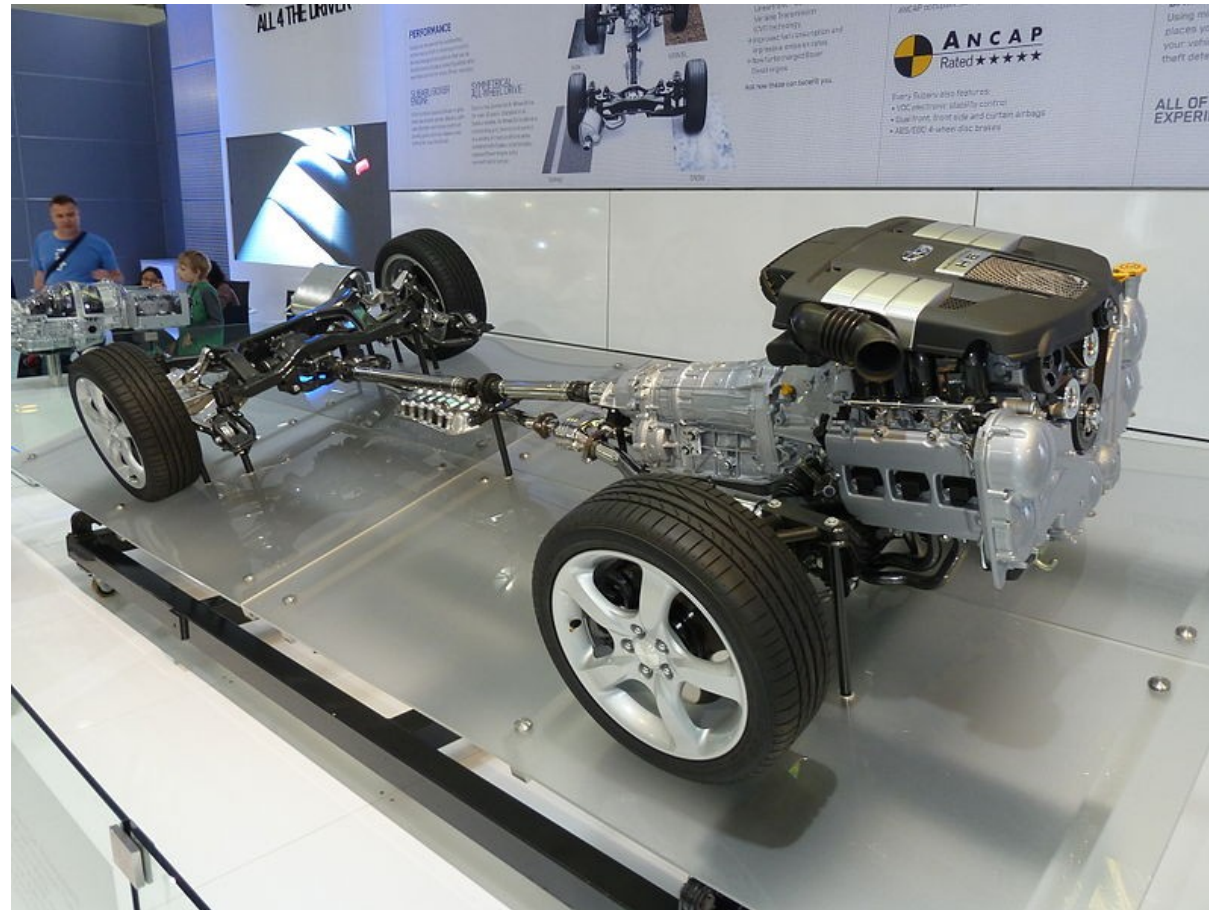


4. Torsion

- Die Belastung eines Balkens durch ein Moment um die x -Achse wird als Torsion bezeichnet.
- Das Torsionsmoment M_x resultiert aus einer über den Querschnitt verteilten Schubspannung.
- Für Kreis- und Kreisringquerschnitte kann die Verteilung der Schubspannung einfach ermittelt werden.
- Im Folgenden werden kreiszylindrische Wellen mit konstantem oder nur schwach veränderlichem Radius betrachtet.
- Sie werden z. B. bei Antriebswellen verwendet, die zur Übertragung von Drehmomenten eingesetzt werden.

