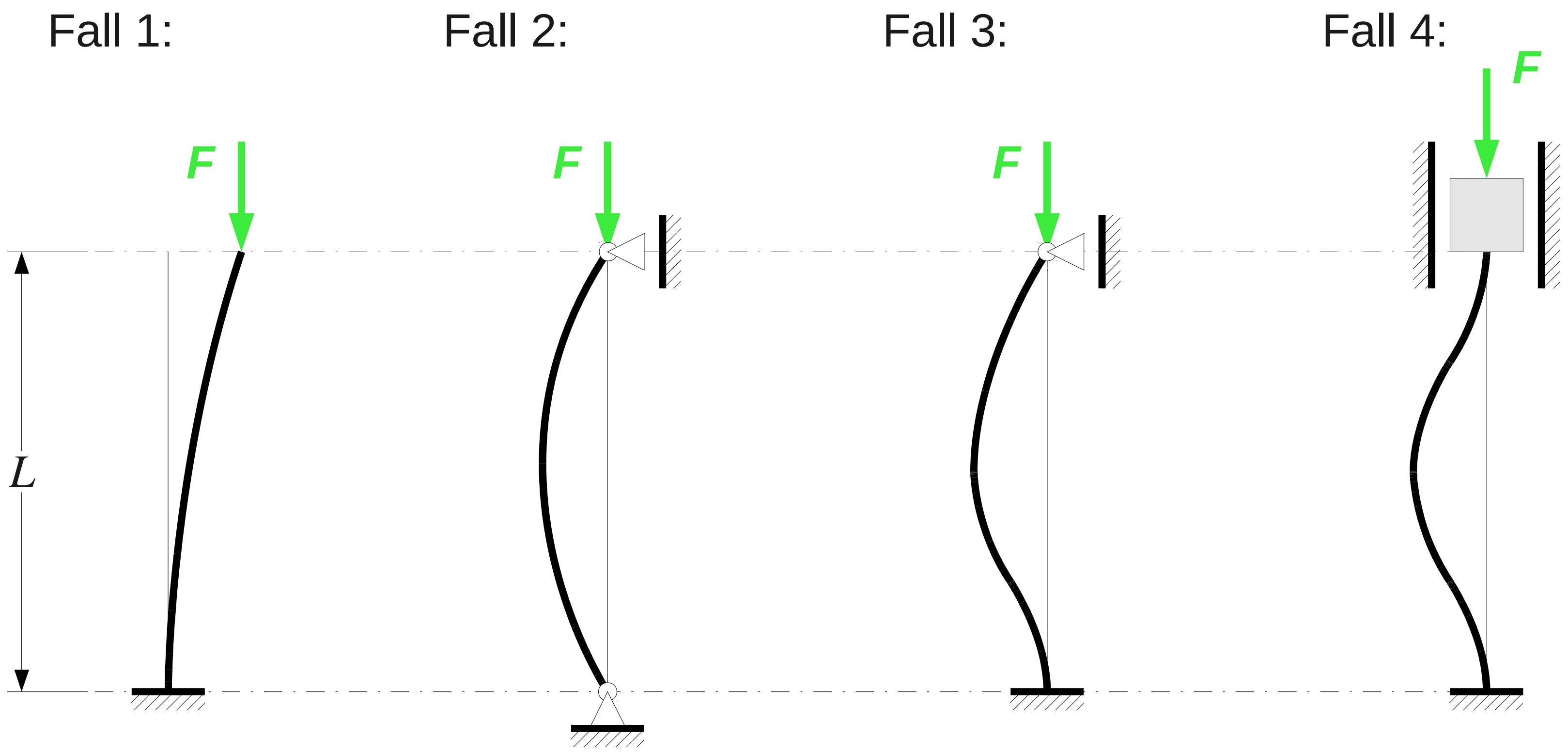
2. Eulersche Knickfälle

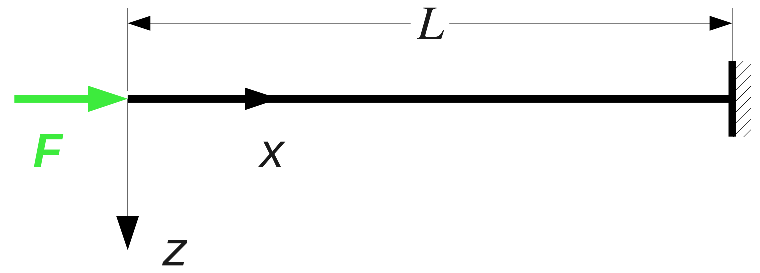
- Das Stabilitätsversagen von Balken unter Druckbelastung wird als *Knicken* bezeichnet.
- Linear-elastisches Knicken wurde zuerst von Leonhard Euler untersucht.
- Nach ihm sind die vier Eulerschen Knickfälle benannt, die sich durch die Randbedingungen unterscheiden.

