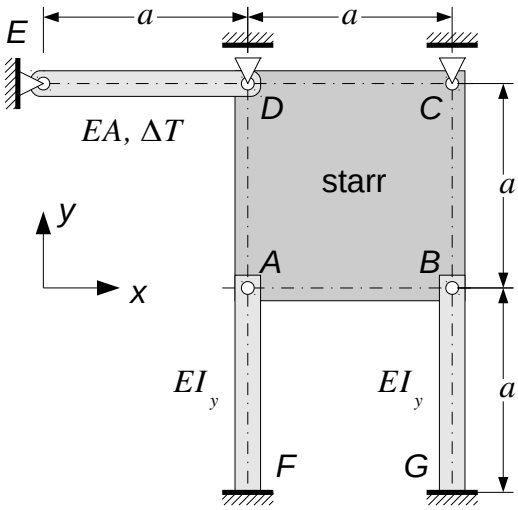
Der Balken *AB* wird durch eine Streckenlast belastet, die vom Wert q_0 im Punkt *A* linear auf den Wert null im Punkt *B* abfällt. Am Balken *CE* greift im Punkt *E* die Kraft F an.

Ermitteln Sie die Kraft im Stab *BD*.

(HM, Prüfung WS 2014)

(Ergebnis: $N_{BD} = \dfrac{25F - q_0 a}{20 + 30 I_y/(a^2 A)}$)

Aufgabe 13



Der starre Körper *ABCD* wird in den Punkten *C* und *D* durch Loslager gehalten. Im Punkt *D* ist der Stab *DE* (Dehnsteifigkeit EA, Wärmeausdehnungskoeffizient α_T) gelenkig angeschlossen, der im Punkt *E* durch ein Festlager gehalten wird. In den Punkten *A* und *B* sind die Balken *AF* bzw. *BG* (Biegesteifigkeit EI_y) gelenkig angeschlossen. Die Balken sind in den Punkten *F* bzw. *G* fest eingespannt.

Der Stab *DE* wird um ΔT erwärmt.

a) Schneiden Sie den starren Körper frei und zeichnen Sie alle Kräfte ein.

b) Bestimmen Sie die Horizontalverschiebung u des starren Körpers.

c) Bestimmen Sie die am starren Körper in den Gelenken *A* bis *D* angreifenden Kräfte.

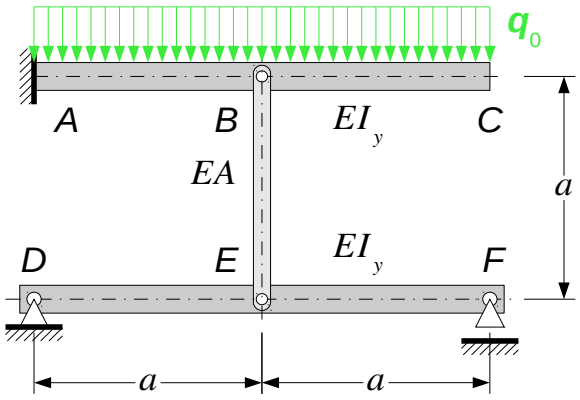
Zahlenwert: $I_y/(a^2 A) = 1/6$

(HM, Prüfung SS 2015)

(Ergebnis: b) $u = a\alpha_T \Delta T/2$; c) $A_x = B_x = 3EI_y\alpha_T\Delta T/(2a^2)\leftarrow$, $A_y = B_y = 0$; $C_x = 0$, $C_y = 3EI_y\alpha_T\Delta T/a^2\uparrow$, $D_x = EA\alpha_T\Delta T/2\rightarrow$, $D_y = 3EI_y\alpha_T\Delta T/a^2\downarrow$)

Aufgabe 14

Der Kragbalken *ABC* und der beidseitig gelenkig gelagerte Balken *DEF* (Biegesteifigkeit EI_y) sind durch den gelenkig angeschlossenen Stab *BE* (Dehnsteifigkeit EA) miteinander verbunden. Der Kragbalken wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet.



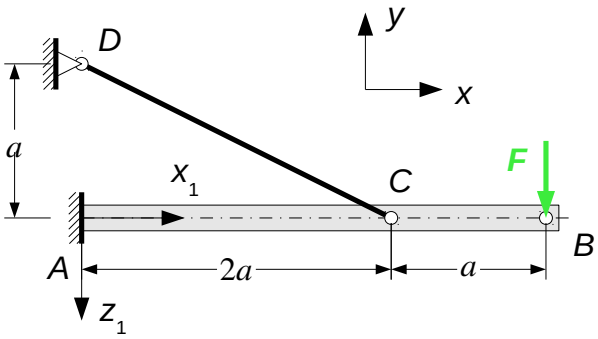
Ermitteln Sie die Normalkraft im Stab *BE*.