4. Torsion

- Beispiel: Antriebsstrang



4. Torsion

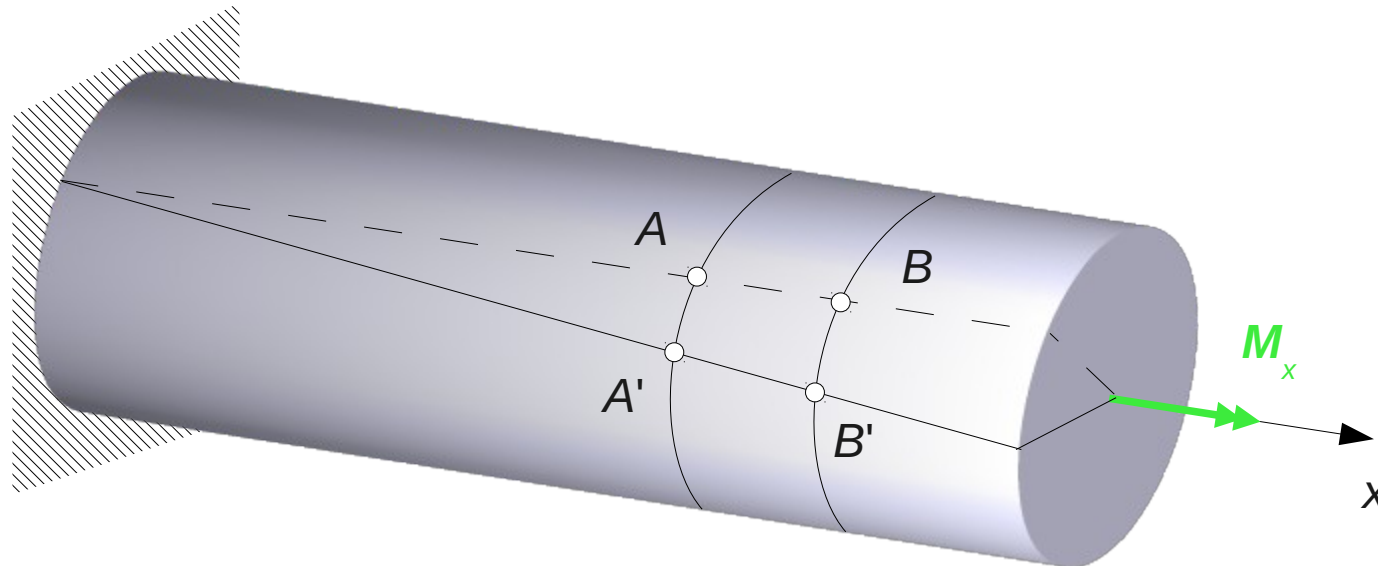
4.1 Spannungsermittlung

4.2 Beispiele

4.3 Zulässige Spannung

4.1 Spannungsermittlung

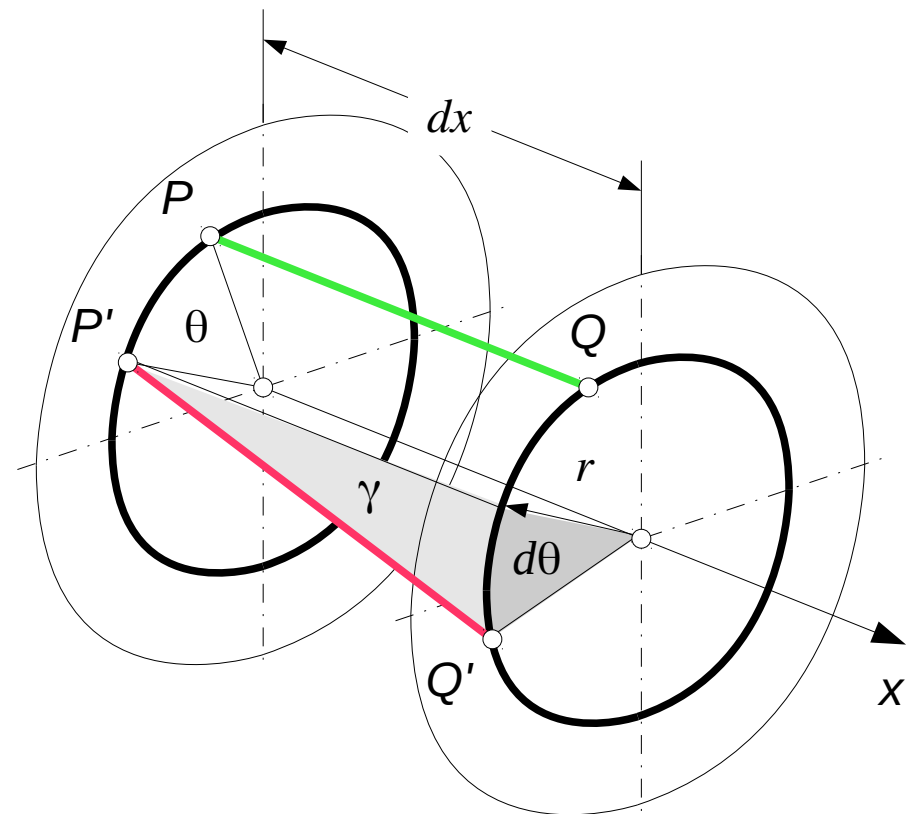
- Kinematik:
 - Die Querschnitte drehen sich um die x -Achse, ohne dabei ihre Form zu ändern.
 - Es tritt keine Verschiebung in x -Richtung auf.



4.1 Spannungsermittlung

- Scherung:
 - Der Querschnitt an der Stelle x verdreht sich um den Winkel θ .
 - Der Querschnitt an der Stelle $x + dx$ verdreht sich um den Winkel $\theta + d\theta$.