2. Eulersche Knickfälle



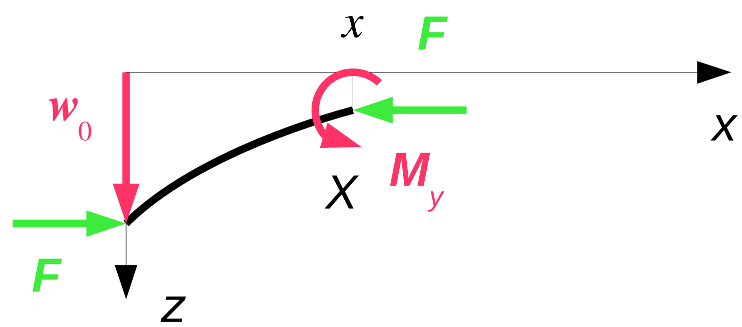
2. Eulersche Knickfälle

- Fall 1:
  - Gleichgewicht am <u>ausgelenk-ten</u> linken Teilbalken:



$$\sum M^X = 0 \quad :$$

$$M_y + F\left(w_0 - w(x)\right) = 0$$



  - Mit $\quad M_y = -E I_y \dfrac{d^2 w}{dx^2}$

folgt: $\quad \dfrac{d^2 w}{dx^2} + \dfrac{F}{E I_y} w = \dfrac{F}{E I_y} w_0$

2. Eulersche Knickfälle

- Mit $$k^2 = \frac{F}{E\,I_y}$$

  lautet die *Knickgleichung*:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 w_0$$

- Sie hat die allgemeine Lösung:

$$w(x) = w_0 + w_s \sin(k\,x) + w_c \cos(k\,x)$$

$$\frac{dw}{dx} = k\left(w_s \cos(k\,x) - w_c \sin(k\,x)\right)$$

- Randbedingungen:

$$w(0) = w_0 \quad \rightarrow \quad w_c = 0$$

$$w(L) = 0$$

$$\rightarrow \quad w_0 + w_s \sin(k\,L) = 0$$

$$\frac{dw}{dx}(L) = 0$$

$$\rightarrow \quad k\,w_s \cos(k\,L) = 0$$

2. Eulersche Knickfälle

- Eine von null verschiedene Lösung existiert nur, wenn die *Knickbedingung*

$$\cos(k L)=0$$

erfüllt ist.

- Daraus folgt: $k L=\frac{\pi}{2} \rightarrow k=\frac{\pi}{2 L}$

- Für die kritische Last gilt: $F_{krit}=k^2 E I_y=\frac{\pi^2 E I_y}{(2 L)^2}$

- Aus $w_0=-w_s \sin(k L)=-w_s$ folgt für die *Knickform*:

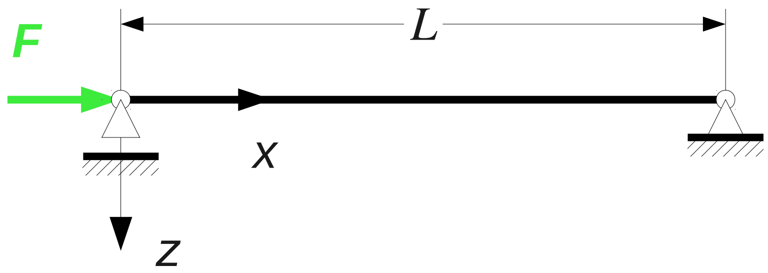
$$w(x)=w_0\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\right)$$

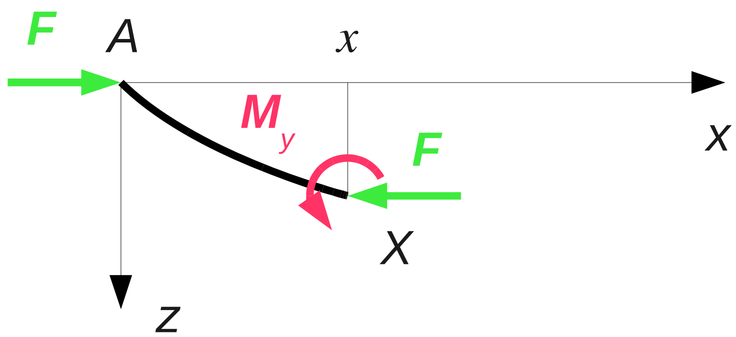
2. Eulersche Knickfälle

- Anmerkungen:
  - Da Knicken bei Erreichen der niedrigsten kritischen Last auftritt, haben die weiteren Lösungen der Knickbedingung keine technische Bedeutung.
  - Die Amplitude w_0 kann nicht bestimmt werden.

2. Eulersche Knickfälle

- Fall 2:
  - Der Balken ist auch im ausgelenkten Zustand eine Pendelstütze.
  - Gleichgewicht am ausgelenkten linken Teilbalken:





$$\sum M^X = 0 \;:\; M_y - F\,w(x) = 0$$

  - Mit

$$M_y = -E\,I_y \frac{d^2 w}{dx^2} \quad \text{folgt:} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F}{E\,I_y} w = 0$$

2. Eulersche Knickfälle

- Mit $k^2 = F/(EI_y)$ lautet die Knickgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0$$

- Allgemeine Lösung:

$$w(x) = w_s \sin(k x) + w_c \cos(k x)$$

- Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \rightarrow w_c = 0$$
$$w(L) = 0 \rightarrow w_s \sin(k L) = 0$$

- Knickbedingung:

$$\sin(k L) = 0 \rightarrow k = \frac{\pi}{L}$$

- Kritische Last:

