

4.2 Balkensysteme

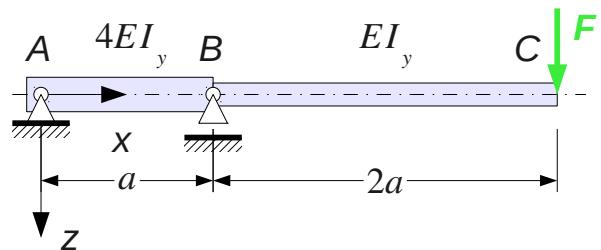
Aufgaben

Aufgabe 1

Der abgebildete Balken ist in den Punkten A und B gelenkig gelagert. Im Punkt C greift die Kraft F an. Im Bereich AB beträgt die Biegesteifigkeit $4EI_y$ und im Bereich BC EI_y .

Gesucht ist die vertikale Verschiebung w_C am Lastangriffspunkt C .

(Ergebnis: $w_C = 3Fa^3/(EI_y) \downarrow$)

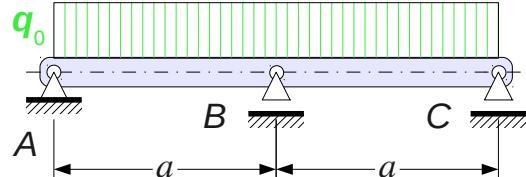


Aufgabe 2

Der abgebildete Balken mit der Biegesteifigkeit EI_y wird im Punkt A durch ein Festlager und in den Punkten B und C durch Loslager gehalten.

Bestimmen Sie die Lagerkräfte, den Verlauf der Schnittlasten sowie die Biegelinie.

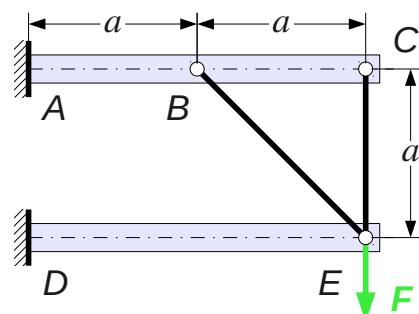
(Ergebnis: $A_z = C_z = 3q_0 a/8 \uparrow$, $B_z = 5q_0 a/4 \uparrow$; $|M_{yl}|_{max} = q_0 a^2/8$ in Punkt B)



Aufgabe 3

Das abgebildete Tragwerk besteht aus den Balken AC und DE , die in den Punkten A bzw. D fest eingespannt sind. Sie sind durch die gelenkig angeschlossenen Streben BE und CE miteinander verbunden. Im Punkt E greift die Kraft F an.

Die Balken AC und DE haben die Biegesteifigkeit EI_y und sind dehnstarr ($EA = \infty$). Die Streben BE und CE haben die Dehnsteifigkeit EA .



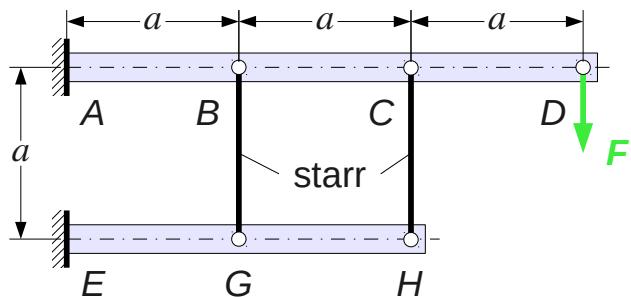
Zahlenwert: $I_y/A = a^2/12$

a) Bestimmen Sie die Normalkräfte N_{BE} und N_{CE} in den Streben BE und CE .
 b) Bestimmen Sie die Vertikalverschiebung w_E des Lastangriffspunkts E .

(Ergebnis: a) $N_{BE} = 1,370F$, $N_{CE} = -0,1336F$; b) $w_E = 0,4396 Fa^3/(EI_y) \downarrow$)

Aufgabe 4

Das abgebildete Tragwerk besteht aus den Balken AD und EH , die durch die gelenkig angeschlossenen starren Streben BG und CH miteinander verbunden sind. Die Balken sind in den Punkten A bzw. E fest eingespannt und haben die Biegesteifigkeit EI_y . Am Balken AD greift im Punkt D die Kraft F an.



- a) Ermitteln Sie die Normalkräfte N_{BG} und N_{CH} in den Streben.
- b) Bestimmen Sie die Vertikalverschiebung w_D des Lastangriffspunkts D .

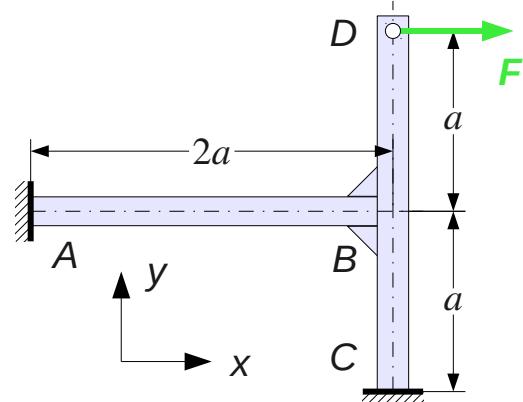
(Ergebnis: a) $N_{BG} = 6F/7$, $N_{CH} = -8F/7$; b) $w_D = 101Fa^3/(21EI_y) \downarrow$)

Aufgabe 5

Das abgebildete Tragwerk besteht aus den dehnstarren Balken AB und CD , die im Punkt B starr miteinander verbunden sind. Die Balken sind in den Punkten A bzw. C fest eingespannt und haben die Biegesteifigkeit EI_y . Am Balken CD greift im Punkt D die Kraft F an.