 - Aus der Zeichnung kann abgelesen werden:

$$\gamma dx = r d\theta$$



4.1 Spannungsermittlung

- Daraus folgt für die Sche-
rung:

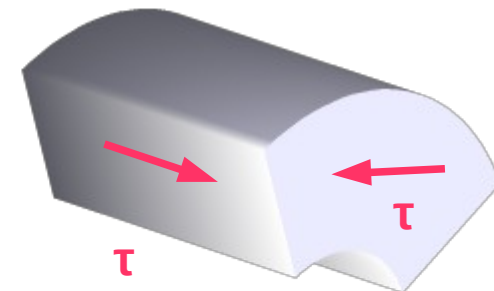
$$\gamma = r \frac{d\theta}{dx}$$

- Die Ableitung $d\theta/dx$ wird
als *Verdrillung* bezeichnet.

- Schubspannung:

- Mit dem Materialgesetz
folgt für die Schubspan-
nung:

$$\tau = G \gamma = G r \frac{d\theta}{dx}$$



4.1 Spannungsermittlung

- Das resultierende Moment der Schubspannung ist gleich dem Torsionsmoment:

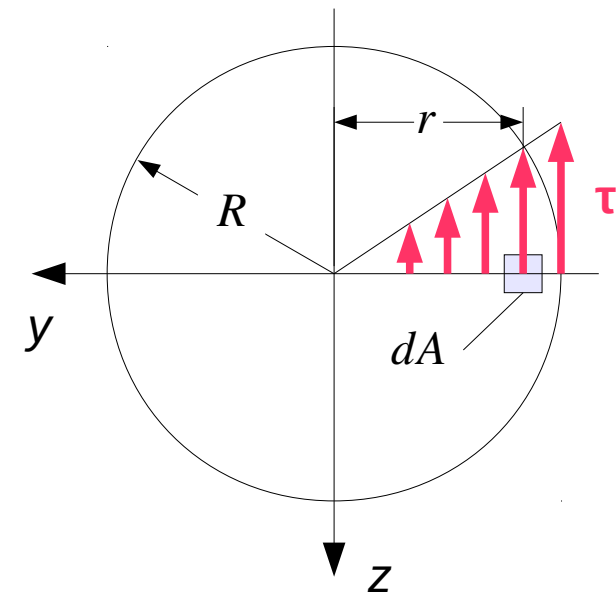
$$M_x = \int_A r \tau dA = G \frac{d\theta}{dx} \int_A r^2 dA$$