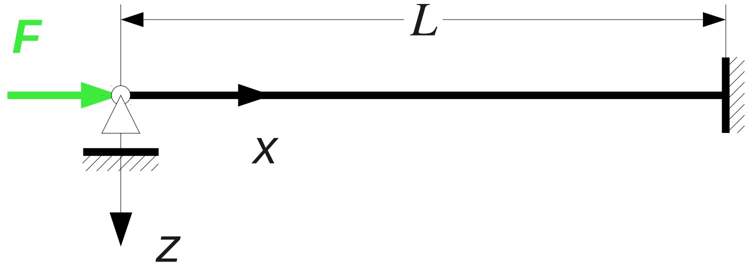
$$F_{krit} = \frac{\pi^2 E I_y}{L^2}$$

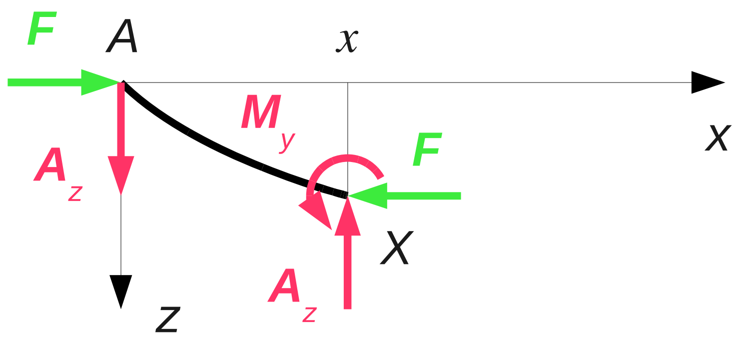
- Knickform:

$$w(x) = w_s \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

2. Eulersche Knickfälle

- Fall 3:
  - Gleichgewicht am ausgelenkten linken Teilbalken:





$$\sum M^X = 0 \quad :$$

$$M_y - F\,w(x) + x\,A_z = 0$$

  - Mit $\quad M_y = -E\,I_y \dfrac{d^2 w}{dx^2}$

folgt: $\quad \dfrac{d^2 w}{dx^2} + \dfrac{F}{E\,I_y} w = \dfrac{A_z}{E\,I_y} x$

2. Eulersche Knickfälle

- Mit $k^2 = F/(EI_y)$ lautet die Knickgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 \frac{A_z}{F} x$$

- Allgemeine Lösung:

$$w(x) = \frac{A_z}{F} x + w_s \sin(k x) + w_c \cos(k x)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{A_z}{F} + k w_s \cos(k x) - k w_c \sin(k x)$$

- Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \rightarrow w_c = 0$$

$$w(L) = 0$$

$$\rightarrow \frac{A_z}{F} L + w_s \sin(k L) = 0$$

$$\frac{dw}{dx}(L) = 0$$

$$\rightarrow \frac{A_z}{F} + k w_s \cos(k L) = 0$$

$$\rightarrow \frac{A_z}{F} = -k w_s \cos(k L)$$

2. Eulersche Knickfälle

- Knickbedingung:

$$-kL\cos(kL)+\sin(kL)=0$$

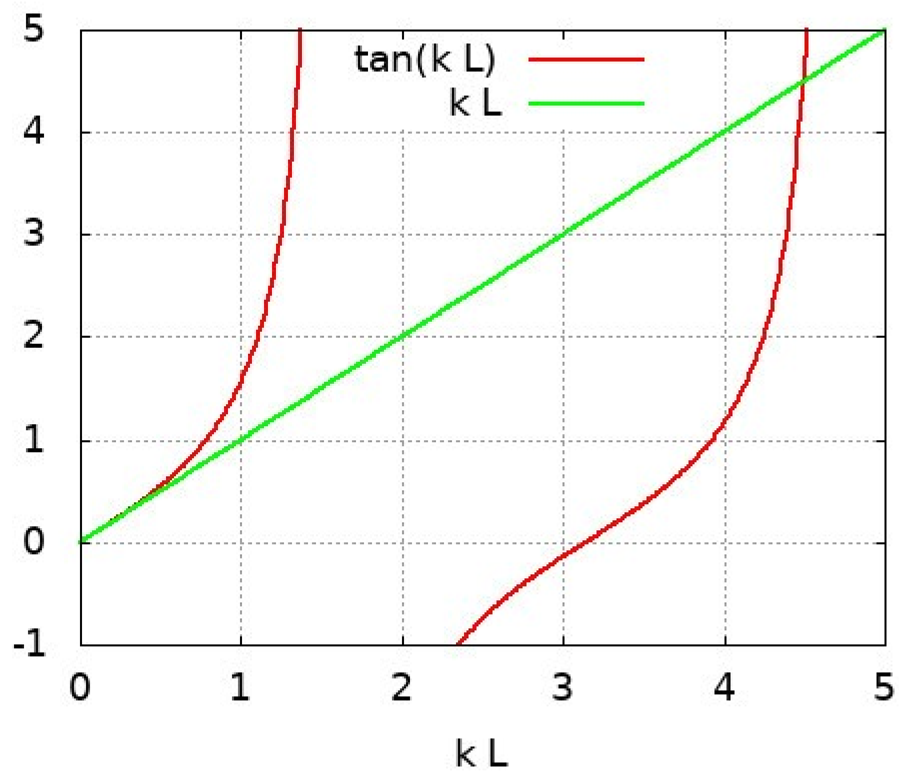
$$\rightarrow \quad \tan(kL)=kL$$

- Diese transzendente Gleichung kann graphisch oder iterativ gelöst werden:

$$kL=4{,}493$$

- Kritische Last:

$$F_{krit}=k^2 E I_y=\frac{\pi^2 E I_y}{(\pi/4{,}493)^2 L^2}$$

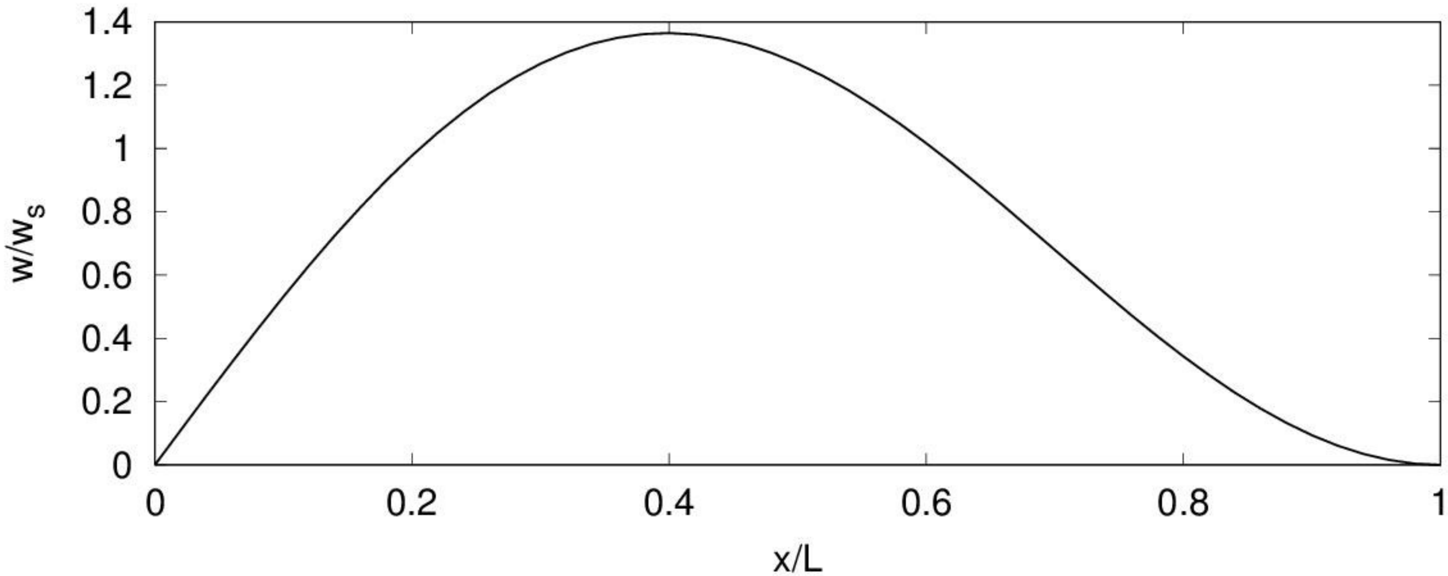


2. Eulersche Knickfälle

- Knickform:

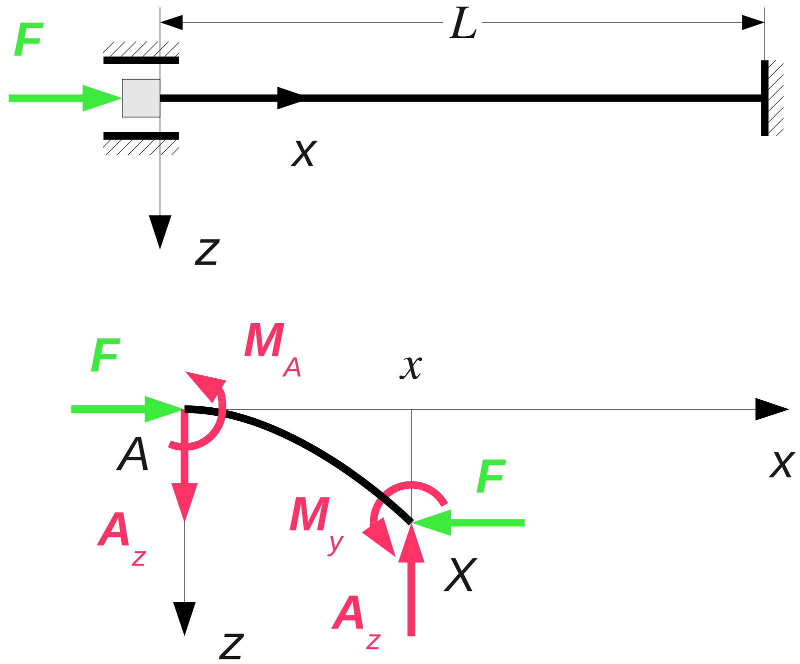
$$w(x) = w_s\left(-k\,x\cos(k\,L) + \sin(k\,x)\right)$$

$$\cos(k\,L) = \frac{\sin(k\,L)}{k\,L} \quad \rightarrow \quad w(x) = w_s\left(\sin(k\,x) - \frac{x}{L}\sin(k\,L)\right)$$



2. Eulersche Knickfälle

- Fall 4:
  - Gleichgewicht am ausgelenkten linken Teilbalken:



$$\sum M^X = 0 \quad :$$

$$M_y - F\,w(x) + M_A + x\,A_z = 0$$

  - Mit $\quad M_y = -E\,I_y \dfrac{d^2 w}{dx^2}$

folgt: $\quad \dfrac{d^2 w}{dx^2} + \dfrac{F}{E\,I_y} w = \dfrac{M_A + A_z\,x}{E\,I_y}$

2. Eulersche Knickfälle

- Mit $k^2 = F/(EI_y)$ lautet die Knickgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 \frac{M_A + A_z x}{F}$$

- Sie hat die allgemeine Lösung:

$$w(x) = \frac{M_A + A_z x}{F} + w_s \sin(k x) + w_c \cos(k x)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{A_z}{F} + k\left(w_s \cos(k x) - w_c \sin(k x)\right)$$