(HM, Prüfung SS 2015)

(Ergebnis: $N_{BE} = -\frac{17}{12}\frac{q_0 a}{1+2I_y/(a^2A)}$)

Aufgabe 15

Der dehnstarre Balken *AB* (Biegesteifigkeit EI_y) ist im Punkt *A* fest eingespannt und wird im Punkt *C* zusätzlich durch das Seil *CD* (Dehnsteifigkeit EA) gehalten, das im Punkt *D* befestigt ist. Im Punkt *B* greift die Kraft *F* an.



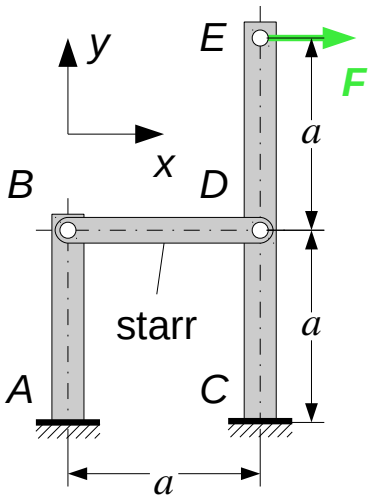
Ermitteln Sie die Kraft N_{CD} im Seil *CD*.

Gegeben: $a, E, A, I_y, A = 15I_y/a^2, F$

(HM, Prüfung WS 2015)

(Ergebnis: $N_{CD} = \frac{14\sqrt{5}F}{8+\sqrt{5}} = 3{,}058F$)

Aufgabe 16



Die Balken *AB* und *CE* sind in den Punkten *A* bzw. *C* fest eingespannt und durch den in den Punkten *B* und *D* gelenkig angeschlossenen starren Stab *BD* verbunden. Beide Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y . Im Punkt *E* greift die Kraft F an.

Ermitteln Sie die Kraft im Stab *BD*.

Gegeben: a, EI_y, F

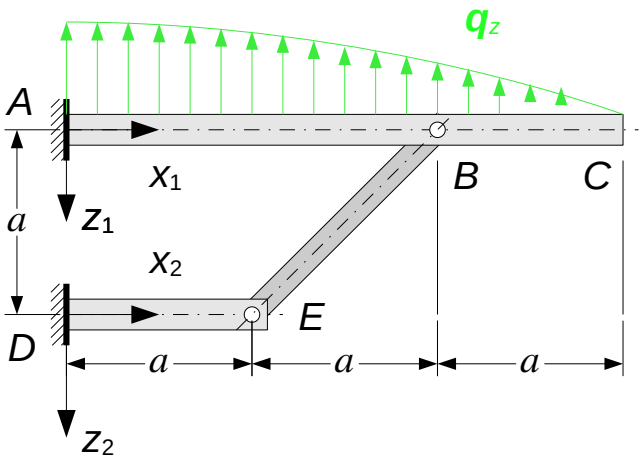
(HM, Prüfung SS 2016)

(Ergebnis: $N_{BD} = 5F/4$)

Aufgabe 17

Der Tragflügel *ABC* ist im Punkt *A* fest eingespannt. Im Punkt *B* ist die Strebe *BE* gelenkig angeschlossen, die im Punkt *DE* gelenkig an den im Punkt *D* fest eingespannten Balken *DE* angeschlossen ist. Der Tragflügel wird durch die Auftriebsverteilung

$$q_z(x_1) = -q_0\left(1 - \frac{1}{9}\frac{x_1^2}{a^2}\right)$$



belastet.

Der Tragflügel *ABC* und der Balken *DE* haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y. Tragflügel, Balken und Strebe können als dehnstarr angenommen werden.