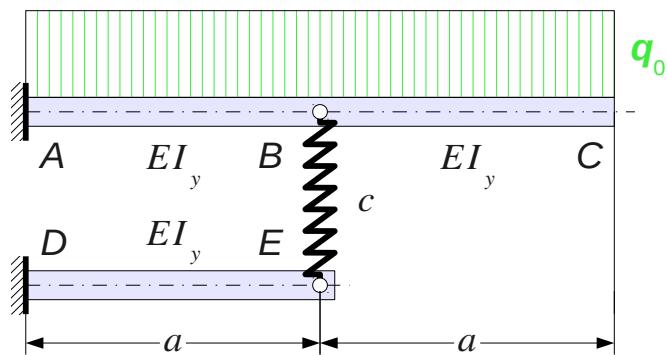
- a) Ermitteln Sie die Schnittlasten im Punkt B .
- b) Bestimmen Sie die Horizontalverschiebung u_D des Lastangriffspunkts D .

(Ergebnis: a) Lasten am Balken AB : $B_x = 2F \rightarrow$, $B_y = F/4 \uparrow$, $M_B = Fa/3 \cup$;
 b) $u_D = Fa^3/(2EI_y) \rightarrow$



Aufgabe 6

Das abgebildete Tragwerk besteht aus den Balken AC und DE , die in den Punkten A bzw. D fest eingespannt sind und durch die an den Punkten B und E gelenkig angeschlossene lineare Feder BE miteinander verbunden sind. Beide Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y . Die Feder hat die Federsteifigkeit $c = EI_y/a^3$.



Der Balken AC wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet.

- Ermitteln Sie die Kraft N_{BE} in der Feder BE .
- Ermitteln Sie die Vertikalverschiebung w_C von Punkt C .

(Ergebnis: $N_{BE} = -0,425q_0a$; $w_C = 1,646q_0a^4/(EI_y)$ ↓)

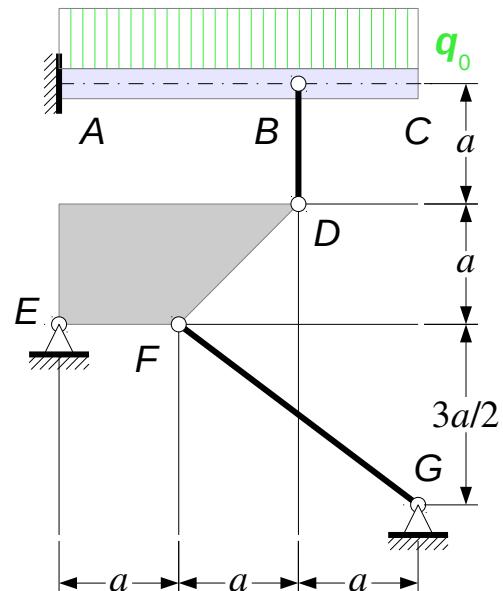
Aufgabe 7

Der Balken AC (Biegesteifigkeit EI_y) ist im Punkt A fest eingespannt. Im Punkt B ist der starre Stab BD gelenkig angeschlossen.

Der starre Körper EDF wird im Punkt E durch ein Festlager gehalten. In den Punkten D und F sind die Stäbe BD und FG gelenkig angeschlossen. Der Stab FG hat die Dehnsteifigkeit EA und wird im Punkt G durch ein Festlager gehalten.

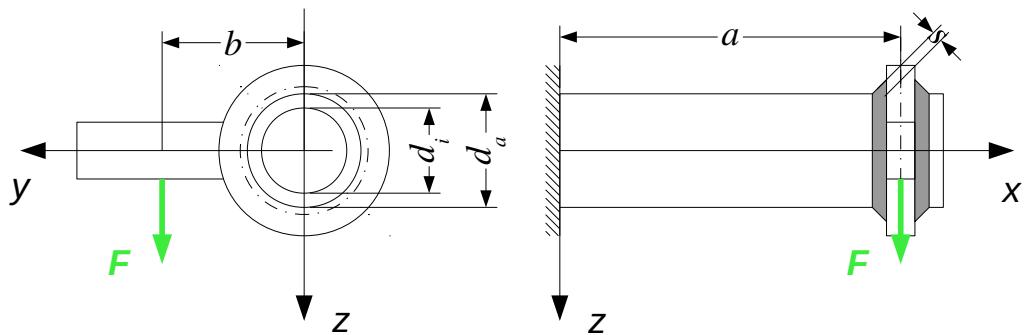
Der Balken AC wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet.

Gesucht sind die Kräfte in den Stäben BD und FG .