2. Eulersche Knickfälle

- Randbedingungen: $w(0)=0 \ : \ \dfrac{M_A}{F}+w_c=0 \ \rightarrow \ \dfrac{M_A}{F}=-w_c$

$$\frac{dw}{dx}(0)=0 \ : \ \frac{A_z}{F}+k\,w_s=0 \ \rightarrow \ \frac{A_z}{F}=-k\,w_s$$

$$w(L)=0 \ : \ \frac{M_A+A_z L}{F}+w_s\sin(k L)+w_c\cos(k L)=0$$

$$\rightarrow \ \left(\sin(k L)-k L\right)w_s+\left(\cos(k L)-1\right)w_c=0$$

$$\frac{dw}{dx}(L)=0 \ : \ \frac{A_z}{F}+k\left(w_s\cos(k L)-w_c\sin(k L)\right)=0$$

$$\rightarrow \ \left(\cos(k L)-1\right)w_s-\sin(k L)\,w_c=0$$

2. Eulersche Knickfälle

- Knickbedingung:

$$0=\begin{vmatrix} \sin(kL)-kL & \cos(kL)-1 \\ \cos(kL)-1 & -\sin(kL) \end{vmatrix}$$
$$=-\left(\sin(kL)-kL\right)\sin(kL)-\left(\cos(kL)-1\right)^2$$
$$=-\sin^2(kL)+kL\sin(kL)-\cos^2(kL)+2\cos(kL)-1$$
$$=-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)$$

- Kleinste von null verschiedene Lösung: $kL=2\pi$

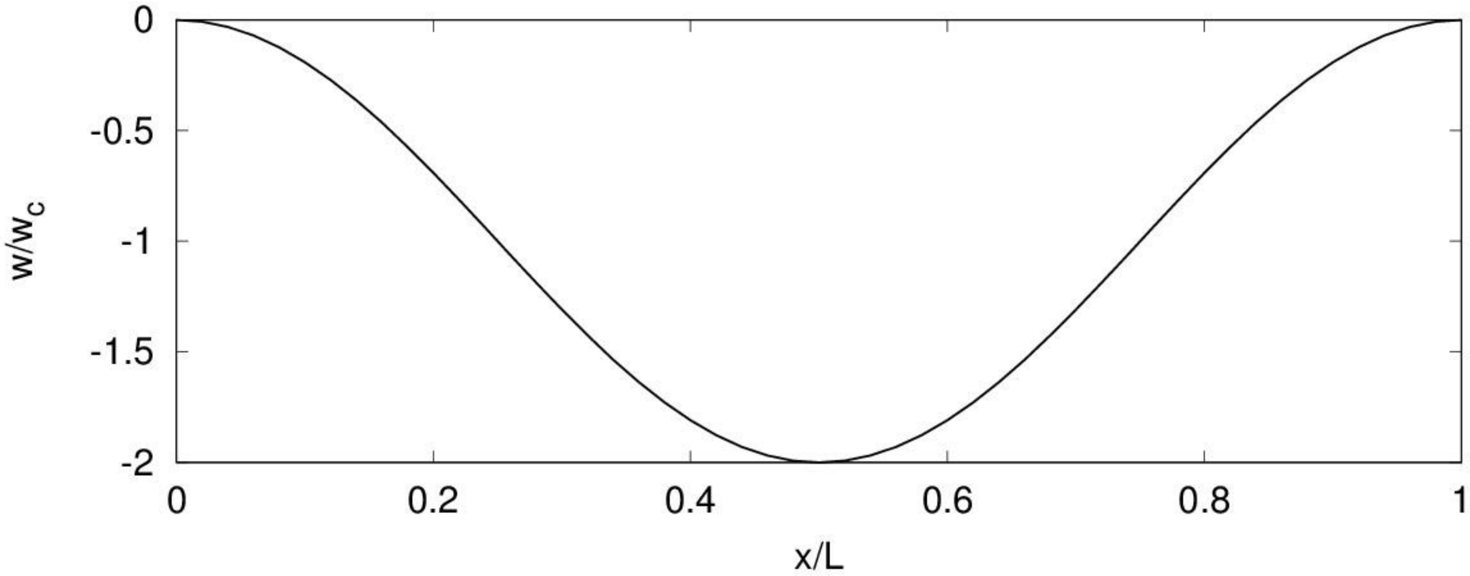
- Kritische Last: $F_{krit}=k^2 E I_y=\dfrac{4\pi^2 E I_y}{L^2}=\dfrac{\pi^2 E I_y}{(L/2)^2}$

2. Eulersche Knickfälle

- Knickform: $\sin(kL)=\sin(2\pi)=0\,,\quad \cos(kL)=\cos(2\pi)=1$

$$\left(\sin(kL)-kL\right)w_s+\left(\cos(kL)-1\right)w_c=-2\pi w_s=0 \;\rightarrow\; w_s=0$$

$$\rightarrow\; A_z=0\,,\quad \frac{M_A}{F}=-w_c \;\rightarrow\; w(x)=w_c\left(\cos\left(2\pi\frac{x}{L}\right)-1\right)$$