- Mit dem *Torsionsträgheitsmoment*

$$I_T = \int_A r^2 dA$$

gilt:

$$M_x = G I_T \frac{d\theta}{dx}$$



- Die Größe GI_T wird als *Torsionssteifigkeit* bezeichnet.

4.1 Spannungsermittlung

- Mit

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{G I_T}$$

folgt für die Schubspannung: $\tau = \frac{M_x}{I_T} r$

- Die maximale Schubspannung tritt für $r = R$ auf:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_T} R = \frac{M_x}{W_T} \quad \text{mit} \quad W_T = \frac{I_T}{R}$$

- Dabei ist W_T das *Torsionswiderstandsmoment*.

4.1 Spannungsermittlung

- Verdrehung:

- Der Winkel, um den sich zwei Querschnitte an den Stellen x_A und x_B gegeneinander verdrehen, berechnet sich zu

$$\Delta \theta = \theta_B - \theta_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\theta}{dx} dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_x}{G I_T} dx$$

- Bei konstantem Torsionsmoment und konstanter Torsionssteifigkeit gilt:

$$\theta_B - \theta_A = \frac{M_x L_{AB}}{G I_T} \quad \text{mit} \quad L_{AB} = x_B - x_A$$

4.1 Spannungsermittlung

- Torsionsträgheitsmoment:

- Kreisquerschnitt:

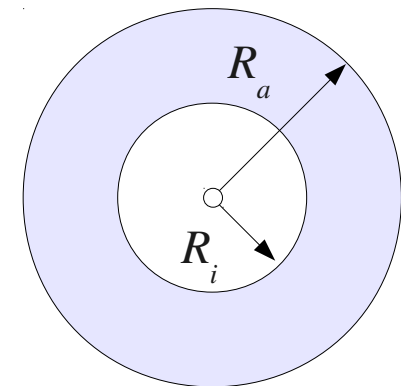
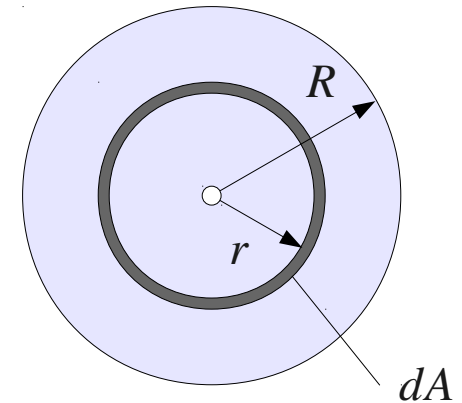
$$dA = 2\pi r dr$$

$$I_T = \int_A r^2 dA = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi R^4$$

$$W_T = \frac{1}{2} \pi R^3$$

- Kreisringquerschnitt:

$$I_T = \frac{1}{2} \pi (R_a^4 - R_i^4), \quad W_T = \frac{1}{2} \frac{\pi}{R_a} (R_a^4 - R_i^4)$$



4.1 Spannungsermittlung

- Beim Kreis und beim Kreisring stimmt das Torsionsträgheitsmoment mit dem *polaren Flächenträgheitsmoment* überein. Das polare Flächenträgheitsmoment ist ein geometrischer Kennwert des Querschnitts.

4.1 Spannungsermittlung

- Allgemeine Querschnitte:
 - Bei einem allgemeinen Querschnitt stimmt das Torsionsträgheitsmoment nicht mit dem polaren Flächenträgheitsmoment überein.
 - Zusätzlich tritt eine Verschiebung in x -Richtung auf, die als *Verwölbung* bezeichnet wird.
 - Die Formeln für die Schubspannung und die Verdrillung gelten weiterhin.
 - Torsionsträgheitsmoment und Torsionswiderstandsmoment sind jedoch komplizierter zu berechnen.