(Ergebnis: $N_{BD} = -\frac{51q_0a}{24+250I_y/(Aa^2)}$, $N_{FG} = -\frac{170q_0a}{24+250I_y/(Aa^2)}$)

Aufgabe 8

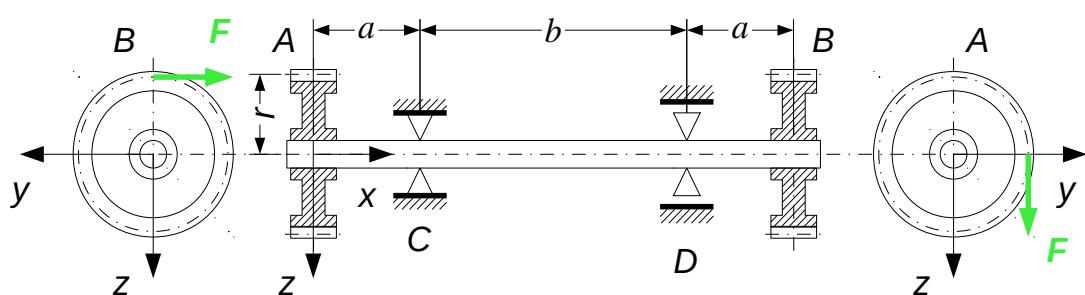


Der abgebildete Hebel besteht aus einem Rohr, an das ein Querarm angeschweißt ist. Am Querarm greift die Kraft F an. Rohr und Querarm bestehen aus einem duktilen Werkstoff mit der zulässigen Spannung σ_{zul} .

- Wie groß darf nach der Gestaltänderungshypothese der Innendurchmesser d_i höchstens werden?
- Wie groß ist die Schubspannung τ_s in der Schweißnaht, wenn davon ausgegangen wird, dass die Schubspannung hauptsächlich durch das zu übertragende Torsionsmoment erzeugt wird?

Zahlenwerte: $a = 30 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $s = 5 \text{ mm}$, $d_a = 2 \text{ cm}$, $F = 250 \text{ N}$, $\sigma_{zul} = 180 \text{ MPa}$
(Ergebnis: $d_i = 1,63 \text{ cm}$, $\tau_s = 4,0 \text{ MPa}$)

Aufgabe 9



Auf einer Vollwelle mit Kreisquerschnitt sitzen zwei Zahnräder mit Radius r , an denen wie abgebildet jeweils die Kraft F angreift. Ermitteln Sie den nach der Gestaltänderungshypothese nötigen Wellendurchmesser d .

Zahlenwerte: $a = 100 \text{ mm}$, $b = 300 \text{ mm}$, $r = 100 \text{ mm}$, $F = 450 \text{ N}$, $\sigma_{zul} = 150 \text{ MPa}$
(Ergebnis: $d \geq 16 \text{ mm}$)

Aufgabe 10

Das abgebildete Getriebe besteht aus zwei Zahnrädern. Zahnrad B sitzt auf der Welle AC , die in den Punkten A und C gelenkig gelagert ist. Sie wird im Punkt A durch das Moment M_A angetrieben.

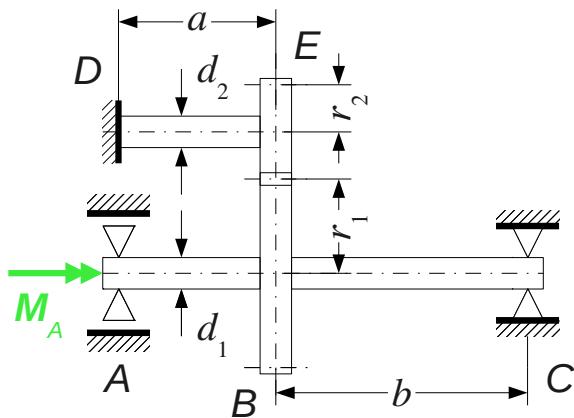
Zahnrad E sitzt auf der Welle DE , die im Punkt D fest eingespannt ist.

Die Zahnräder sind gerade verzahnt.

Beide Wellen sind Vollwellen mit einem Kreisquerschnitt. Ermitteln Sie die nach der Gestaltänderungshypothese benötigten Durchmesser d_1 und d_2 .

Zahlenwerte: $a = 300 \text{ mm}$, $b = 400 \text{ mm}$, $r_1 = 50 \text{ mm}$, $r_2 = 25 \text{ mm}$, $M_A = 10 \text{ Nm}$, $\sigma_{zul} = 150 \text{ MPa}$

(Ergebnis: $d_1 = 13,4 \text{ mm}$, $d_2 = 16 \text{ mm}$)



Aufgabe 11

Der Balken AB wird im Punkt A durch ein Festlager und im Punkt B durch ein Loslager gehalten. Im Punkt C sind die Stäbe CD und CE gelenkig angeschlossen, die in den Punkten D bzw. E durch Festlager gehalten werden.

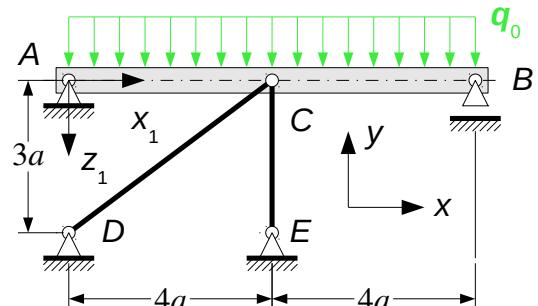
Der Balken AB hat die Biegesteifigkeit EI_y und ist dehnstarr, d.h. seine Längenänderung darf vernachlässigt werden. Die Stäbe CD und CE haben die Dehngesteifigkeit EA .

Ermitteln Sie die Kräfte in den Stäben CD und CE , wenn der Balken AB durch die konstante Streckenlast q_0 belastet wird.