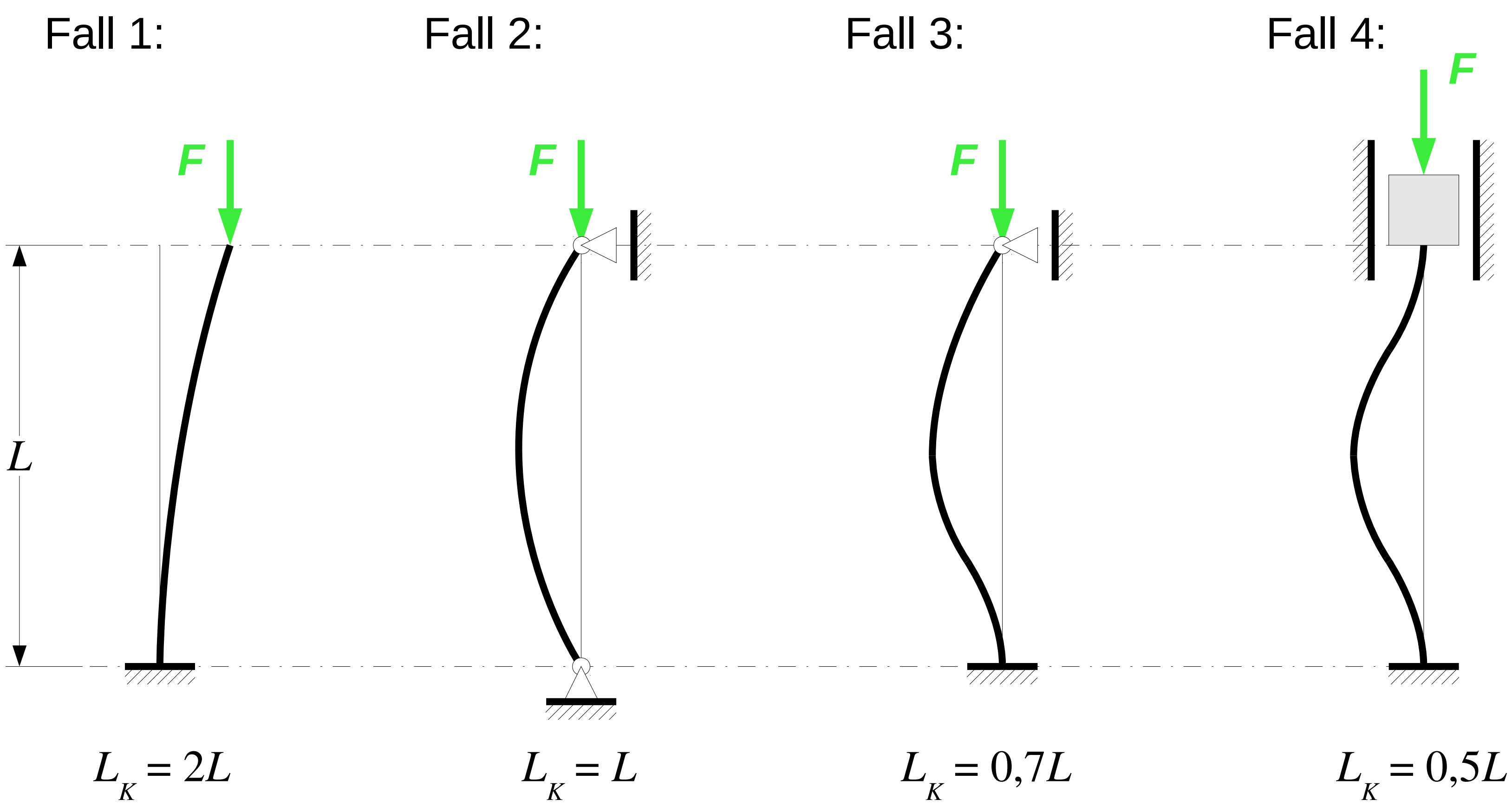
2. Eulersche Knickfälle

- Euler-Hyperbel:
  - Mithilfe der *freien Knicklänge* L_K kann die kritische Last für die vier Eulerschen Knickfälle einheitlich dargestellt werden:

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_K^2}$$

Knickfall	1	2	3	4
Knicklänge	$2L$	L	$0{,}7L$	$0{,}5L$

2. Eulersche Knickfälle



2. Eulersche Knickfälle

- Für die zur kritischen Last gehörende *Knickspannung* gilt:

$$\sigma_{krit} = \frac{F_{krit}}{A} = \frac{\pi^2 E I_y}{A L_K^2} = \frac{\pi^2 E}{L_K^2} \frac{I_y}{A} = \pi^2 E \frac{i_y^2}{L_K^2}$$