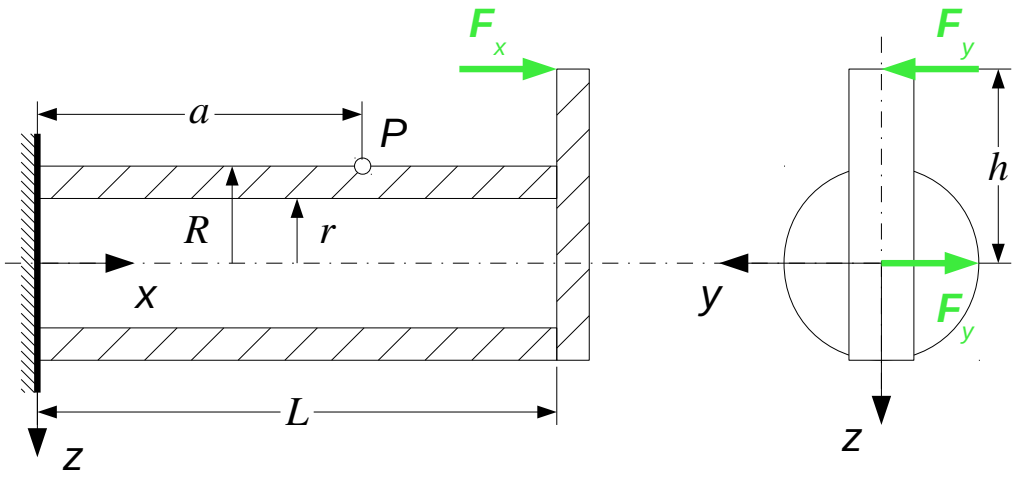
Bestimmen Sie die Kraft in der Strebe *BE*.

Gegeben: a, EI_y, q_0

(HM, Prüfung WS 2017)

(Ergebnis: $N_{BE} = 1{,}169 q_0 a$)

Aufgabe 18



Das abgebildete Rohr (Innenradius r, Außenradius R) ist am linken Ende fest eingespannt und wird am rechten Ende durch die Kräfte F_x und F_y wie dargestellt belastet.

a) Bestimmen Sie die Schnittlasten im Querschnitt bei Punkt *P*.

b) Bestimmen Sie die Fläche A, die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sowie das Torsionsträgheitsmoment I_T des Rohrquerschnitts.

c) Bestimmen Sie die Spannungen im Punkt *P*.

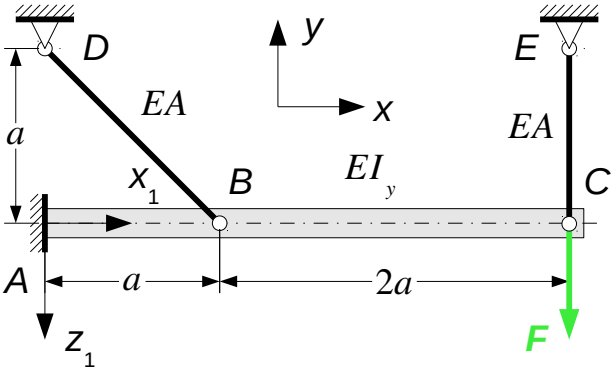
d) Bestimmen Sie die Sicherheit S_F gegen Fließen nach der Gestaltänderungshypothese.

Gegeben: $R = 5$ cm, $r = 3$ cm, $h = 8$ cm, $F_x = 100$ kN, $F_y = 80$ kN, $R_e = 295$ MPa, $R_m = 490$ MPa, $L = 50$ cm, $a = 30$ cm

(HM, Prüfung WS 2018)

(Ergebnis: a) $N = 100$ kN, $Q_y = 0$ kN, $Q_z = 0$ kN, $M_x = 6{,}4$ kNm, $M_y = -8$ kNm, $M_z = 0$ kNm; b) $A = 50{,}27$ cm^2, $I_T = 854{,}5$ cm^4, $I_y = I_z = 427{,}3$ cm^4; c) $\sigma_x = 113{,}5$ MPa, $\tau_{xy} = 37{,}45$ MPa; d) $S_F = 2{,}25$)

Aufgabe 19



Der dehnstarre Balken *AC* (Biegesteifigkeit EI_y) ist im Punkt *A* fest eingespannt. Er wird zusätzlich durch die in den Punkten *B* und *C* angeschlossenen Seile (Dehnsteifigkeit EA) gehalten. Im Punkt *C* greift die Last F an.

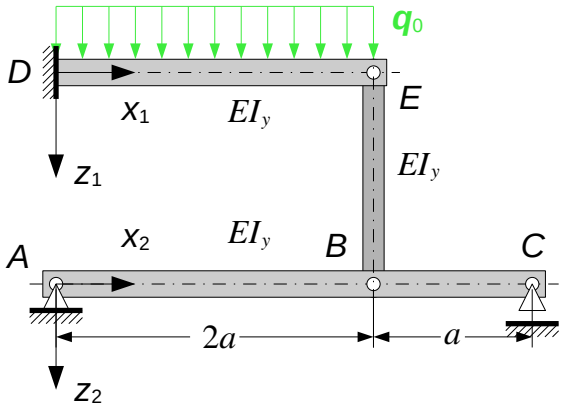
Ermitteln Sie die Kräfte N_{BD} und N_{CE} in den Seilen *BD* bzw. *CE*.