Zahlenwerte: $A = 1125I_y/(256a^2)$

(HM, Prüfung SS 2014)

(Ergebnis: $N_{CD} = -45q_0a/32$, $N_{CE} = -125q_0a/32$)



Aufgabe 12

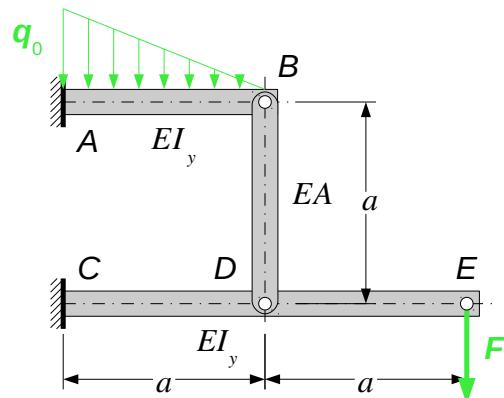
Das abgebildete Tragwerk besteht aus den Balken AB und CE (Biegesteifigkeit EI_y), die in den Punkten A bzw. C fest eingespannt sind. In den Punkten B und D ist der Stab BD (Dehnsteifigkeit EA) gelenkig angeschlossen. Der Balken AB wird durch eine Streckenlast belastet, die vom Wert q_0 im Punkt A linear auf den Wert null im Punkt B abfällt. Am Balken CE greift im Punkt E die Kraft F an.

Der Balken AB wird durch eine Streckenlast belastet, die vom Wert q_0 im Punkt A linear auf den Wert null im Punkt B abfällt. Am Balken CE greift im Punkt E die Kraft F an.

Ermitteln Sie die Kraft im Stab BD .

(HM, Prüfung WS 2014)

$$(\text{Ergebnis: } N_{BD} = \frac{25F - q_0a}{20 + 30I_y/(a^2A)})$$



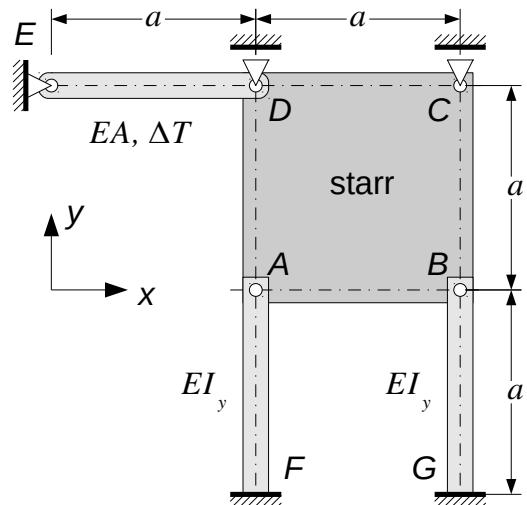
Aufgabe 13

Der starre Körper $ABCD$ wird in den Punkten C und D durch Loslager gehalten. Im Punkt D ist der Stab DE (Dehnsteifigkeit EA , Wärmeausdehnungskoeffizient α_T) gelenkig angeschlossen, der im Punkt E durch ein Festlager gehalten wird. In den Punkten A und B sind die Balken AF bzw. BG (Biegesteifigkeit EI_y) gelenkig angeschlossen. Die Balken sind in den Punkten F bzw. G fest eingespannt.

Der Stab DE wird um ΔT erwärmt.

- Schneiden Sie den starren Körper frei und zeichnen Sie alle Kräfte ein.
- Bestimmen Sie die Horizontalverschiebung u des starren Körpers.
- Bestimmen Sie die am starren Körper in den Gelenken A bis D angreifenden Kräfte.

Zahlenwert: $I_y/(a^2A) = 1/6$



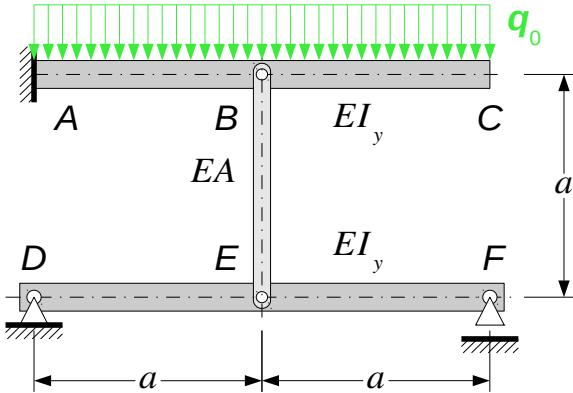
(HM, Prüfung SS 2015)

(Ergebnis: b) $u = a\alpha_T \Delta T / 2$; c) $A_x = B_x = 3EI_y \alpha_T \Delta T / (2a^2) \leftarrow$, $A_y = B_y = 0$;
 $C_x = 0$, $C_y = 3EI_y \alpha_T \Delta T / a^2 \uparrow$, $D_x = EA \alpha_T \Delta T / 2 \rightarrow$, $D_y = 3EI_y \alpha_T \Delta T / a^2 \downarrow$)**Aufgabe 14**

Der Kragbalken ABC und der beidseitig gelenkig gelagerte Balken DEF (Biegesteifigkeit EI_y) sind durch den gelenkig angeschlossenen Stab BE (Dehnsteifigkeit EA) miteinander verbunden. Der Kragbalken wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet.

Ermitteln Sie die Normalkraft im Stab BE .