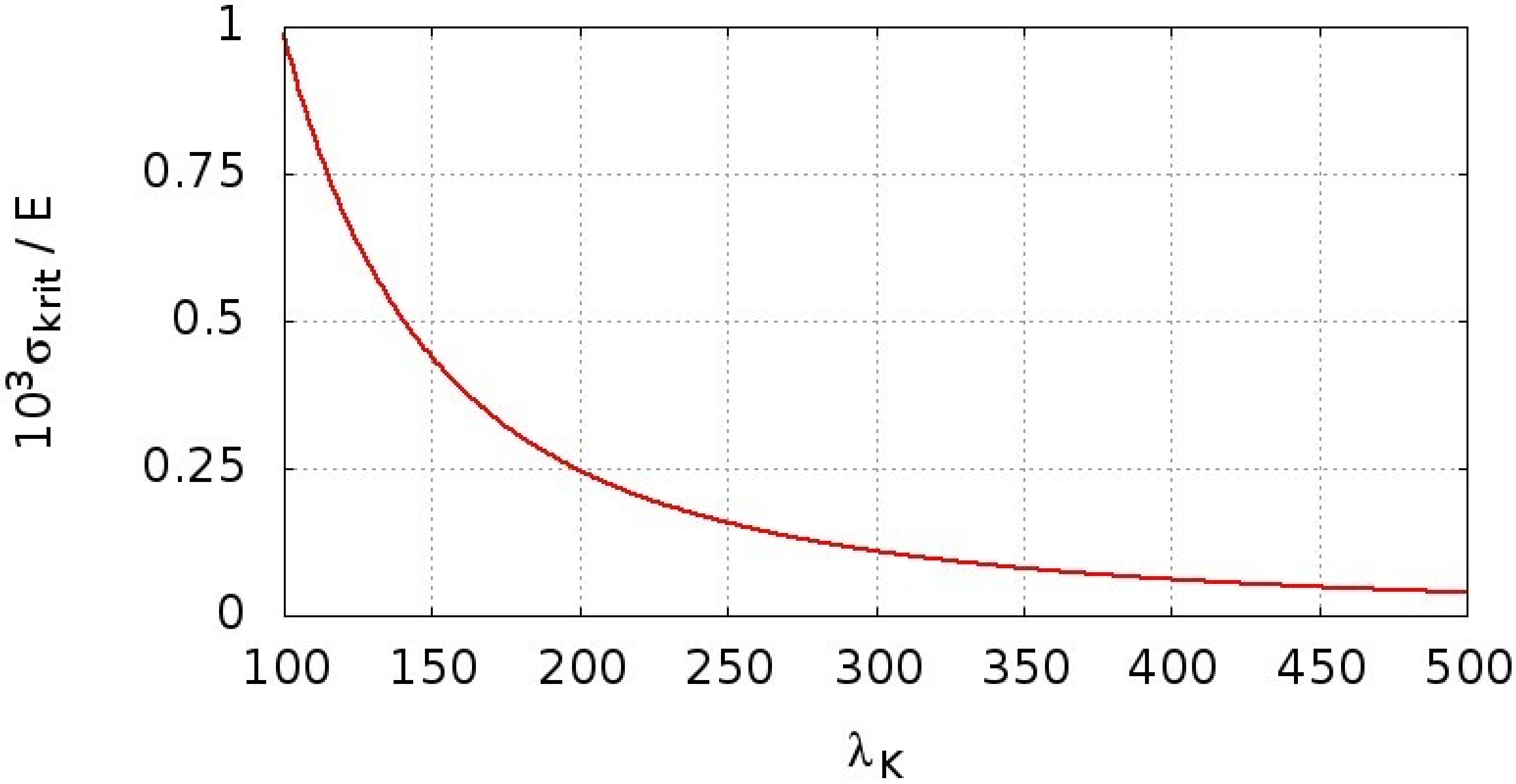
- Mit dem *Schlankheitsgrad* $\lambda_K = L_K / i_y$ gilt:

$$\boxed{\sigma_{krit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_K^2}}$$

- Der Zusammenhang zwischen Knickspannung und Schlankheitsgrad wird als *Euler-Hyperbel* bezeichnet.

2. Eulersche Knickfälle

- Euler-Hyperbel:



2. Eulersche Knickfälle

- Die Euler-Hyperbel gilt, solange die Knickspannung unterhalb der Proportionalitätsgrenze für Druckspannungen liegt.
- Aus

$$\sigma_{krit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_K^2} = R_p$$

ergibt sich für den *Grenzschlankheitsgrad*

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{R_p}}$$

mit $R_p = R_{p0,2}$ oder $R_p = 0{,}8 R_e$.

2. Eulersche Knickfälle

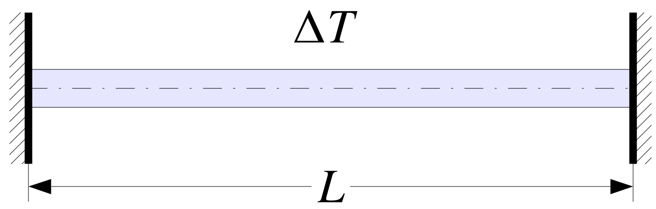
- Sicherheit:
  - Für die Sicherheit gegen Knicken gilt: $S_K = \frac{\sigma_{krit}}{|\sigma|} = \frac{F_{krit}}{|N|}$
  - Die geforderten Sicherheiten liegen zwischen 2,5 und 5.
  - Bei gegebener Sicherheit berechnet sich die zulässige Spannung zu

$$\sigma_{zul} = \min\left(\frac{\sigma_{krit}}{S_K}, \frac{\sigma_{dF}}{S_F}\right)$$

  - Im Gültigkeitsbereich der Euler-Hyperbel ($\lambda_K > \lambda_p$) hängt die Knickspannung nur über den Elastizitätsmodul vom Werkstoff ab. Eine höhere Festigkeit des Werkstoffs führt zu keiner höheren Knicksicherheit.