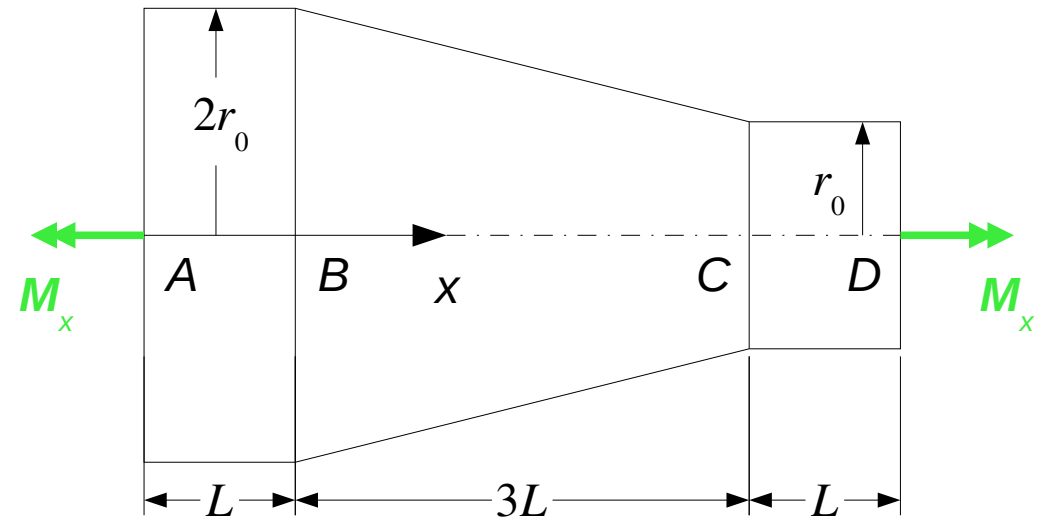
4.2 Beispiele

- Konische Welle

- Die abgebildete konische Antriebswelle mit Kreisquerschnitt wird durch das Antriebsmoment M_x belastet.

- Gegeben:

- Abmessungen L und r_0
- Schubmodul G
- Antriebsmoment M_x



- Gesucht:

- Maximale Schubspannung
- Verdrehungen relativ zu Querschnitt A

4.2 Beispiele

- Das Torsionsmoment ist in jedem Querschnitt gleich und hat den Wert M_x .
- Größte Schubspannung:
 - Die größte Schubspannung tritt im Abschnitt CD auf.
 - Mit dem Torsionswiderstandsmoment

$$W_T^{CD} = \frac{1}{2} \pi r_0^3$$

gilt:
$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_T^{CD}} = \frac{2 M_x}{\pi r_0^3}$$

4.2 Beispiele

- Verdrehungen:

- Torsionsträgheitsmomente:

$$I_T^{AB} = \frac{1}{2} \pi (2r_0)^4 = 8\pi r_0^4, \quad I_T^{CD} = \frac{1}{2} \pi r_0^4$$

$$I_T^{BC}(x) = \frac{1}{2} \pi \left(2r_0 - \frac{r_0}{3L}(x-L) \right)^4 = \frac{\pi r_0^4}{162} \left(7 - \frac{x}{L} \right)^4$$