(HM, Prüfung SS 2015)

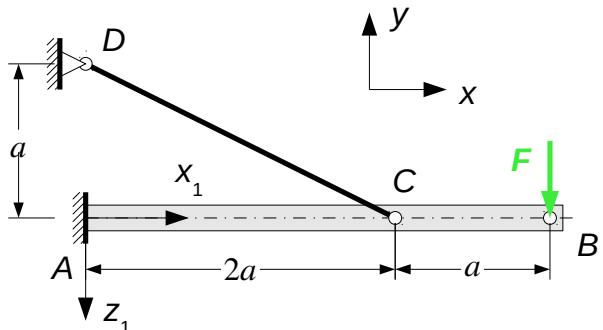
(Ergebnis: $N_{BE} = -\frac{17}{12} \frac{q_0 a}{1 + 2I_y/(a^2 A)}$)**Aufgabe 15**

Der dehnstarre Balken AB (Biegesteifigkeit EI_y) ist im Punkt A fest eingespannt und wird im Punkt C zusätzlich durch das Seil CD (Dehnsteifigkeit EA) gehalten, das im Punkt D befestigt ist. Im Punkt B greift die Kraft F an.

Ermitteln Sie die Kraft N_{CD} im Seil CD .

Gegeben: a , E , A , I_y , $A = 15I_y/a^2$, F

(HM, Prüfung WS 2015)

(Ergebnis: $N_{CD} = \frac{14\sqrt{5}F}{8+\sqrt{5}} = 3,058F$)

Aufgabe 16

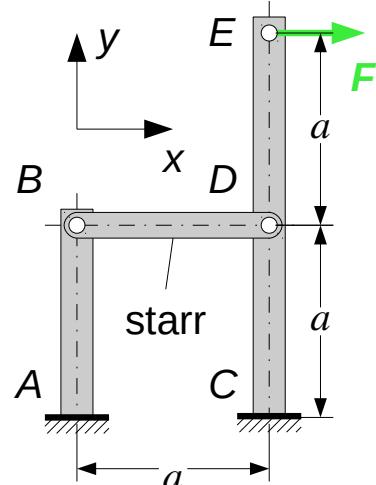
Die Balken AB und CE sind in den Punkten A bzw. C fest eingespannt und durch den in den Punkten B und D gelenkig angeschlossenen starren Stab BD verbunden. Beide Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y . Im Punkt E greift die Kraft F an.

Ermitteln Sie die Kraft im Stab BD .

Gegeben: a, EI_y, F

(HM, Prüfung SS 2016)

(Ergebnis: $N_{BD} = 5F/4$)

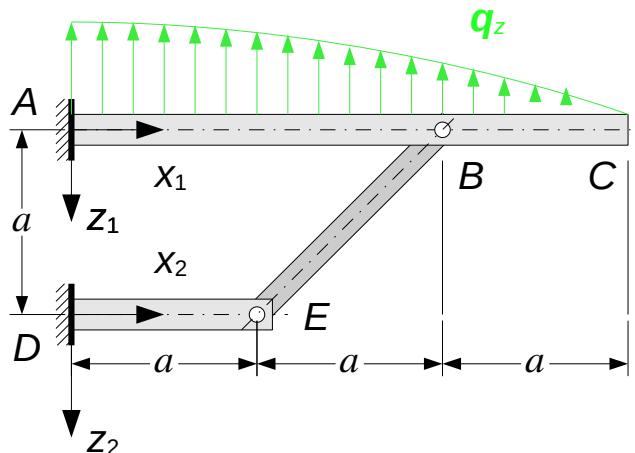


Aufgabe 17

Der Tragflügel ABC ist im Punkt A fest eingespannt. Im Punkt B ist die Strebe BE gelenkig angeschlossen, die im Punkt DE gelenkig an den im Punkt D fest eingespannten Balken DE angeschlossen ist. Der Tragflügel wird durch die Auftriebsverteilung

$$q_z(x_1) = -q_0 \left(1 - \frac{1}{9} \frac{x_1^2}{a^2} \right)$$

belastet.



Der Tragflügel ABC und der Balken DE haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y . Tragflügel, Balken und Strebe können als dehnstarr angenommen werden.

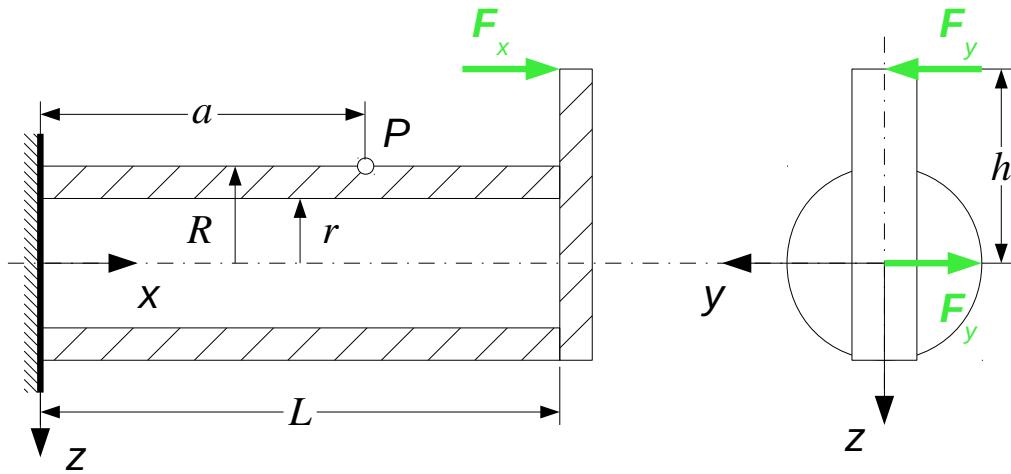
Bestimmen Sie die Kraft in der Strebe BE .

Gegeben: a, EI_y, q_0

(HM, Prüfung WS 2017)

(Ergebnis: $N_{BE} = 1,169q_0a$)

Aufgabe 18



Das abgebildete Rohr (Innenradius r , Außenradius R) ist am linken Ende fest eingespannt und wird am rechten Ende durch die Kräfte F_x und F_y wie dargestellt belastet.