2. Eulersche Knickfälle

- Beispiel: Stab unter Temperaturlast
  - Gegeben:
    - Länge $L = 10\ \mathrm{m}$
    - Trägheitsradius $i_y = 4{,}0\ \mathrm{cm}$
    - Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha_T = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$



  - Gesucht:
    - Konstante Temperaturänderung ΔT, bei der der Stab ausknickt

2. Eulersche Knickfälle

- Normalkraft und Temperaturlast sind konstant. Daher sind Spannung und Dehnung konstant.
- Die Länge kann sich nicht ändern:

$$\Delta L = \epsilon L = 0 \;\rightarrow\; \epsilon = 0$$

- Aus dem Materialgesetz folgt:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T = 0$$

$$\rightarrow \; \sigma = -E \alpha_T \Delta T$$

- Knicken tritt auf für

$$|\sigma| = E \alpha_T \Delta T = \sigma_{krit} = E \frac{\pi^2}{\lambda_K^2}$$

$$\rightarrow \; \Delta T = \frac{\pi^2}{\alpha_T \lambda_K^2}$$

- Zahlenwert:

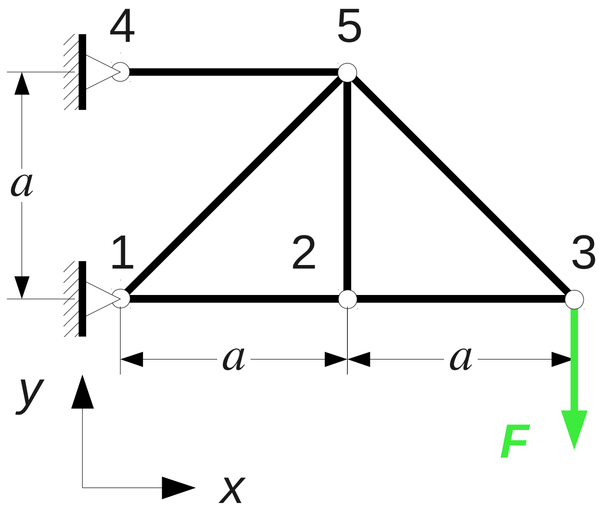
$$L_K = L/2 = 5\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{cm}$$

$$\lambda_K = \frac{500\,\mathrm{cm}}{4{,}0\,\mathrm{cm}} = 125$$

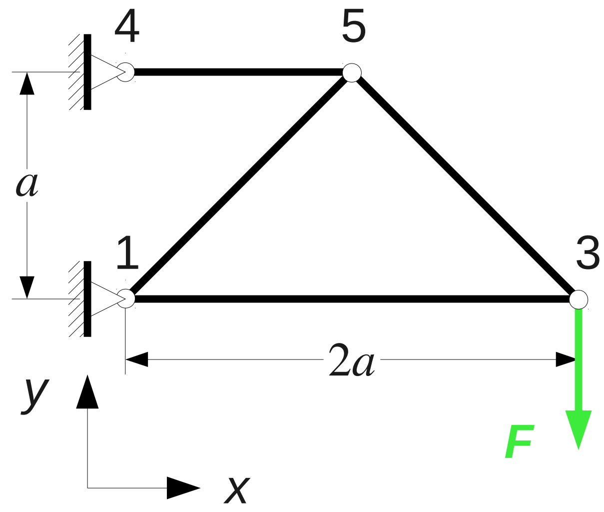
$$\Delta T = \underline{52{,}64\,\mathrm{K}}$$

2. Eulersche Knickfälle

- Beispiel: Fachwerk
  - Ausführung 1:



  - Ausführung 2:



  - Gegeben:
    - a, F, E, I_y
  - Gesucht:
    - Knicksicherheit S_K

2. Eulersche Knickfälle

- Stabkräfte für Ausführung 1:
  - Stab 25 ist ein Nullstab.
  - Die Stäbe 12, 23 und 15 sind Druckstäbe:

$$N_{12} = N_{23} = -F\,, \quad N_{15} = -\sqrt{2}\,F$$

- Stabkräfte für Ausführung 2:
  - Die Stäbe 13 und 15 sind Druckstäbe:

$$N_{13} = -F\,, \quad N_{15} = -\sqrt{2}\,F$$

- Knicksicherheit:
  - Für Fachwerkstäbe kann näherungsweise mit Fall 2 gerechnet werden: $L_K = L$
  - Für die Knicksicherheit gilt:

$$S_K = \frac{\sigma_{krit}}{|\sigma|} = \frac{F_{krit}}{|N|} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_K^2 |N|}$$

2. Eulersche Knickfälle

Stab	N	L_K	S_K
12	$-F$	a	$\pi^2 \frac{E I_y}{a^2 F}$
23	$-F$	a	$\pi^2 \frac{E I_y}{a^2 F}$
13	$-F$	$2a$	$\boxed{\frac{\pi^2}{4} \frac{E I_y}{a^2 F}}$
15	$-\sqrt{2}\,F$	$\sqrt{2}\,a$	$\boxed{\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \frac{E I_y}{a^2 F}}$

2. Eulersche Knickfälle

- Folgerungen:
  - Bei statisch bestimmten Fachwerken hängt die Knicksicherheit nicht von der Querschnittsfläche der Stäbe ab.
  - Durch Nullstäbe kann die freie Knicklänge kritischer Stäbe verringert und dadurch die Knicksicherheit erhöht werden.

2. Eulersche Knickfälle

- Räumliches Knicken:
  - Wenn die Randbedingungen in allen Raumrichtungen gleich sind (isotrope Randbedingungen), dann ist der Schlankheitsgrad mit dem kleinsten Flächenträgheitsmoment zu berechnen:

$$i_{min}=\sqrt{\frac{I_2}{A}},\quad \lambda_K=\frac{L_K}{i_{min}}$$

  - Wenn die Randbedingungen richtungsabhängig sind (anisotrope Randbedingungen), dann müssen die einzelnen Fälle getrennt untersucht werden.