- Querschnitt B :

$$\theta_B - \theta_A = \frac{M_x L}{G I_T^{AB}} = \frac{M_x L}{8\pi r_0^4 G}$$

4.2 Beispiele

- Querschnitt C:

$$\begin{aligned}
 \theta_C - \theta_A &= \theta_B - \theta_A + \int_{x_B}^{x_C} \frac{d\theta}{dx} dx = \theta_B - \theta_A + \int_L^{4L} \frac{M_x}{G I_T^{BC}(x)} dx \\
 &= \theta_B - \theta_A + \frac{162 M_x}{\pi r_0^4 G} \int_L^{4L} \frac{dx}{(7 - x/L)^4} \\
 &= \theta_B - \theta_A + \frac{162 M_x}{\pi r_0^4 G} \left[\frac{L}{3} \frac{1}{(7 - x/L)^3} \right]_{x=L}^{x=4L} \\
 &= \frac{M_x L}{8 \pi r_0^4 G} + \frac{2 \cdot 3^3 M_x L}{\pi r_0^4 G} \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{(2 \cdot 3)^3} \right) = \frac{M_x L}{\pi r_0^4 G} \left(\frac{1}{8} + \frac{14}{8} \right) = \frac{15}{8} \frac{M_x L}{\pi r_0^4 G}
 \end{aligned}$$

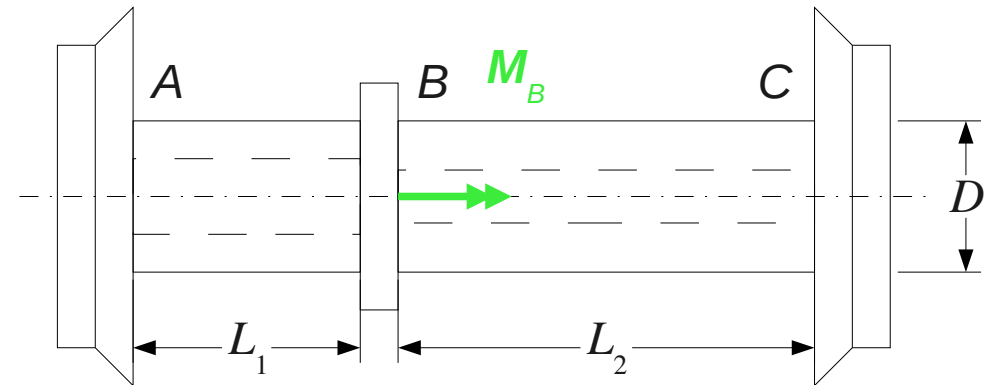
- Querschnitt D:

$$\theta_D - \theta_A = \theta_C - \theta_A + \frac{M_x L}{G I_T^{CD}} = \frac{M_x L}{\pi r_0^4 G} \left(\frac{15}{8} + 2 \right) = \frac{31}{8} \frac{M_x L}{\pi r_0^4 G}$$

4.2 Beispiele

- Radsatz:

- Die beiden Räder *A* und *C* sind durch Hohlwellen mit der starren Antriebsscheibe *B* verbunden.



- Gegeben:

- Abmessungen $L_1 < L_2$ und D
- Antriebsmoment M_B
- Zulässige Spannung τ_{zul}

- Gesucht:

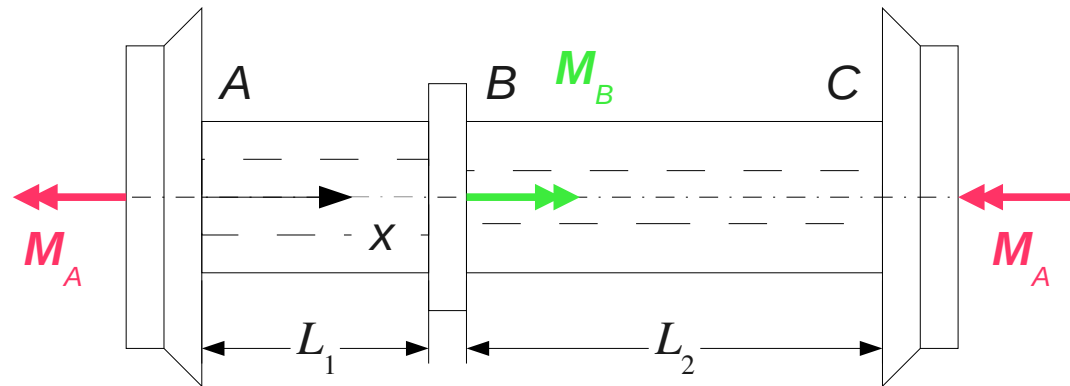
- Verhältnis I_{T1}/I_{T2} so, dass beide Räder das gleiche Moment übertragen
- Innendurchmesser d_1 und d_2