- Bestimmen Sie die Schnittlasten im Querschnitt bei Punkt P .
- Bestimmen Sie die Fläche A , die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sowie das Torsionsträgheitsmoment I_T des Rohrquerschnitts.
- Bestimmen Sie die Spannungen im Punkt P .
- Bestimmen Sie die Sicherheit S_F gegen Fließen nach der Gestaltänderungshypothese.

Gegeben: $R = 5 \text{ cm}$, $r = 3 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$, $F_x = 100 \text{ kN}$, $F_y = 80 \text{ kN}$, $R_e = 295 \text{ MPa}$, $R_m = 490 \text{ MPa}$, $L = 50 \text{ cm}$, $a = 30 \text{ cm}$

(HM, Prüfung WS 2018)

(Ergebnis: a) $N = 100 \text{ kN}$, $Q_y = 0 \text{ kN}$, $Q_z = 0 \text{ kN}$, $M_x = 6,4 \text{ kNm}$, $M_y = -8 \text{ kNm}$, $M_z = 0 \text{ kNm}$; b) $A = 50,27 \text{ cm}^2$, $I_T = 854,5 \text{ cm}^4$, $I_y = I_z = 427,3 \text{ cm}^4$; c) $\sigma_x = 113,5 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 37,45 \text{ MPa}$; d) $S_F = 2,25$)

Aufgabe 19

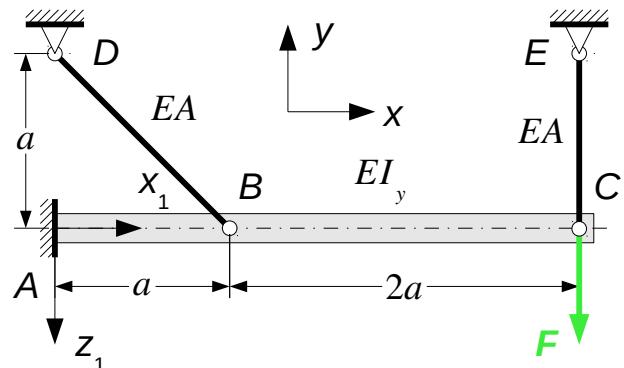
Der dehnstarre Balken AC (Biegesteifigkeit EI_y) ist im Punkt A fest eingespannt. Er wird zusätzlich durch die in den Punkten B und C angeschlossenen Seile (Dehnsteifigkeit EA) gehalten. Im Punkt C greift die Last F an.

Ermitteln Sie die Kräfte N_{BD} und N_{CE} in den Seilen BD bzw. CE .

Gegeben: $a, E, A, I_y = a^2 A/3, F$

(HM, Prüfung WS 2018)

(Ergebnis: $N_{BD} = 0,06203F$, $N_{CE} = 0,9590F$)



Aufgabe 20

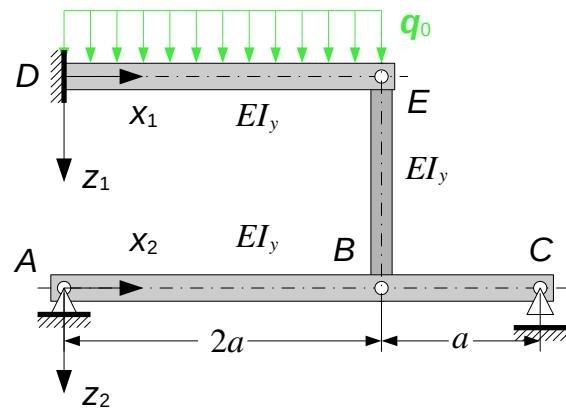
Das abgebildete Tragwerk besteht aus den dehnstarren Balken ABC , DE und BE . Der Balken ABC ist in den Punkten A und C gelenkig gelagert. Der Balken DE ist im Punkt D fest eingespannt. Er wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet. Der Balken BE ist in den Punkten B bzw. E gelenkig an die Balken ABC bzw. DE angeschlossen. Alle Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y .

Bestimmen Sie die Kraft N_{BE} im Balken BE .

Gegeben: a, q_0, EI_y

(HM, Prüfung WS 2020)

(Ergebnis: $N_{BE} = -9q_0a/14$)



Aufgabe 21

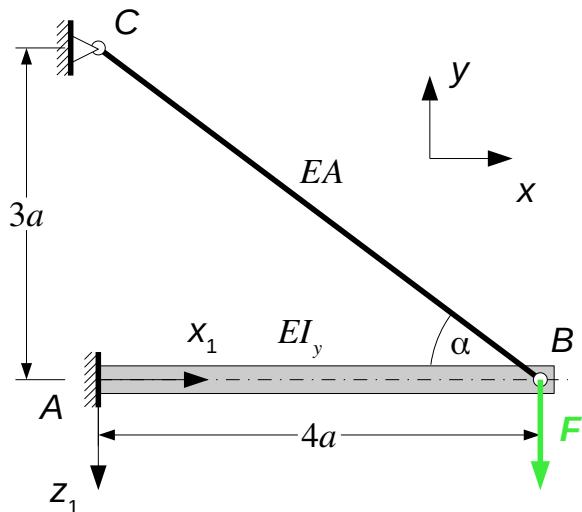
Der dehnstarre Balken AB (Biegesteifigkeit EI_y) ist im Punkt A fest eingespannt. Zusätzlich wird er im Punkt B durch ein Seil (Dehnsteifigkeit EA) gehalten, das im Punkt C befestigt ist. Im Punkt B greift die Kraft F an.