Gegeben: $a, E, A, I_y = a^2A/3, F$

(HM, Prüfung WS 2018)

(Ergebnis: $N_{BD} = 0{,}06203F$, $N_{CE} = 0{,}9590F$)

Aufgabe 20



Das abgebildete Tragwerk besteht aus den dehnstarren Balken *ABC*, *DE* und *BE*. Der Balken *ABC* ist in den Punkten *A* und *C* gelenkig gelagert. Der Balken *DE* ist im Punkt *D* fest eingespannt. Er wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet. Der Balken *BE* ist in den Punkten *B* bzw. *E* gelenkig an die Balken *ABC* bzw. *DE* angeschlossen. Alle Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y.

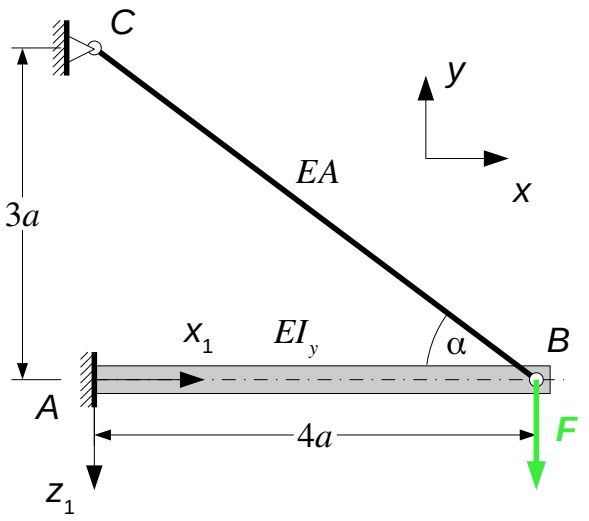
Bestimmen Sie die Kraft N_{BE} im Balken *BE*.

Gegeben: a, q_0, EI_y

(HM, Prüfung WS 2020)

(Ergebnis: $N_{BE} = -9q_0a/14$)

Aufgabe 21



Der dehnstarre Balken *AB* (Biegesteifigkeit EI_y) ist im Punkt *A* fest eingespannt. Zusätzlich wird er im Punkt *B* durch ein Seil (Dehnsteifigkeit EA) gehalten, das im Punkt *C* befestigt ist. Im Punkt *B* greift die Kraft F an.

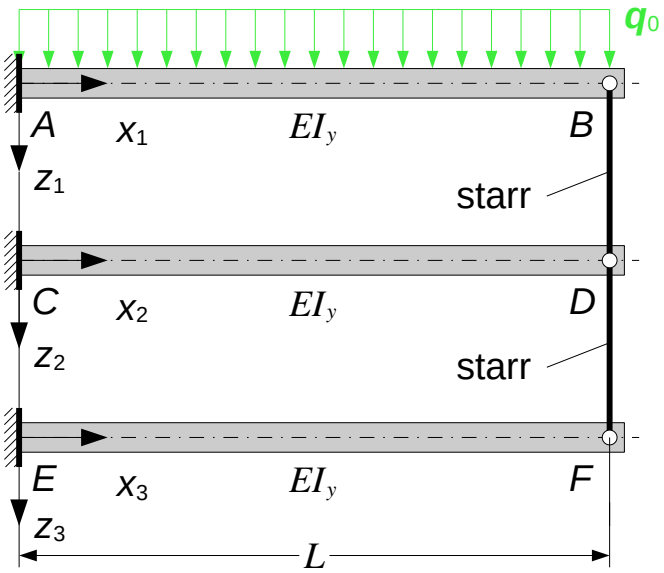
Bestimmen Sie die Kraft N_{BC} im Seil.

Gegeben: $a, F, E, A, I_y = 8a^2A/125$

(HM, Prüfung SS 2021)

(Ergebnis: $N_{BE} = 1{,}6F$)

Aufgabe 22



Das abgebildete Balkensystem besteht aus den Kragbalken *AB*, *CD* und *EF*, die in den Punkten *A*, *C* und *E* fest eingespannt und in den Punkten *B*, *D* und *F* durch die gelenkig angeschlossenen starren Stäbe *BD* und *DF* verbunden sind. Der Balken *AB* wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet. Alle drei Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y.