4.2 Beispiele

- Momentengleichgewicht:

$$\sum M_x = 0 : \\ -2 M_A + M_B = 0$$

$$\rightarrow M_A = \frac{1}{2} M_B$$



- Torsionsmoment:

- Abschnitt AB (Gleichgewicht für linke Teilachse):

$$M_{x1} = M_A$$

- Abschnitt BC (Gleichgewicht für rechte Teilachse):

$$M_{x2} = -M_A$$

4.2 Beispiele

- Verträglichkeitsbedingung:
 - Es tritt keine Verdrehung von Rad C relativ zu Rad A auf:

$$0 = \frac{M_{x1} L_1}{G I_{T1}} + \frac{M_{x2} L_2}{G I_{T2}} = \frac{M_A}{G} \left(\frac{L_1}{I_{T1}} - \frac{L_2}{I_{T2}} \right) \rightarrow \frac{I_{T1}}{I_{T2}} = \frac{L_1}{L_2}$$

- Innendurchmesser:
 - Die größere Schubspannung tritt im Abschnitt AB auf:

$$\tau_{zul} \geq \frac{M_A}{W_{T1}} = \frac{M_B}{2} \frac{D}{\pi} \frac{16}{D^4 - d_1^4} = \frac{8}{\pi} \frac{M_B D}{D^4 - d_1^4}$$

$$\tau_{zul} (D^4 - d_1^4) \geq \frac{8}{\pi} M_B D \rightarrow d_1 \leq \sqrt[4]{D^4 - \frac{8}{\pi} \frac{M_B D}{\tau_{zul}}}$$

4.2 Beispiele

• Aus $\frac{L_1}{L_2} = \frac{I_{T1}}{I_{T2}} = \frac{D^4 - d_1^4}{D^4 - d_2^4}$ folgt $\frac{L_1}{L_2} (D^4 - d_2^4) = D^4 - d_1^4$

und daraus: $d_2^4 = D^4 - \frac{L_2}{L_1} (D^4 - d_1^4) = \frac{L_2}{L_1} d_1^4 + \left(1 - \frac{L_2}{L_1}\right) D^4$

$$\rightarrow d_2 = \sqrt[4]{\frac{L_2}{L_1} d_1^4 + \left(1 - \frac{L_2}{L_1}\right) D^4}$$

4.3 Zulässige Spannung

- Duktile Werkstoffe:
 - Bei duktilen Werkstoffen kann Fließen oder Bruch auftreten.
 - Mit dem Torsionsmoment M_{xF} bei Fließbeginn und dem Torsionsmoment M_{xB} bei Bruch wird eine *Torsionsfließgrenze* und eine *Torsionsfestigkeit* definiert:

- Torsionsfließgrenze:
$$\tau_{tF} = \frac{M_{xF}}{W_T} = \frac{1}{2} R_e$$

- Torsionsfestigkeit:
$$\tau_{tB} = \frac{M_{xB}}{W_T}$$

4.3 Zulässige Spannung

- Spröde Werkstoffe:
 - Bei spröden Werkstoffen kann nur Versagen durch Bruch auftreten.
 - Die Torsionsfestigkeit τ_{tB} entspricht der Zugfestigkeit R_m .
- Sicherheit und zulässige Spannung:
 - Gegen Fließen: $S_F = \frac{\tau_{tF}}{\tau}$, $\tau_{zul} = \frac{\tau_{tF}}{S_F}$
 - Gegen Bruch: $S_B = \frac{\tau_{tB}}{\tau}$, $\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B}$

4.3 Zulässige Spannung

- Anhaltswerte für die Sicherheit bei Torsionsbeanspruchung:

Werkstoffart	Versagensart	Sicherheit
duktil	Fließen	1,2 - 2,0
	Bruch	2,0 - 4,0
spröde	Bruch	4,0 - 9,0