Bestimmen Sie die Kraft N_{BC} im Seil.

Gegeben: $a, F, E, A, I_y = 8a^2A/125$

(HM, Prüfung SS 2021)

(Ergebnis: $N_{BC} = 1,6F$)



Aufgabe 22

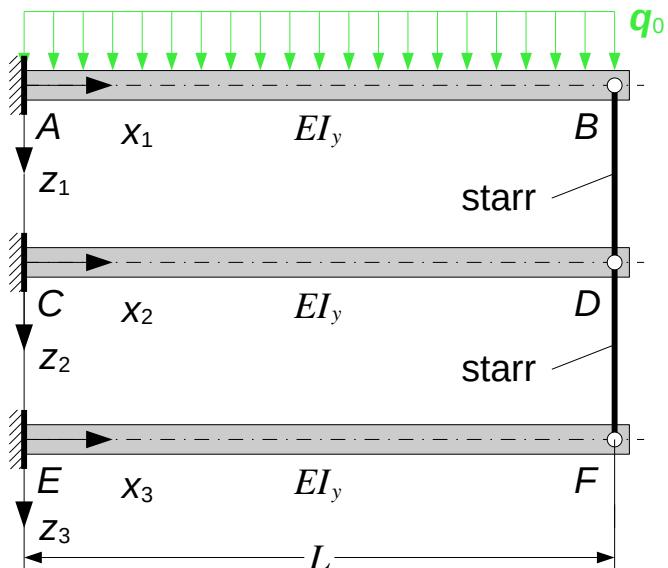
Das abgebildete Balkensystem besteht aus den Kragbalken AB , CD und EF , die in den Punkten A , C und E fest eingespannt und in den Punkten B , D und F durch die gelenkig angeschlossenen starren Stäbe BD und DF verbunden sind. Der Balken AB wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet. Alle drei Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y .

Bestimmen Sie die Kräfte N_{BD} und N_{DF} in den Stäben BD und DF .

Gegeben: q_0, L, EI_y

(HM, Prüfung WS 2021)

(Ergebnis: $N_{BD} = -q_0L/4$, $N_{DF} = -q_0L/8$)



Aufgabe 23

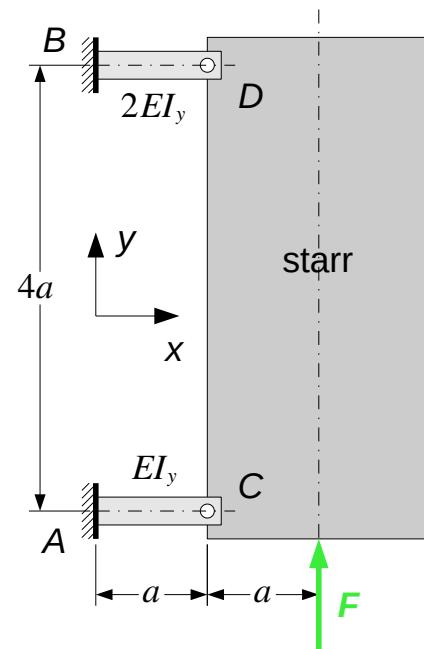
Das Berechnungsmodell für den Booster einer Rakete besteht aus einem starren Körper für den Booster, der in den Punkten C und D gelenkig an die dehnstarren Kragbalken AC (Biegesteifigkeit EI_y) bzw. BD (Biegesteifigkeit $2EI_y$) angeschlossen ist. Am Booster greift die Kraft F an.

Bestimmen Sie die Kräfte in den Gelenken C und D.

Gegeben: a, F, EI_y

(HM, Prüfung SS 2022)

(Ergebnis: $C_x = F/4 \rightarrow, C_y = F/3 \downarrow, D_x = F/4 \leftarrow, D_y = 2F/3 \downarrow$)



Aufgabe 24

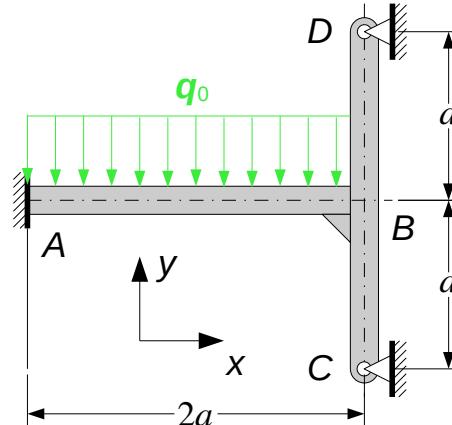
Der abgebildete Rahmen besteht aus den dehnstarren Balken AB und CD, die im Punkt B starr miteinander verbunden sind. Der Balken AB ist im Punkt A fest eingespannt. Der Balken CD wird in den Punkten C und D durch Festlager gehalten. Beide Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y . Der Balken AB wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet.

Bestimmen Sie die Schnittlasten im Punkt B.

Gegeben: a, q_0, EI_y

(HM, Prüfung SS 2023)

(Ergebnis: Träger AB: $B_x = 0, B_y = 0,9375 q_0 a \uparrow, M_B = 0,25 q_0 a^2 \circlearrowleft$)



Aufgabe 25

Die beiden Kragbalken AB und BC sind im Punkt B gelenkig miteinander verbunden. Beide Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y . In der Mitte von Balken AB greift die Kraft F und in der Mitte von Balken BC das Moment M an.