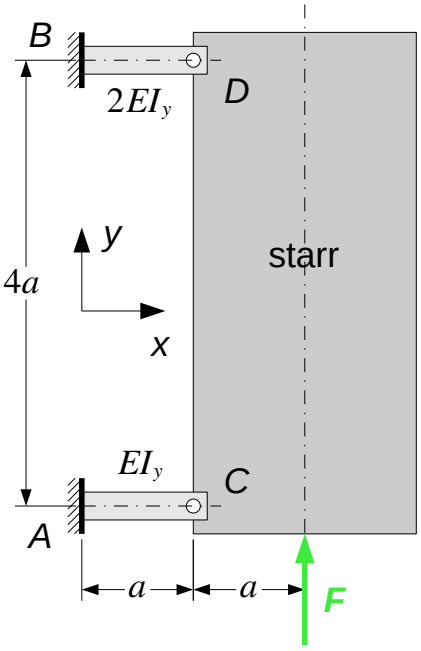
Bestimmen Sie die Kräfte N_{BD} und N_{DF} in den Stäben *BD* und *DF*.

Gegeben: q_0, L, EI_y

(HM, Prüfung WS 2021)

(Ergebnis: $N_{BD} = -q_0L/4$, $N_{DF} = -q_0L/8$)

Aufgabe 23



Das Berechnungsmodell für den Booster einer Rakete besteht aus einem starren Körper für den Booster, der in den Punkten *C* und *D* gelenkig an die dehnstarren Kragbalken *AC* (Biegesteifigkeit EI_y) bzw. *BD* (Biegesteifigkeit $2EI_y$) angeschlossen ist. Am Booster greift die Kraft F an.

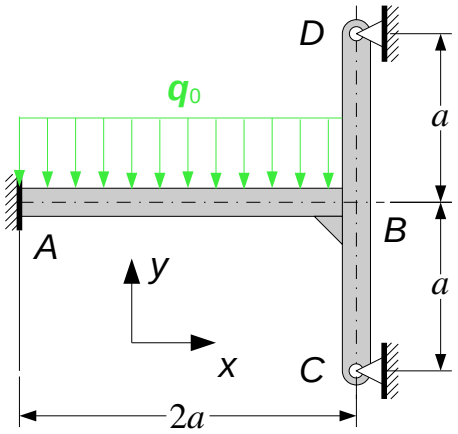
Bestimmen Sie die Kräfte in den Gelenken *C* und *D*.

Gegeben: a, F, EI_y

(HM, Prüfung SS 2022)

(Ergebnis: $C_x = F/4 \rightarrow, C_y = F/3 \downarrow,$
$D_x = F/4 \leftarrow, D_y = 2F/3 \downarrow$)

Aufgabe 24



Der abgebildete Rahmen besteht aus den dehnstarren Balken *AB* und *CD*, die im Punkt *B* starr miteinander verbunden sind. Der Balken *AB* ist im Punkt *A* fest eingespannt. Der Balken *CD* wird in den Punkten *C* und *D* durch Festlager gehalten. Beide Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y. Der Balken *AB* wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet.

Bestimmen Sie die Schnittlasten im Punkt *B*.

Gegeben: a, q_0, EI_y

(HM, Prüfung SS 2023)

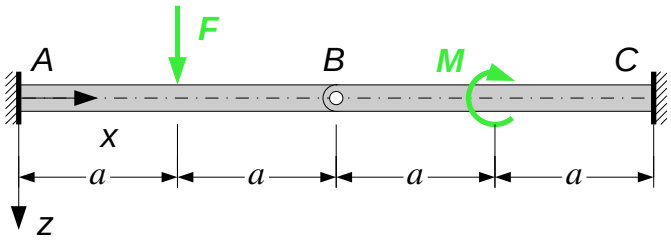
(Ergebnis: Träger *AB*: $B_x = 0,\ B_y = 0{,}9375\ q_0 a \uparrow,\ M_B = 0{,}25\ q_0 a^2 \circlearrowleft$)

Aufgabe 25

Die beiden Kragbalken *AB* und *BC* sind im Punkt *B* gelenkig miteinander verbunden. Beide Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y. In der Mitte von Balken *AB* greift die Kraft F und in der Mitte von Balken *BC* das Moment M an.

Bestimmen Sie die Kräfte im Gelenk *B* und die Verschiebung w_B von Punkt *B*.

Gegeben: $a,\ F,\ M = 3Fa,\ EI_y$

(HM, Prüfung WS 2023)

(Ergebnis: Träger *AB*: $B_z = F\uparrow$, $w_B = -\frac{11}{6}\frac{F a^3}{E I_y}$)