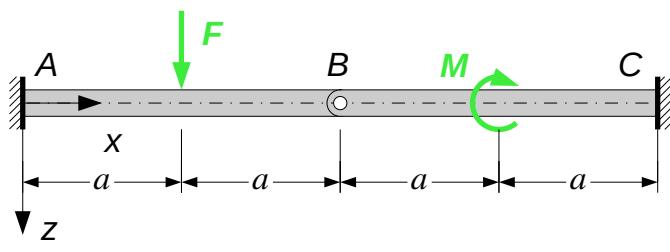
Bestimmen Sie die Kräfte im Gelenk B und die Verschiebung w_B von Punkt B .

Gegeben: $a, F, M = 3Fa, EI_y$

(HM, Prüfung WS 2023)

(Ergebnis: Träger AB: $B_z = F \uparrow$,

$$w_B = -\frac{11}{6} \frac{Fa^3}{EI_y}$$



Aufgabe 26

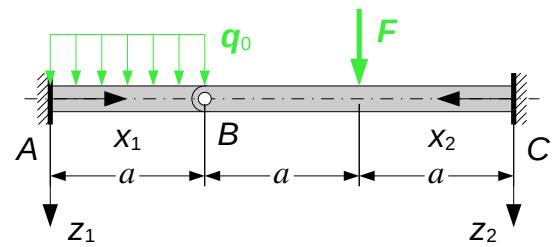
Die beiden Kragbalken AB und BC sind im Punkt B gelenkig miteinander verbunden. Der Balken AB wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet. Am Balken BC greift in der Mitte die Kraft F an. Beide Balken haben die gleiche Biegesteifigkeit EI_y .

Bestimmen Sie die Kraft im Gelenk B .

Gegeben: $a, F, q_0 = F/a, EI_y$

(HM, Prüfung SS 2024)

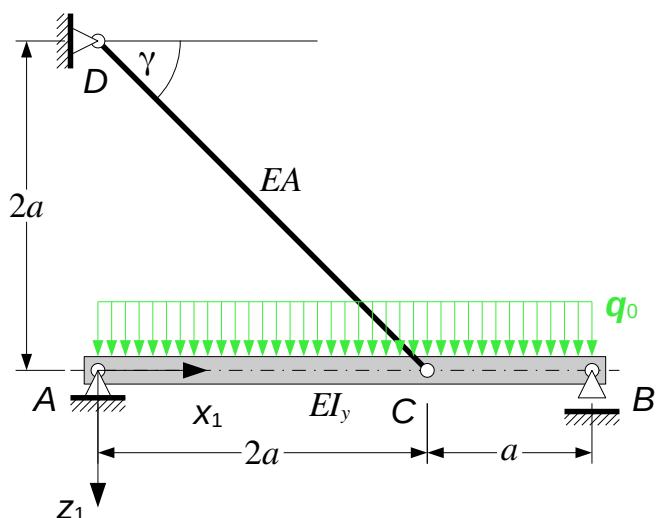
(Ergebnis: Balken AB: $B_z = (17/72) F \downarrow$)



Aufgabe 27

Der dehnstarre Balken AB mit der Biegesteifigkeit EI_y wird im Punkt A durch ein Festlager und im Punkt B durch ein Loslager gehalten. Er wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet. Im Punkt C ist ein Seil mit der Dehnsteifigkeit EA angeschlossen, das im Punkt D befestigt ist.

- a) Bestimmen Sie die Länge L_{CD} des Seils und den Sinus des Winkels γ .
- b) Bestimmen Sie die Seilkraft N_{CD} .



Gegeben: $a, q_0, E, A, I_y = \sqrt{2} a^2 A / 144$

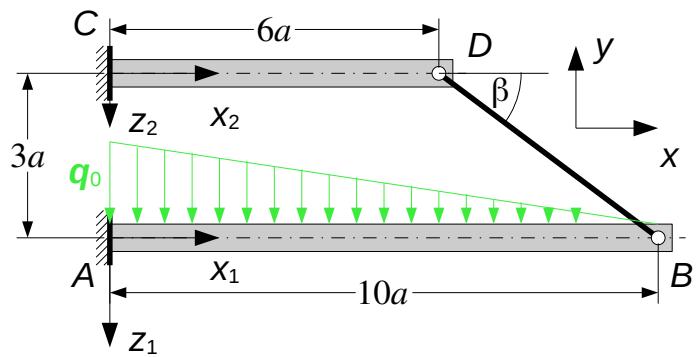
(HM, Prüfung WS 2024)

(Ergebnis: a) $L_{CD} = 2\sqrt{2}a, \sin(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $N_{CD} = \frac{11\sqrt{2}}{6}q_0a$)

Aufgabe 28

Die dehnstarren Balken AB und CD mit der Biegesteifigkeit EI_y sind in den Punkten A bzw. C fest eingespannt. Zwischen den Punkten B und D befindet sich ein Seil mit der Dehnsteifigkeit EA .

Der Balken AB wird durch eine linear abnehmende Streckenlast wie dargestellt belastet.



- Bestimmen Sie die Länge L_{BD} des Seils und den Sinus des Winkels β .
- Bestimmen Sie die Seilkraft N_{BD} .

Gegeben: $a, q_0, E, A, I_y = 352 a^2 A / 125$

(HM, Prüfung SS 2025)

(Ergebnis: a) $L_{BD} = 5a, \sin(\beta) = 3/5$; b) $N_{BD} = (5/4) q_0a$)